MAP2223 – Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Lista 4

2º semestre de 2024 – Prof. Claudio H. Asano

1 Sistemas de Equações Diferenciais I

Nos exercícios a seguir, há uma base de autovetores. A dimensão de cada autoespaço corresponde à multiplicidade algébrica do autovalor correspondente.

1.1 Encontre a solução geral para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} y$.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$

1.2 Encontre a solução geral para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} y$.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$

1.3 Encontre a solução geral para o sistema $y' = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -8 \\ -4 & 0 & -4 \\ -8 & -4 & -6 \end{bmatrix} y$.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-16t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$

1.4 Encontre a solução geral para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & -4 & 10 \\ -6 & 1 & -7 \end{bmatrix} y$.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + C_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-5t}$

1.5 Resolva o problema de valor inicial $y' = \begin{bmatrix} 21 & -12 \\ 24 & -15 \end{bmatrix} y$, sujeito a $y(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Resp: $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} e^{9t} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-3t}$

1.6 Resolva o problema de valor inicial $y' = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} y$, sujeito a $y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Resp: $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} e^{5t} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-5t}$

1.7 Resolva o problema de valor inicial $y' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 11 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} y$, sujeito a $y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Resp: $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} e^{4t}$

1.8 Resolva o problema de valor inicial $y' = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} y$, sujeito a $y(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Resp: $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-6t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix} e^{4t}$

2 Sistemas de Equações Diferenciais II

Nestes exercícios, a multiplicidade de algum autovalor não corresponde à dimensão do autoespaço correspondente.

2.1 Encontre a solução geral para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} y$.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + C_2 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t \right) e^{5t}$

2.2 Encontre a solução geral para o sistema $y' = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -1 & -11 \end{bmatrix} y$.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-9t} + C_2 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \right) e^{-9t}$

2.3 Encontre a solução geral para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} y$.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t} + C_3 \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t \right) e^{4t}$

2.4 Encontre a solução para o sistema $y' = \begin{bmatrix} -11 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} y$, sujeito a $y(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Resp: $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-7t} - \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} te^{-7t}$

2.5 Encontre a solução para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 15 & -9 \\ 16 & -9 \end{bmatrix} y$, sujeito a $y(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Resp: $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} e^{3t} - \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix} te^{3t}$

2.6 Encontre a solução para o sistema $y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} y$, sujeito a $y(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$.

Resp: $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} te^{-2t}$

2.7 A matriz dos coeficientes do sistema abaixo tem um autovalor com multiplicidade 3 e autoespaço associado com dimensão 1.

$$y' = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} y$$

Encontre a solução geral.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + C_2 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{4} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \right) e^{6t} + C_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{8} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{4} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} \right) e^{6t}$

2.8 A matriz dos coeficientes do sistema abaixo tem um autovalor com multiplicidade 3 e autoespaço associado com dimensão 2.

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & -12 & 8 \\ 1 & -9 & 4 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix} y$$

Encontre a solução geral.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + C_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \right) e^{-3t}$

3 Sistemas de Equações Diferenciais III

Nestes exercícios, há autovalores complexos.

3.1 Encontre a solução geral para o sistema $y' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} y$.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} 3\cos t + \operatorname{sen} t \\ 5\cos t \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 3\operatorname{sen} t - \cos t \\ 5\operatorname{sen} t \end{bmatrix} e^{2t}$

3.2 Encontre a solução geral para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} y$.

Resp: $C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} \cos 2t - \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t + \operatorname{sen} 2t \\ 2\cos 2t \end{bmatrix} e^{4t} + C_3 \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 2t + \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t - \cos 2t \\ 2\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} e^{4t}$

3.3 Encontre a solução para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} y$, sujeito a $y(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Resp: $\begin{bmatrix} 5\cos 3t + \operatorname{sen} 3t \\ 2\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t \end{bmatrix} e^{t}$

3.4 Encontre a solução para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} y$, sujeito a $y(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Resp: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 3\cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t - 3\operatorname{sen} t \\ 4\cos t - 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix} e^{4t}$

4 Sistemas de Equações Diferenciais IV

4.1 Utilize variação de parâmetros para encontrar uma solução particular para o sistema $y' = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 21e^{4t} \\ 8e^{-3t} \end{bmatrix}$.

Resp: $y_p = \begin{bmatrix} 5e^{4t} + e^{-3t}(2+8t) \\ -e^{4t} - e^{-3t}(1-4t) \end{bmatrix}$

4.2 Utilize variação de parâmetros para encontrar uma solução particular para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$.

Resp: $y_p = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 - 6t \\ -11 + 3t \end{bmatrix}$

4.3 Utilize variação de parâmetros para encontrar uma solução particular para o sistema $y' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix}$.

Resp: $y_p = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3e^t + 4 \\ 6e^t - 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

4.4 Utilize variação de parâmetros para encontrar uma solução particular para o sistema $y' = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-5t} \\ e^t \end{bmatrix}$.

Resp: $y_p = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} e^t(1+12t) - e^{-5t}(1+6t) \\ -2e^t(1-6t) - e^{-5t}(1-12t) \\ e^t(1+12t) - e^{-5t}(1+6t) \end{bmatrix}$