

Lista 3 de MAT 103

Administração Noturno - FEA-USP - 1o. sem. 2011 - Turmas 21 e 22

Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

**I. Ainda sobre a lista 2 e relativos**

1. Esboce o gráfico de: (nao se esqueça de determinar o domínio!!!!)

a.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

b.  $f(x) = e^{x-1}$

c.  $y = \ln(x - 1)$

d.  $y = \log(-x)$

e.  $y = |\ln(x - 1)|$

2. *Uma aplicação de log e exp:* Um capital  $c$  é aplicado a juros contínuos de 20% ao ano. Em quanto tempo este capital será dobrado? (*Ver Juros Contínuos em geral no texto Log e Exp.*)

3. Determine a função  $f'$  para as funções  $f$  dadas abaixo:

a.  $f(x) = x \ln x - x$

b.  $f(x) = x^2 e^x$

c.  $f(x) = x^2 \ln(x^4 + 1)$

d.  $f(x) = e^{-x^2}$

e.  $f(x) = 2x e^{-x^2}$

**A. Leia com atenção:**

**Definição** Seja  $f$  uma função definida em um conjunto  $A$  e consideremos o conjunto  $A_1 = \{x \in A : f \text{ é derivável em } x\}$  (isto é,  $A_1$  é o conjunto dos pontos  $x$  em que a  $f$  tem derivada). Podemos, então definir a função, denotada por  $f' = \frac{df}{dx} : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , que a cada  $x \in A_1$  associa o valor  $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) \in \mathbb{R}$ , e é denominada derivada de 1a. ordem de  $f$ .

Da mesma forma para a função  $f' = \frac{df}{dx}$ , definida em  $A_1$ , consideremos o conjunto  $A_2 = \{x \in A_1 : f' \text{ é derivável em } x\}$ . Podemos também definir a função, denotada por  $(f')' = f''$ , que a cada  $x \in A_2$ , associa o valor  $(f')'(x) = f''(x) \in \mathbb{R}$ , que é denominada derivada de 2a. ordem de  $f$ . A função  $f''$  também é denotada por  $\frac{d^2f}{dx^2}$ .

**Um exemplo:** Seja  $f(x) = \sqrt{2x^3 + 2}$ , cujo domínio  $A = [-1, +\infty[$ . Como  $f$  não é derivável apenas em  $x = -1$  (verifique pela definição), temos que  $A_1 = ]-1, +\infty[$  e  $f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 2}}$  (via a RC em  $f(x) = (2x^3 + 2)^{1/2}$ ).

A função  $f'$  é derivável (em  $A_1$ ); portanto a  $f''$  está também definida em  $A_1$  e

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) = \left( \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 2}} \right)' \stackrel{RQ}{=} \frac{6x \sqrt{2x^3 + 2} - 3x^2 ((2x^3 + 2)^{1/2})'}{2x^3 + 2} = \\ &\stackrel{RC}{=} \frac{6x \sqrt{2x^3 + 2} - \frac{9x^4}{\sqrt{2x^3 + 2}}}{2x^3 + 2} = \frac{3x^4 + 12x}{(2x^2 + 3)\sqrt{2x^3 + 3}} \end{aligned}$$

4. Calcule as derivadas de 1a. e de 2a. ordem das funções indicadas abaixo, simplificando a expressão obtida (quando possível).

a.  $y = \frac{x}{1-x}$       b.  $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$       c.  $y = x - \frac{1}{x}$       d.  $y = \frac{x^2}{x+1}$

e.  $y = \frac{x}{x^2+1}$       f.  $y = \frac{9}{x^2+9}$       g.  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

## II. Aplicação de derivadas: Construindo gráficos

• Um roteiro para fazer um bom esboço de gráfico de funções  $y=f(x)$ : Determine

1. o domínio de  $f$ ;
2. os pontos em que a curva corta o eixo  $y$  e o eixo  $x$  (às vezes esta última não é muito fácil);
3. os intervalos de crescimento e decréscimo de  $f$  (via 1a. derivada);
4. pontos críticos de  $f$  e a natureza deles (pontos de máximo e mínimo locais - caso existam);
5. os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão de  $f$  (caso existam) (via 2a. derivada);
6. os limites necessários:
  - 6.a. limites laterais em  $p$ , quando  $p \in Dom f$ , mas  $f$  não é contínua nesse ponto, ou quando  $p \notin Dom f$ , mas é extremante de intervalo contido no domínio.
  - 6.b. limites para  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$  (se for o caso, a depender do domínio).
7. as assíntotas horizontais e verticais de  $f$  (caso existam), via os limites do item 6;
8. a existência de pontos de máximo/ mínimo globais.

- Concatene as informações dos itens 1 a 8 para o esboço.

• Recordando definições:

1. Assíntota horizontal: Seja  $f$  uma função cujo domínio contém um intervalo  $] -\infty, a[$  ou  $]a, =\infty[$ . Uma reta  $y = \ell \in \mathbb{R}$  é uma assíntota horizontal para o gráfico de  $y = f(x)$ , se uma das seguintes condições for satisfeita:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell.$$

2. Assíntota vertical: Seja  $f$  uma função cujo domínio contém um intervalo  $]a, p[$  ou  $]p, b[$ , com  $p \in \mathbb{R}$ . A reta  $x = p$  é uma assíntota vertical para o gráfico de  $y = f(x)$  se uma das seguintes condições estiver verificada:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty \quad (\text{ou } -\infty) \quad \text{ou} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty \quad (\text{ou } -\infty) \quad \text{ou}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty \quad (\text{ou } -\infty).$$

1. Use o roteiro acima, se for o caso, para esboçar o gráfico de:

a.  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$       b.  $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$       c.  $f(x) = x^4 - 2x^3$

d.  $f(x) = x - \frac{1}{x}$       e.  $f(x) = \frac{9}{x^2 + 9}$       f.  $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

g.  $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$       h.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$       i.  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

j.  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$       k.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$       l.  $f(x) = e^{-x^2}$

(Sobre o ítem **k**: Pense um pouco para ver se vale a pena usar o roteiro...)

2. É possível construir um retângulo de área máxima que tenha os lados paralelos aos eixos coordenados e que esteja inscrito na elipse  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ? Por que? Se sim, quais as medidas do retângulo?

3. Para produzir  $x$  quilos de um certo produto durante o mês de junho, uma fábrica terá o custo total dado por  $C(x) = 0,0025x^2 + 80x + 10000$  reais. Encontre o nível de produção  $x$  de modo que  $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$  (*Custo médio*) seja mínimo.

4. Uma companhia produz um determinado produto que é vendido a R\$ 13,00 a unidade. O custo total para produzir  $x$  unidades do produto é  $C_t(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$ . Determine a quantidade que deve ser produzida para se obter lucro máximo.

5. Uma empresa aérea determinou que o conteúdo de bagagem de mão de cada passageiro deve caber numa caixa de base quadrada, cuja soma da altura com o perímetro da base não ultrapasse 180 cm. Qual é o maior volume que um passageiro pode levar como bagagem de mão?

6. Um editora de produção decidiu que as páginas de um livro devem ter 1 polegada de margem no topo e no rodapé e  $1/2$  polegada de margem em cada lateral. Ela estipulou ainda que cada página deve ter uma área de 50 polegadas quadradas. Que dimensões deve ter cada página para que a área impressa seja a maior possível?