Lista 1 de MAT 103

Administração Noturno - FEA-USP - 1o. sem. 2011 - Turmas 21 e 22

Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. Ainda sobre a lista 0 e a fatoração

1. Dentre as curvas do exercício 1, da Lista 0, quais representam gráfico de função $y = f(x)$. *Justifique.*

2. Dados $n > 0$ um número natural e a, b, x, y números reais, verifique que:

a. $a^n - b^n \; = \; (a-b)\,(a^{n-1} \,+\, a^{n-2}\,b \,+\, a^{n-3}\,b^2 \,+ \cdots +\, a\,b^{n-2} \,+\, b^{n-1})$

b. $x - y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\,)\;(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\;)$

c. $(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2x+1})\;(\sqrt[3]{4x^2} \;+\; \sqrt[3]{2x}\,\sqrt[3]{2x+1} \;+\; \sqrt[3]{(2x+1)^2}) \;=\; -1$

3. Qual a expressão que deve ser colocada em (...) para que a igualdade esteja verificada? (Nos ítens a e b, use o exercício 2.)

a. $x - 27 = (\sqrt[3]{x} - 3)\;(\;\cdots\;)$

b. $x^2 + x \;=\; (\sqrt{2x^2+1} \;-\; \sqrt{x^2-x+1})\;(\;\cdots\;)$

c. Para $x \neq -3$, $\quad \dfrac{x^3+3x^2+2x+6}{x+3} = (\;\cdots\;)$

II. Sobre funções

1. Determine o domínio e esboce o gráfico das funções:

a. $f(x) = x - |\,x\,|$ **b.** $y = |\,x^2 - 9\,|$ **c.** $g(x) = \sqrt[3]{x}$ **d.** $y = \sqrt{-x}$ **e.** $y = \sqrt{1-x^2}$

f. $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **g.** $y = \dfrac{1}{x} + 2$ **h.** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ **i.** $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+2x+6}{x+3}$

j. $y = -\sqrt{4+x^2}$ **k.** $y = \sqrt{x} + 1$ **l.** $y = \sqrt{x+1}$ **m.** $g(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x < 1 \\ x+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

n. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ 5 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

2. Tente esboçar o gráfico das seguintes funções:

a. $y = x^3 + x$ **b.** $f(x) = x^3 - x^2$

3. *Uma aplicação prática de função dada por várias sentenças:* O cálculo do Imposto de Renda de Pessoa Física (IRPF) devido para desconto no mês de março/2011 é feito da seguinte forma:
Depois de algumas deduções (como gasto com dependente, pensão alimentícia por acordo judicial ou por escritura pública, contribuição à Previdência Social , etc) sobre o total do rendimento mensal chega-se a um valor denominado *base de cálculo ou rendimento tributável.*

Sobre o valor do rendimento tributável aplica-se uma alíquota (em porcentagem) e, do resultado obtido, deduz-se uma parcela fixa. A taxa da alíquota e a parcela a deduzir dependem do valor do rendimento tributável, conforme mostra a tabela abaixo.

Vejamos a tabela:

Rend. Trib. em R$ /	**alíquotas em %**	**parcela a deduzir em R$**
até R$ 1.499,15	isento (ou 0)	0
acima de R$ 1.499,15 e até R$ 2.246,75	7,5%	R$ 112,43
acima de R$ 2.246,15 e até R$ 2.995,70	15%	R$ 280,94
acima de R$ 2.995,70 e até R$ 3.743,19	22,5%	R$ 505,62
acima de R$ 3.743,19	27,5%	R$ 692,78

Seja $IR(x)$ o valor do imposto a ser descontado, em função do rendimento tributável, quando este é de x reais. Dê uma expressão para $IR(x)$, seu domínio e esboce seu gráfico. Qual o papel da parcela a deduzir?

III. Leitura/Interpretação sobre algumas aplicações do conceito de função

A. Demanda de um determinado bem é a quantidade q ($q \geq 0$) desse bem que os consumidores estão dispostos a comprar num certo intervalo de tempo. A demanda depende de várias variáveis, como preço unitário do bem, renda do consumidor, preços de bens substitutos, preferências, etc. Supondo-se que todas as variáveis mantenham-se constantes, exceto o preço p ($p \geq 0$), verifica-se que o preço p relaciona-se com a quantidade demandada q e essa relação entre p e q, pode ser indicada por $p = D(q)$ ou por $q = P(p)$, que são chamadas **função preço** e **função demanda**, respectivamente.

Pensando sobre a relação mencionada acima, parece razoável que a quantidade do bem demandada no mercado se comporte da seguinte forma: quando o preço baixa, os consumidores em geral buscam mais pela compra do referido bem; caso o preço suba, o oposto ocorre.

