MAP2223 – Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações
Lista 5
2º semestre de 2024 – Prof. Claudio H. Asano

1 Transformada de Laplace

1.1 Utilize a Transformada de Laplace para resolver a equação $Y'' + Y = t$. $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -2$.

Resp: De $\mathcal{L}(Y'') + \mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(t)$, segue que $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + y(s) = \frac{1}{s^2}$ de modo que $y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}$. Assim, $Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right) = t + \cos t - 3\,\mathrm{sen}\, t$.

1.2 Utilize a Transformada de Laplace para resolver a equação $Y'' + Y' - 2Y = 2t$. $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$.

Resp: $\mathcal{L}(Y''+Y'-2Y) = \mathcal{L}(2t)$ segue que $(s^2y(s) - sY(0) - Y'(0)) + (sy(s) - Y(0)) - 2y(s) = 2\frac{1}{s^2}$, de modo que $y(s) = \frac{2+s^2}{s^2(s+2)(s-1)} = \frac{-1/2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1}{s-1}$ por frações parciais. Assim $Y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t$.

1.3 Encontre a Transformada de Laplace da função $f(t) = \mathrm{senh}(bt)$ calculando diretamente a integral $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$. Justifique.

Resp: $\dfrac{b}{s^2 - b^2}$

1.4 Encontre a transformada inversa de Laplace da função $F(s) = \dfrac{2 + (s-2)(3-2s)}{(s-2)(s+2)(s-3)}$. Justifique sua resposta.

Resp: $-\dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{13}{10}e^{-2t} - \dfrac{1}{5}e^{3t}$

1.5 Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial $y'' - 4y = 2e^{3t}$, sujeito a $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$. Justifique.

Resp: $y = -\dfrac{1}{4}e^{2t} + \dfrac{17}{20}e^{-2t} + \dfrac{2}{5}e^{3t}$

1.6 Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, sujeito a $y(0) = -1$ e $y'(0) = -4$. Justifique.

Resp: De $(s^2 - 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s-3} - s - 1$, obtemos por frações parciais

$$Y(s) = \frac{5}{2}\frac{1}{(s-1)} - 4\frac{1}{(s-2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-3)}$$

e assim

$$y(t) = \frac{5}{2}e^t - 4e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

1.7 Calcule a transformada de Laplace de $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ t+2, & t \ge 1 \end{cases}$. Expresse a resposta em termos da função da função escada $u_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < c \\ 1, & \text{se } t \ge c \end{cases}$. Justifique.

Resp: $1 + u_1(t)(t+1)$; $\dfrac{1}{s} + e^{-s}\left(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{s}\right)$

1.8 Calcule a transformada de Laplace de $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ t^2, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$. Expresse a resposta em termos da função da função escada $u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c \\ 1 & \text{se } t \geq c \end{cases}$. Justifique.

Resp: Como

$$\begin{aligned} f(t) &= t + u_1(t)(t^2 - t) - u_2(t)t^2 \\ &= t + u_1(t)\big((t-1+1)^2 - (t-1+1)\big) - u_2(t)(t-2+2)^2 \\ &= t + u_1(t)\big((t-1)^2 + (t-1)\big) - u_2(t)\big((t-2)^2 + 4(t-2) + 4\big) \end{aligned}$$

obtemos $F(s) = \dfrac{1}{s^2} + e^{-s}\left(\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{1}{s^2}\right) - e^{-2s}\left(\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{4}{s^2} + \dfrac{4}{s}\right)$

1.9 Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial $y'' + y = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 4 \\ 2t - 5, & t \geq 4 \end{cases}$, sujeito a $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Justifique.

Resp: Começamos escrevendo $f(t) = 3u_0(t) + (2t-8)u_4(t) = 3u_0(t) + 2(t-4)u_4(t)$. Da equação, temos

$$(s^2 + 1)Y(s) = s + 3\left(\frac{1}{s}\right) + 2e^{-4s}\frac{1}{s^2}$$

e por frações parciais,

$$Y(s) = 3\frac{1}{s} - 2\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + 2e^{-4s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$y(t) = 3 - 2\cos(t) + 2u_4(t)\big((t-4) - \operatorname{sen}(t-4)\big)$$

1.10 Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial $y'' - 5y' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$, sujeito a $y(0) = 3$ e $y'(0) = -5$. Justifique.

Resp: $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{31}{12}e^{4t} + \dfrac{16}{3}e^{t} + u_1(t)\left(\dfrac{2}{3}e^{t-1} - \dfrac{1}{6}e^{4(t-1)} - \dfrac{1}{2}\right) + u_2(t)\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}e^{4(t-2)} - \dfrac{1}{3}e^{t-2}\right)$

1.11 Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial $y'' + 9y = \begin{cases} \cos(t), & 0 \le t < \dfrac{3\pi}{2} \\ \operatorname{sen}(t), & t \ge \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$, sujeito a $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Justifique.

