

I. RESUMO de LIMITES X CONTINUIDADE

1. Noção de Limite (finito):

Sejam f uma função e $x_o \in \mathbb{R}$.

Dizemos que f tem limite (finito) no ponto x_o ou $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, se e somente se,

• para $x \overset{\text{conven}}{\approx} x_o$ e $x \neq x_o$, tivermos que $f(x) \overset{\text{arbitr}}{\approx} \ell$. "Traduzindo"

• Para valores de $x \in \text{Dom } f$ ($x \neq x_o$) convenientemente próximos de x_o , os valores de $y = f(x)$ estão arbitrariamente próximos de ℓ (ou seja, $f(x)$ e ℓ sempre estão tão próximos quanto quisermos um do outro.)

Observ: **O.1.** O $\lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ (limite lateral à direita de f em x_o) significa :

• Se $x \overset{\text{conven}}{\approx} x_o$, e $x > x_o$, então $f(x) \overset{\text{arbitr}}{\approx} \ell_1$

O.2. O $\lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ (limite lateral à esquerda de f em x_o) significa:

• Se $x \overset{\text{conven}}{\approx} x_o$, e $x < x_o$, então $f(x) \overset{\text{arbitr}}{\approx} \ell_2$

O.3. $\left\{ \begin{array}{l} \text{a. Se } \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \text{ então existem } \lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = \ell \\ \text{e } \lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = \ell \\ \text{b. Se } \lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = \ell \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = \ell, \text{ então } \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell \end{array} \right.$

2. Proposição 1. Seja f uma função e $p \in \mathbb{R}$. Então,

a. $\exists \lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se e somente se $\exists \lim_{x \rightarrow p} (f(x) - \ell) = 0$.

b. Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$, então $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = |\ell|$.

3. Definição de continuidade: Sejam f uma função e $p \in \underline{Dom f}$.

- Dizemos que f é contínua em p , se e somente se, $\exists \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.
- Dizemos que uma função é contínua, se ela é contínua em cada ponto do seu domínio.

4. Proposição 2. (propriedades operacionais dos limites) Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, são válidas:

i. $\exists \lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) + \lim_{x \rightarrow p} g(x) = \ell_1 + \ell_2.$

ii. $\exists \lim_{x \rightarrow p} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow p} f(x) = \alpha \ell_1.$

iii. $\exists \lim_{x \rightarrow p} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \lim_{x \rightarrow p} g(x) = \ell_1 \ell_2.$

iv. $\exists \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}{\lim_{x \rightarrow p} g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2},$ desde que $\ell_2 \neq 0.$

5. Observação: **Cuidado** com a distribuição do símbolo de $\lim_{x \rightarrow p}$ na soma, produto e quociente, sem antes testar se existem os limites, no ponto, das funções envolvidas!!!!

6. Proposição 2*. Sejam f e g funções contínuas em $p \in Dom f \cap Dom g$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

- i. As funções $f + g$, αf e fg são contínuas em p .
- ii. A função f/g é contínua em p , desde que $g(p) \neq 0$.

7. Proposição 3. : Sejam f e g funções tais que $Im f \subset D_g$.

Consideremos a função composta $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ e $p \in \mathbb{R}$.

- a. Se $\exists \lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$ e a g é contínua em ℓ , então $\exists \lim_{x \rightarrow p} (g(f(x))) = g(\ell) =$

$$g\left(\lim_{x \rightarrow p} f(x)\right).$$

- b. Se f é contínua em $p \in Dom f$ e g é contínua em $f(p)$, então $g \circ f$ é contínua em p .

8. Observação. Continuam válidas as proposições 1, 2 e 3.a se o símbolo $x \rightarrow p$ for substituído por um dos símbolos $x \rightarrow p^+$ ou por $x \rightarrow p^-$, desde que estejam mantidas as hipóteses.

II. LIMITES INFINITOS X LIMITES NO INFINITO

9. Noção de limite infinito num ponto : Sejam f uma função e $x_o \notin \text{Dom } f$.

- $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = +\infty \iff f(x)$ “cresce ilimitadamente”, quando $x \overset{\text{conven}}{\approx} x_o$.
- $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = -\infty \iff f(x)$ “decrece ilimitadamente”, quando $x \overset{\text{conven}}{\approx} x_o$.

10. Observação: De forma análoga temos as noções de limites laterais infinitos, ou sejam, dos símbolos: $\lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = -\infty$.

