

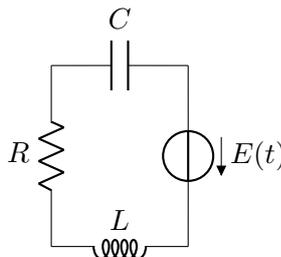
# MAP2223 – Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

## Lista 3

2º semestre de 2024 – Prof. Claudio H. Asano

### 1 Aplicações das Equações Diferenciais de Segunda Ordem

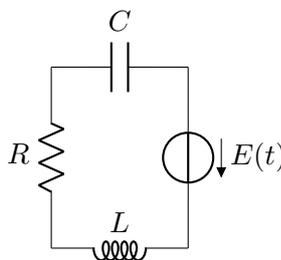
1.1 Considere o circuito RLC em série a seguir:



A equação diferencial que rege a carga  $Q$  no capacitor é dada por  $LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)$ , sujeito a  $Q(t_0) = Q_0$  e  $Q'(t_0) = I(t_0) = I_0$ , onde  $Q_0$  e  $I_0$  são, respectivamente, a carga inicial no capacitor e a corrente inicial. Suponha que o capacitor seja de  $0.5 \times 10^{-1}$  F, o resistor de  $25 \Omega$  e o indutor de 5 H. O capacitor se encontra descarregado e no instante  $t = 0$ , conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de  $10e^{-t/4}$  V e o circuito é fechado. Determine a carga do capacitor para todo  $t > 0$ .

<b>Resp:</b> $Q(t) = -\frac{8}{9}e^{-t} + \frac{8}{45}e^{-4t} + \frac{32}{45}e^{-t/4}$
--

1.2 A corrente  $I$  que circula no circuito RLC em série



obedece a equação diferencial  $LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$ , sujeito a  $I(t_0) = I_0$  e  $I'(t_0) = I'_0 = \frac{E(t_0) - RI_0 - (1/C)Q_0}{L}$ , onde  $I_0$  e  $Q_0$  são, respectivamente, a corrente e a carga inicial no capacitor. Suponha que o capacitor seja de  $0.125 \times 10^{-1}$  F, o resistor de  $60 \Omega$  e o indutor de 10 H. A carga inicial do capacitor é zero e no instante  $t = 0$ , conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de 12 V e o circuito é fechado. Determine a corrente no circuito para todo  $t > 0$ .

<b>Resp:</b> $I(t) = \frac{3}{5}e^{-2t} - \frac{3}{5}e^{-4t}$
---

1.3 Um circuito LC em série tem um capacitor de  $0.25 \times 10^{-6}$  F e um indutor de 1 H. Se a carga inicial no capacitor for  $10^{-6}$  C e se a corrente inicial for nula, achar a carga do capacitor em qualquer instante  $t$ .

<b>Resp:</b> $Q = 10^{-6} \cos(2000t)$ C, com $t$ em s.
---

- 1.4 Um circuito RLC em série tem um capacitor de  $10^{-5}$  F, um resistor de  $3 \times 10^2 \Omega$  e um indutor de 0.2 H. A carga inicial no capacitor é  $10^{-6}$  C e não há corrente inicial. Achar a carga do capacitor em qualquer instante  $t$ .

**Resp:**  $Q = 10^{-6}(2e^{-500t} - e^{-1000t})$  C, com  $t$  em s.

- 1.5 A posição de um certo sistema massa-mola satisfaz ao problema de valor inicial  $\frac{3}{2}u'' + ku = 0$ , sujeito a  $u(0) = 2$  e  $u'(0) = v$ . Se o período e a amplitude do movimento são 3 e  $\pi$ , respectivamente, determine os valores de  $k$  e  $v$ .

**Resp:**  $k = 6$  e  $v = \pm 2\sqrt{5}$ .

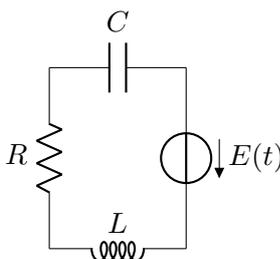
- 1.6 A posição de um certo sistema massa-mola satisfaz ao problema de valor inicial  $u'' + \frac{1}{4}u' + 2u = 0$ , sujeito a  $u(0) = 0$  e  $u'(0) = 2$ . Encontre a solução  $u$ .

**Resp:**  $u = \frac{16}{\sqrt{127}}e^{-t/8} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{127}}{8}t\right)$

- 1.7 Considere um sistema oscilatório descrito pela equação diferencial  $u'' + \frac{1}{4}u' + 2u = 2 \cos(\omega t)$ , sujeito a  $u(0) = 0$  e  $u'(0) = 2$ . Encontre a parte estacionária da solução.

**Resp:**  $u = \frac{32(2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 8\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{16\omega^4 - 63\omega^2 + 64}$

- 1.8 É dado o circuito RLC em série



onde  $E(t) = U \cos(\omega t) + V \operatorname{sen}(\omega t)$ , com  $U$  e  $V$  constantes. Mostre que a corrente no estado estacionário é dada por  $I(t) = \frac{R\omega^2 E(t) + (1/C - L\omega^2)E'(t)}{\Delta}$ , onde  $\Delta = (1/C - L\omega^2)^2 + R^2\omega^2$ .

- 1.9 Um tanque contém inicialmente 100 galões de salmoura, na qual 50 libras de sal estão dissolvidas. Uma salmoura contendo 2 lb/gal de sal é despejada no tanque a uma taxa de 5 gal/min. A mistura é mantida uniforme ao ser agitada e sai do tanque a uma taxa de 4 gal/min.

- A que taxa (libras por minuto) o sal entra no tanque no instante  $t$ ?
- Qual é o volume de salmoura no instante  $t$ ?
- A que taxa (libras por minuto) o sal sai do tanque no instante  $t$ ?
- Escreva e resolva o problema de valor inicial que descreve o processo de mistura.
- Ache a concentração de sal no tanque 25 minutos após o início do processo.