MAP2223 – Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Lista 2

2º semestre de 2024 – Prof. Claudio H. Asano

1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

- 1.1 Utilize a mudança de variável $y = vx$, $dy = v dx + x dv$ para transformar a equação diferencial homogênea $(-4x + 2y) dx + (-5x + y) dy = 0$ em outra de variáveis separáveis.

Resp: $\frac{1}{x} dx = \frac{-v+5}{v^2-3v-4} dv$

- 1.2 Resolva a equação diferencial homogênea $(2x - 6y) dx + (3x + y) dy = 0$.

Resp: Use a mudança de variável $y = vx$, $dy = v dx + x dv$ e obtenha a equação diferencial separável $\frac{1}{x} dx = \frac{-v-3}{v^2-3v+2} dv$. Faça a fatoração do denominador como $(v-2)(v-1)$ e use frações parciais $\frac{-v-3}{v^2-3v+2} = \frac{A}{(v-2)} + \frac{B}{(v-1)}$ com $A = -5$ e $B = 4$. Integre, simplifique e obtenha $|y-2x|^5|y-x|^{-4} = C$

- 1.3 Resolva a equação diferencial homogênea $(6x - 2y) dx + (-5x + y) dy = 0$.

Resp: Use a mudança de variável $y = vx$, $dy = v dx + x dv$ e obtenha a equação diferencial separável $\frac{1}{x} dx = \frac{-v+5}{v^2-7v+6} dv$. Faça a fatoração do denominador como $(v-6)(v-1)$ e use frações parciais $\frac{-v+5}{v^2-7v+6} = \frac{A}{(v-6)} + \frac{B}{(v-1)}$ com $A = -\frac{1}{5}$ e $B = -\frac{4}{5}$. Integre, simplifique e obtenha $|y-6x||y-x|^4 = C$

- 1.4 Resolva a equação diferencial $y' = x(1 - y^2)$.

Resp: $y = \frac{Ce^{x^2}-1}{Ce^{x^2}+1}$

- 1.5 Resolva implicitamente a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y + \cos y}$ e encontre a solução desta equação que satisfaz $y(1) = \pi$.

Resp: $\frac{y^2}{2} + \text{sen}(y) = \frac{x^3}{3} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{3}$

- 1.6 Utilize um fator integrante para resolver as equações diferenciais abaixo.

(a) $y' + 2y = e^x$

Resp: fator integrante e^{2x} e $y = \frac{e^x}{3} + Ce^{-2x}$.

(b) $y' = x + 3y$

Resp: fator integrante e^{-3x} e $y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9} + Ce^{3x}$.

(c) $y' - 2xy = x$

Resp: fator integrante e^{-x^2} e $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$.

(d) $xy' + 2y = e^{x^2}$

Resp: fator integrante x^2 e $y = \frac{e^{x^2}}{2x^2} + \frac{C}{x^2}$.

- 1.7 Encontre a solução da equação diferencial linear $y' + y = -6x + 2e^{6x}$, $y(0) = 5$.

Resp: Um fator integrante é e^x e a solução é $y = -6x + 6 + \frac{2}{7}e^{6x} - \frac{9}{7}e^{-x}$

1.8 Resolva os problemas de valor inicial a seguir.

(a) $y' + y = x + e^x, y(0) = 0$

Resp: fator integrante e^x , solução geral $y = x - 1 + \frac{e^x}{2} + Ce^{-x}$, solução $y = x - 1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(b) $xy' + 2y = x^3, y(1) = 0, x > 0$

Resp: fator integrante x^2 , solução geral $y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}$, solução $y = \frac{x^3}{5} - \frac{1}{5x^2}$

(c) $y' - 2xy = 3x^2e^{x^2}, y(0) = 1$

Resp: fator integrante e^{-x^2} , solução geral $y = (x^3 + C)e^{x^2}$, solução $y = (x^3 + 1)e^{x^2}$

1.9 Uma equação diferencial $M dx + N dy = 0$ é exata se $M_y = N_x$. Decida se a equação diferencial $(-12x^2y^3 + 6) dx + (-12x^3y^2 - 12y) dy = 0$ é exata e encontre uma solução.