Resp: Primeiro escrevemos $f(t) = u_0(t)\cos(t) + u_{3\pi/2}(t)\big(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)\big)$. Usando que $\operatorname{sen}(t) = -\cos(t - 3\pi/2)$ e $\cos(t) = \operatorname{sen}(t - 3\pi/2)$, obtemos

$$f(t) = u_0(t)\cos(t) - u_{3\pi/2}(t)\big(\cos(t - 3\pi/2) + \operatorname{sen}(t - 3\pi/2)\big).$$

Da equação, temos

$$(s^2 + 9)Y(s) = \frac{s}{s^2+1} - e^{-(3\pi/2)s}\left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right)$$

e, por frações parciais,

$$Y(s) = \frac{1}{8}\frac{s}{(s^2+1)} - \frac{1}{8}\frac{s}{(s^2+9)} - e^{-(3\pi/2)s}\left(\frac{1}{8}\frac{s}{(s^2+1)} - \frac{1}{8}\frac{s}{(s^2+9)} + \frac{1}{8}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{8}\frac{1}{s^2+9}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{8}\cos(t) - \frac{1}{8}\cos(3t) \\ &\quad - u_{3\pi/2}(t)\left(\frac{1}{8}\cos(t - 3\pi/2) - \frac{1}{8}\cos\big(3(t - 3\pi/2)\big) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(t - 3\pi/2) - \frac{1}{8}\frac{\operatorname{sen}\big(3(t - 3\pi/2)\big)}{3}\right) \end{aligned}$$

Usamos agora $\cos\big(3(t - 3\pi/2)\big) = \operatorname{sen}(3t)$ e $\operatorname{sen}\big(3(t - 3\pi/2)\big) = -\cos(3t)$ para obter

$$y(t) = \frac{1}{8}\big(\cos(t) - \cos(3t)\big) + \frac{1}{8}u_{3\pi/2}(t)\big(\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(3t) - \cos(t) - \frac{1}{3}\cos(3t)\big)$$

1.12 Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial $y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ -1, & t \ge 2 \end{cases}$, sujeito a $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Justifique.

Resp: Primeiro escrevemos $f(t) = u_0(t) - 2u_2(t)$ e da equação, temos

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-2s}\frac{2}{s}$$

e, por frações parciais,

$$Y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)} - e^{-2s}\left(\frac{1}{s} - 2\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{s+2}\right)$$

e daí

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - u_2(t)\big(1 - 2e^{-(t-2)} + e^{-2(t-2)}\big)$$

1.13 Encontre uma fórmula para a solução do problema de valor inicial $y'' + \omega^2 y = f(t)$, sujeito a $y(0) = k_0$ e $y'(0) = k_1$. Justifique.

Resp: Da equação, temos

$$(s^2 + \omega^2)Y(s) = sk_0 + k_1 + F(s)$$

e assim

$$Y(s) = k_0\frac{s}{s^2+\omega^2} + k_1\frac{1}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{(s^2+\omega^2)}F(s)$$

Portanto

$$y(t) = k_0\cos(\omega t) + \frac{k_1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t f(t-\tau)\operatorname{sen}(\omega\tau)\,d\tau.$$

1.14 Resolva o problema de valor inicial $y''+y = \operatorname{sen}(3t)+2\delta(t-\pi/2)$, sujeito a $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$, com a transformada de Laplace. Justifique sua resposta.

Resp: Da equação, temos

$$(s^2+1)Y(s) = s-1+\frac{3}{s^2+9}+2e^{(-\pi/2)s}$$

e, por frações parciais,

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{3}{8}\frac{1}{(s^2+1)}-\frac{3}{8}\frac{1}{(s^2+9)}+2e^{(-\pi/2)s}\frac{1}{s^2+1}$$

Portanto

$$y(t) = \cos(t)-\operatorname{sen}(t)+\frac{3}{8}\operatorname{sen}(t)-\frac{3}{8}\frac{\operatorname{sen}(3t)}{3}+2u_{\pi/2}(t)\operatorname{sen}(t-\pi/2)$$

$$y(t) = \cos(t)-\frac{5}{8}\operatorname{sen}(t)-\frac{1}{8}\operatorname{sen}(3t)-2u_{\pi/2}(t)\cos(t).$$

1.15 Resolva o problema de valor inicial $y''+y' = e^t+3\delta(t-6)$, sujeito a $y(0) = -1$ e $y'(0) = 4$, com a transformada de Laplace. Justifique sua resposta.

Resp: Da equação obtemos

$$(s^2+s)Y(s) = -s+3+\frac{1}{s-1}+3e^{-6s}$$

e por frações parciais,

$$2\left(\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)}-\frac{7}{2}\frac{1}{(s+1)}+3e^{-6s}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)$$

$$y(t) = 2+\frac{1}{2}e^t-\frac{7}{2}e^{-t}+3u_6(t)\big(1-e^{-(t-6)}\big)$$

1.16 Resolva o problema de valor inicial $2y''-3y'-2y = 1+\delta(t-2)$, sujeito a $y(0) = -1$ e $y'(0) = 2$, com a transformada de Laplace. Justifique sua resposta.

Resp: $y = \frac{7}{10}e^{2t}-\frac{6}{5}e^{-t/2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}u_2(t)\left(e^{2(t-2)}-e^{-(t-2)/2}\right)$

Tabela de Transformadas de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$, $s > 0$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$. $s > 0$
t^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
t^p, $p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$t^n e^{at}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c \\ 1 & \text{se } t \geq c \end{cases}$	$\frac{e^{-cs}}{s}$, $s > 0$
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$, $c > 0$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau$	$F(s)G(s)$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)\, du$
$f(t)$ periódica de período $T > 0$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-sT}}$
$f'(t) + f(0)\delta(t)$	$sF(s)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$