

EXERCÍCIOS

Capítulo
02 - livros
Zucchi / Maria
Elisa

1. Sendo F, G, H transformações do plano, provar que:
 - a) se $G \circ F = H \circ F$ então $G = H$;
 - b) se $G \circ F = G \circ H$ então $F = H$;
 - c) se $G \circ F = F$ então $G = Id$;
 - d) se $G \circ F = G$ então $F = Id$;
 - e) se $G \circ F = Id$ então $G = F^{-1}$ e $F = G^{-1}$;
 - f) $F^2 = F \circ F = Id$ se e somente se $F^{-1} = F$.
2. Sendo F e G duas transformações do plano, provar que :
 - a) $G \circ F$ é uma transformação ;
 - b) $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.
3. Sendo F, G transformações do plano, a transformação $F \circ G \circ F^{-1}$ é chamada a **conjugada de G por F** . Provar que:
 - a) a conjugada da inversa de G por F é a inversa da conjugada de G por F ;
 - b) F e G comutam se e somente se uma delas é a conjugada de si mesma pela outra;
 - c) a conjugada de $G \circ H$ por F é a composta da conjugada de G por F com a conjugada de H por F .
4. Sendo F uma colinação do plano e r, s retas paralelas do plano, provar que $F(r)$ e $F(s)$ são também retas paralelas, isto é, toda colinação do plano preserva paralelismo.
5. Sendo F uma colinação do plano e r uma reta arbitrária do plano, será verdade que $F(r)$ e r são retas paralelas? No caso afirmativo, provar. No

caso negativo, apresentar um contra-exemplo. Comparar este exercício com o anterior.

6. Sendo F uma transformação do plano e n um número natural definimos $F^n = F \circ F \circ \dots \circ F$ (n fatores), $F^0 = Id$ e $F^{-n} = (F^{-1})^n$. Provar que:

- a) F^n é uma transformação e $(F^n)^{-1} = (F^{-1})^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$;
- b) $F^n \circ F^m = F^{n+m}$ e $(F^n)^m = F^{mn}$, quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{Z}$.

7. Seja F uma isometria do plano tal que $F(P) = Q$ e $F(Q) = P$, onde P e Q são pontos distintos dados. Mostrar que F fixa o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$.

8. Mostrar que toda isometria do plano preserva a distância de ponto a reta, isto é, dados uma isometria F do plano, uma reta r e um ponto P , provar que a distância entre P e r é igual à distância entre $P' = F(P)$ e $r' = F(r)$.

9. Se F é uma isometria do plano e S é uma circunferência de centro P e raio d , provar que $F(S)$ é uma circunferência de centro $F(P)$ e raio d .

Se S for uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, o que podemos dizer a respeito de $F(S)$?

10. Seja F uma isometria do plano, P e Q pontos simétricos em relação à uma reta r do plano (isto é, r é a reta mediatriz do segmento $\overline{PQ}$). Provar que $P' = F(P)$ e $Q' = F(Q)$ são pontos simétricos em relação à reta $F(r)$.

11. Seja F uma transformação do plano. Provar que F é uma colinação se e somente se as imagens, por F , de três pontos não colineares são três pontos não colineares.