11. Proposição 4: *o problema de zero somente no denominador, no limite!!!!*
Sejam $x_o \in \mathbb{R}$ e g uma função tal que $\lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = 0$.

- i. Se $g(x) > 0$ numa vizinhança de x_o e $x \neq x_o$, então $\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{1}{g(x)} = +\infty$.
- ii. Se $g(x) < 0$ numa vizinhança de x_o e $x \neq x_o$, então $\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{1}{g(x)} = -\infty$.

12. Observação: A Proposição 4 é válida para casos dos limites laterais à direita ou à esquerda de x_o , com os correspondentes sinais da função $g(x)$, respectivamente, numa vizinhança à direita ou à esquerda de x_o .

13. Proposição 5: Sejam f uma função e $p \notin \text{Dom } f$. Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), então $\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{f(x)} = 0$.

14. Noção de limite (finito) no infinito: Sejam $\ell \in \mathbb{R}$ e uma função f tal que o $\text{Dom } f$ contém um intervalo $[a, +\infty[$ ou $] -\infty, b]$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff f(x) \overset{\text{arbitr}}{\approx} \ell$, quando x se “torna cada vez maior positivamente”.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \iff f(x) \overset{\text{arbitr}}{\approx} \ell$, quando x se “torna cada vez menor negativamente”.

15. Observação: O.1 As propriedades operacionais da Proposição 2 continuam válidas quando substituímos o símbolo $\lim_{x \rightarrow p}$ por $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty}$.

(O.2.) A Proposição 5 também são válidas se o símbolo $\lim_{x \rightarrow p}$ é trocado por um dos símbolos “ $\lim_{x \rightarrow p^+}$ ”, “ $\lim_{x \rightarrow p^-}$ ”, “ $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ ” ou “ $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ ”.

16. Noção de limite infinito no infinito: Seja f uma função tal que o Dom f contém um intervalo $[a, +\infty[$ ou $] -\infty, b]$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff f(x)$ “cresce ilimitadamente”, quando x se “torna cada vez maior positivamente”.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff f(x)$ “cresce ilimitadamente”, quando x se “torna cada vez menor negativamente”.
- Analogamente, tem-se a noção de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

17. Proposição 6. (Operando com limites infinitos) sejam f e g funções. Valem as afirmações:

- a. Se $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = +\infty \end{cases}$ então $\begin{cases} i. \lim_{x \rightarrow p^+} (f(x) + g(x)) = +\infty \\ ii. \lim_{x \rightarrow p^+} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty; \end{cases}$
- b. Se $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = -\infty \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = -\infty \end{cases}$ então $\begin{cases} i. \lim_{x \rightarrow p^+} (f(x) + g(x)) = -\infty \\ ii. \lim_{x \rightarrow p^+} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty; \end{cases}$
- c. Se $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = -\infty \end{cases}$ então $\lim_{x \rightarrow p^+} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty;$
- d. Se $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \ell \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = +\infty \end{cases}$ então $\begin{cases} i. \lim_{x \rightarrow p^+} (f(x) + g(x)) = +\infty \\ ii. \lim_{x \rightarrow p^+} (f(x) \cdot g(x)) = + \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell > 0 \\ -\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases} \end{cases}$
- e. Se $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \ell \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = -\infty \end{cases}$ então $\begin{cases} i. \lim_{x \rightarrow p^+} (f(x) + g(x)) = -\infty \\ ii. \lim_{x \rightarrow p^+} (f(x) \cdot g(x)) = + \begin{cases} -\infty & \text{se } \ell > 0 \\ +\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases} \end{cases}$

18. Observações:

O.a. As afirmações da Proposição 6 continuam válidas se o símbolo “ $x \rightarrow p^+$ ” for substituído por um dos símbolos:

“ $x \rightarrow p^-$ ”, “ $x \rightarrow p$ ”, “ $x \rightarrow +\infty$ ” ou “ $x \rightarrow -\infty$ ”.

O.b. As Proposições 2, 4 e 6 mostram que os seguintes “símbolos” são indeterminações:

“ $0 \cdot (\pm\infty)$ ”, “ $+\infty - (+\infty)$ ”, “ $-\infty - (-\infty)$ ”, “ $\frac{0}{0}$ ”, “ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ”

O.c. Mais tarde, veremos que também são indeterminações, no limite, os símbolos:

“ 0^0 ”, “ ∞^0 ”, “ 1^∞ ”.