

Integral definida e Área

Seja f uma função definida e limitada em um intervalo $[a, b]$.

Seja uma divisão do intervalo $[a, b]$ em subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, 2, \dots, n$, onde $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Seja escolha uma $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e denotemos Δx_i o comprimento de cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$.

Para essa subdivisão de $[a, b]$ e essa escolha de c_i , seja a soma $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$.

Dizemos que a função f é **integrável** em $[a, b]$ se o

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \ell \in \mathbb{R}, \text{ para todas as escolhas de } c_i.$$

Tal limite ℓ é chamado de integral definida de f em $[a, b]$ e denotado por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Observação: Nas condições acima, se $f \geq 0$, a integral definida $\int_a^b f(x) dx$ determina a área da região plana delimitada pelas retas $x = a$, $x = b$, pelo eixo x e a curva $y = f(x)$. (**Ver figura no arquivo area.html**). Se $f \leq 0$, então a área da citada região será dada por $\int_a^b (-f(x)) dx$.

Algumas propriedades da Integral definida:

Teorema 1. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$. Então f é integrável em $[a, b]$.

Teorema 2. (*Teorema Fundamental do Cálculo Integral*)

Seja f uma função definida em um intervalo $[a, b]$. Suponha que

- f seja integrável em $[a, b]$ e
- f admita uma primitiva F em $[a, b]$ (isto é, F t.q. $F'(x) = f(x)$).

Então, vale que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

PRIMITIVAÇÃO

1. Definição: Seja f uma função definida em um intervalo I . Dizemos que f admite uma primitiva em I se existir uma função F , definida em I , tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

Uma tal função F é denominada uma **primitiva** de f em I .

2. Definição: $\int f(x) dx = F(x) + k$, onde F é uma primitiva de f e $k \in \mathbb{R}$, é denominada integral indefinida de f ou a família de todas as primitivas de f .

3. Propriedades Operacionais:

• Sejam f e g funções definidas em um intervalo I e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se f e g admitem primitivas F e G , respectivamente, então

i. $F + G$ é uma primitiva de $f + g$ em I e

ii. αF é uma primitiva de αf em I .

Ou seja:

i. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

e

ii. $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$

Algumas primitivas Imediatas

1. $\int \beta du = \beta u + k,$ pois $\frac{d}{du}(\beta u) = \beta.$

2. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,$ se $\alpha \neq -1,$ pois $\frac{d}{du}(u^{\alpha+1}) = (\alpha+1)u^\alpha.$

3. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + k,$ pois $\frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u},$ se $u > 0.$

4. $\int e^u du = e^u + k,$ pois $\frac{d}{du}(e^u) = e^u.$