Resp: $F = -4x^3y^3 - 6y^2 + 6x = C$

1.10 Decida se cada equação diferencial abaixo é exata e, em seguida, resolva-as.

(a) $(x + y + 1) dx - (y - x + 3) dy = 0$

Resp: $M_y = 1 = N_x$, solução geral $F = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + x - 3y = C$

(b) $(2x^3 + 3y) dx + (3x + y - 1) dy = 0$

Resp: $M_y = 3 = N_x$, solução geral $F = \frac{x^4}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y = C$

(c) $(4x^3y^3 - 2xy) dx + (3x^4y^2 - x^2) dy = 0$

Resp: $M_y = 12x^3y^2 - 2x = N_x$, solução geral $F = x^4y^3 - x^2y = C$

(d) $(\cos y + y \cos x) dx + (\sin x - x \sin y) dy = 0$

Resp: $M_y = \cos x - \sin y = N_x$, solução geral $F = x \cos y + y \sin x = C$

(e) $(1 + e^{2y}) dx + 2xe^{2y} dy = 0$

Resp: $M_y = 2e^{2y} = N_x$, solução geral $F = x + xe^{2y} = C$

(f) $(4x^3y^3 + \frac{1}{x}) dx + (3x^4y^2 - \frac{1}{y}) dy = 0$

Resp: $M_y = 12x^3y^2 = N_x$, solução geral $F = x^4y^3 + \ln|x| - \ln|y| = C$

1.11 Considere uma equação diferencial $M dx + N dy = 0$ não necessariamente exata. Mostre que se

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ for uma função somente de x então $e^{\int f(x) dx}$ é um fator integrante e que se $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = g(y)$ for uma função somente de y então $e^{-\int g(y) dy}$ é um fator integrante.

1.12 Utilize um fator integrante conveniente para resolver a equação diferencial $(-3x + 6y) dx - 3x dy = 0$

Resp: Como $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-3}{x}$ depende só de x , temos que x^{-3} é um fator integrante. A solução é $F = 3x^{-1} - 3x^{-2}y = C$

1.13 Utilize um fator integrante conveniente para resolver a equação diferencial $-6y dx + (4x - y) dy = 0$

Resp: Como $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-5}{3y}$ depende só de y , temos que $y^{-\frac{5}{3}}$ é um fator integrante. A solução é $F = -6xy^{-\frac{2}{3}} - 3y^{\frac{1}{3}} = C$

1.14 Encontre um fator integrante (se apropriado) para as equações abaixo e resolva-as.

(a) $y dx - x dy = 0$

Resp: Como $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2}{x}$ depende só de x , temos que x^{-2} é um fator integrante. A solução é $F = -\frac{y}{x} = C$.

(b) $2y^3 dx + 3y^2 dy = 0$

Resp: Como $\frac{M_y - N_x}{N} = 2$ é constante, temos que e^{2x} é um fator integrante. A solução é $F = y^3 e^{2x} = C$.

(c) $(x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0$

Resp: Como $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$ depende só de x , temos que x é um fator integrante. A solução é $F = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} = C$.

(d) $(2y - 3x) dx + x dy = 0$

Resp: Como $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$ depende só de x , temos que x é um fator integrante. A solução é $F = x^2 y - x^3 = C$.

(e) $(x - y^2) dx + 2xy dy = 0$

Resp: Como $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2}{x}$ depende só de x , temos que x^{-2} é um fator integrante. A solução é $F = \ln|x| + \frac{y^2}{x} = C$.

(f) $(2xy^3 - 2x^3y^3 - 4xy^2 + 2x) dx + (3x^2y^2 + 4y) dy = 0$

Resp: Como $\frac{M_y - N_x}{N} = -2x$ depende só de x , temos que e^{-x^2} é um fator integrante. A solução é $F = (x^2 y^3 + 2y^2 - 1)e^{-x^2} = C$.