As equações de demanda (função demanda e função preço) são obtidas através de aplicação de métodos estatísticos aos dados econômicos. Além disso, observa-se também que a representação gráfica da equação de demanda (a chamada *curva de demanda*) é costumeiramente, em Economia, feita elegendo o eixo vertical para representar o preço p e o eixo horizontal para representar a demanda d . Portanto, a curva demanda é o gráfico da função preço $p = f(q)$, que é um exemplo de uma função decrescente.

Nota: Embora na prática a quantidades e preços assumam valores racionais, não negativos, em intervalos fechados ($q \in [0, a]$ e $p \in [0, b]$), com a e b números positivos, é assumido que eles são números reais, não negativos, contidos nesses intervalos.

Oferta é a quantidade q ($q \geq 0$) de um determinado bem que os produtores estão dispostos a oferecer ao preço p ($p \geq 0$) por unidade do bem, num certo intervalo de tempo. A oferta também é dependente de várias variáveis, como preço do bem, preços dos insumos utilizados na produção, tecnologia, etc. Um equação envolvendo apenas as variáveis quantidade q de oferta e preço p de cada unidade é chamada de *equação de oferta*. Numa situação econômica normal, a função $q = O(p)$, chamada de **função oferta**, é crescente, ou seja a quantidade ofertada ao mercado aumenta a medida que o preço aumenta. A curva que representa o preço p em função da quantidade ofertada q é chamada de *curva de oferta*, que informalmente dita é uma curva ascendente.

É dito que um **equilíbrio de mercado** ocorre quando a quantidade demandada do bem é igual à quantidade oferecida àquele preço. Isto é, o equilíbrio de mercado ocorre quando tudo que é oferecido para a venda por um determinado preço é comprado. Portanto em situação de equilíbrio de mercado, a quantidade do bem produzido é chamado de **quantidade de equilíbrio** e o preço do bem é chamado de **preço de equilíbrio**. Dessa forma o equilíbrio de mercado pode ser “ visto ” graficamente como o ponto que tem coordenadas a quantidade de equilíbrio e o preço de equilíbrio; ponto este que é a intersecção da curva de demanda e da curva de oferta (quando ambas estão traçadas no mesmo sistema de eixos) e chamado de **ponto de equilíbrio**. Algebricamente as coordenadas do ponto de equilíbrio são determinadas pela solução do sistema formado pelas equações de demanda e de oferta do mercado.

Denotemos por E o ponto de equilíbrio e por q_E e p_E suas coordenadas que representam, respectivamente, a quantidade de equilíbrio e o preço de equilíbrio. A interpretação que corresponde é que para preços $p > p_E$, há um excedente de ofertas e, portanto, para os produtores se livrarem desse excedente tenderão a diminuir o preço forçando-o em direção ao preço de equilíbrio. No caso em que $p < p_E$, haverá um excesso de demanda que tenderá a fazer com que o preço suba em direção ao preço de equilíbrio. (Tente fazer um esboço genérico da curva de demanda e da curva de oferta para vizualizar estes fatos).

1*. Suponha que as equações de demanda e oferta de mercado de um determinado bem sejam, respectivamente, $q^2 + p^2 - 25 = 0$ e $2q - p + 2 = 0$, onde $p = p(q)$ é o preço do lote e q é um lote com 100 unidades. Determine a quantidade e o preço de equilíbrio. Esboce as curvas de oferta e de demanda, mostrando o ponto E.

2*. Quando um certo produto é vendido ao preço de p reais, a oferta é $O(p) = p - 12$ unidades e a demanda é $D(p) = \dfrac{5740}{p}$. Ache o preço de equilíbrio.

3*. Sabendo-se que o custo mensal total de produção de um certo produto é $C(q) = 2q + 0,01q^2$, onde q denota a quantidade produzida, e que a equação de demanda desse produto é $p = -0,05q + 404$ (onde q é a quantidade demandada quando o preço é p), qual deve ser o preço cobrado para maximizar o lucro se a capacidade máxima de produção é:

a. 2.000 unidades por mês? **b.** 4000 unidades por mês?

4*. Deseja-se construir uma embalagem cilíndrica com $80\,\pi\,\mathrm{cm}^3$ de volume. O custo, por cm^2, para construir a tampa e o fundo de metal é duas vezes o custo, por cm^2, para construir a lateral de papelão. Expresse o custo para construir a embalagem em função de seu raio, dado que o custo da lateral é R$ 0,02 por cm^2.

5*. Um loja compra camisetas a R$ 5,00 a unidade. A loja revende 100 camisetas por mês, cobrando R$ 18,00 por unidade. Para estimular a venda, a loja planeja reduzir o preço de venda. Estima-se que para cada redução de R$ 1,00 no preço, a loja venderá 25 camisetas a mais por mês. Expresse o lucro mensal L em função da quantidade de camisetas vendidas; desenhe o gráfico e estime o preço de venda ótimo.