(g) $x^2 y^3 dx + (3x^2 y^2 + x^2 y^3 + 1) dy = 0$

Resp: Como $\frac{N_x - M_y}{M} = 1$ é constante, temos que e^y é um fator integrante. A solução é $F = (x^2 y^3 + 1)e^y = C$.

1.15 Uma *Equação de Bernoulli* é uma equação diferencial do tipo $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$. Mostre que se $n \neq 0$ e $n \neq 1$ então a mudança de variáveis $u = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli na equação linear $\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$.

Resp: Se $u = y^{1-n}$ então $u' = (1-n)y^{-n}y'$. Multiplicando-se a equação original $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ por $(1-n)y^{-n}$, obtemos $(1-n)y^{-n}y' + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$ que corresponde a $u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$, como queríamos.

1.16 Resolva as equações de Bernoulli abaixo.

(a) $xy' + y = -xy^2$

Resp: Como $n = 2$, fazemos a mudança de variável $u = y^{-1}$ e a equação se torna $\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 1$ com fator integrante $\frac{1}{x}$. A solução é $u = x \ln x + Cx$ e portanto $y = \frac{1}{x \ln x + Cx}$.

(b) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$

Resp: Como $n = 3$, fazemos a mudança de variável $u = y^{-2}$ e a equação se torna $\frac{du}{dx} - \frac{4u}{x} = -\frac{2}{x^2}$ com fator integrante x^{-4} . A solução é $u = \frac{2}{5x} + Cx^4$ e portanto $y = \left(\frac{2}{5x} + Cx^4\right)^{-1/2}$.

(c) $y' + y = xy^3$

Resp: Como $n = 3$, fazemos a mudança de variável $u = y^{-2}$ e a equação se torna $\frac{du}{dx} - 2u = -2x$ com fator integrante e^{-2x} . A solução é $u = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$ e portanto $y = \left(x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}\right)^{-1/2}$.

2 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

2.1 Verifique se $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = e^{5x}$ são soluções de $y'' - 7y' + 10y = 0$. Mostre que qualquer combinação linear de y_1 e y_2 também é uma solução da equação.

2.2 Verifique se $y_1 = e^x \cos x$ e $y_2 = e^x \sin x$ são soluções de $y'' - 2y' + 2y = 0$. Mostre que qualquer combinação linear de y_1 e y_2 também é uma solução da equação. Encontre uma solução y tal que $y(0) = 3$ e $y'(0) = -2$.

Resp: $y = 3e^x \cos x - 5e^x \sin x$

2.3 Verifique se $y_1 = e^x$ e $y_2 = xe^x$ são soluções de $y'' - 2y' + y = 0$. Mostre que qualquer combinação linear de y_1 e y_2 também é uma solução da equação. Encontre uma solução y tal que $y(0) = 7$ e $y'(0) = 4$.

Resp: $y = 7e^x - 3xe^x$

2.4 Resolva a equação diferencial $y'' + y' - 12y = 0$.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12$ com raízes $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 3$. A solução geral é $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{3x}$.

2.5 Encontre a solução da equação diferencial $y'' - 2y' - 15y = 0$, sujeito às condições $y(0) = 2$ e $y'(0) = -22$.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 15$, com raízes $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 5$. A solução geral é $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{5x}$. A solução é $y = 4e^{-3x} - 2e^{5x}$.

2.6 Resolva a equação diferencial $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$ com raiz dupla $\lambda = 5$ e a solução geral é $y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}$.

2.7 Encontre a solução da equação diferencial $y'' + 6y' + 9y = 0$, sujeito às condições $y(0) = 2$ e $y'(0) = -3$.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$, com raiz $\lambda = -3$ dupla e solução geral $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$. A solução é $y = 2e^{-3x} + 3xe^{-3x}$.

2.8 Resolva a equação diferencial $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 25$ com raízes $\lambda = 3 \pm 4i$. Deste modo, a solução geral é $y = C_1e^{3x} \cos(4x) + C_2e^{3x} \sin(4x)$.

2.9 Resolva a equação diferencial $y''' + y = 0$.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 + 1$ com raízes $\lambda_1 = -1$ e $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. A solução geral é $y = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

2.10 Resolva a equação diferencial $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$ com raiz $\lambda = -1$ tripla. Assim $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}$.

2.11 Encontre a solução da equação diferencial $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, sujeito às condições $y(0) = 6$, $y'(0) = 3$ e $y''(0) = 9$.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$, com raízes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$ e a solução geral é $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$. A solução é $y = 3e^{2x} + 2e^{-x} + e^x$.

2.12 Determine a , b e c reais (caso existam) de modo que $y = ax^2 + bx + c$ seja solução da equação diferencial $y'' - 3y' + y = 2x^2 - 15x + 18$.

Resp: $y = 2x^2 - 3x + 5$

- 2.13 Encontre primeiro uma solução particular y_p da equação diferencial $y'' + 4y' - 5y = -15x^2 + 14x + 19$ e, em seguida, calcule a solução geral.

Resp: Uma solução particular é $y_p = 3x^2 + 2x - 1$, o polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 5$ com raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -5$. A solução geral é $y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2e^{-5x} + 3x^2 + 2x - 1$

- 2.14 Utilize o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação diferencial $y'' - 2y' = e^x \sin(x)$ e determine a solução geral.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$ com raízes $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$. Assim $y_1 = 1$ e $y_2 = e^{2x}$ são 2 soluções linearmente independentes da equação homogênea. Uma solução particular é da forma $y_p = L_1y_1 + y_2L_2$, onde $L_1'y_1 + L_2'y_2 = 0$ e $L_1'y_1' + L_2'y_2' = e^x \sin(x)$. Assim $L_1' = -\frac{e^x \sin(x)}{2}$ e $L_2' = \frac{e^{-x} \sin(x)}{2}$ e portanto $L_1 = \frac{e^x(\cos(x) - \sin(x))}{4}$, $L_2 = -\frac{e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))}{4}$, $y_p = -\frac{e^x \sin(x)}{2}$ e $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{e^x \sin(x)}{2}$.

- 2.15 Utilize o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação diferencial $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$ e determine a solução geral.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ com raízes $\lambda = -1$ e $\lambda = -2$. Assim $y_1 = e^{-x}$ e $y_2 = e^{-2x}$ são 2 soluções linearmente independentes da equação homogênea. Uma solução particular é da forma $y_p = L_1y_1 + y_2L_2$, onde $L_1'y_1 + L_2'y_2 = 0$ e $L_1'y_1' + L_2'y_2' = \frac{1}{1+e^x}$. Assim $L_1' = \frac{e^x}{1+e^x}$ e $L_2' = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}$ e portanto $L_1 = \ln(1 + e^x)$, $L_2 = \ln(1 + e^x) - e^x$, $y_p = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1 + e^x) - e^{-x}$ e $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1 + e^x)$.

- 2.16 Utilize o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação diferencial $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$ e determine a solução geral.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$ com raiz dupla $\lambda = 3$. Assim $y_1 = e^{3x}$ e $y_2 = xe^{3x}$ são 2 soluções linearmente independentes da equação homogênea. Uma solução particular é da forma $y_p = L_1y_1 + y_2L_2$, onde $L_1'y_1 + L_2'y_2 = 0$ e $L_1'y_1' + L_2'y_2' = \frac{e^{3x}}{x^2}$. Assim $L_1' = \frac{1}{x}$ e $L_2' = \frac{1}{x^2}$ e portanto $L_1 = -\ln|x|$, $L_2 = -\frac{1}{x}$, $y_p = -e^{3x}(\ln|x| + 1)$ e $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} - e^{3x} \ln|x|$.

- 2.17 Utilize o método da variação dos parâmetros para encontrar a solução geral da equação diferencial $y'' + 4y = \sin(2x)$.

Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$ com raízes complexas conjugadas $\lambda = \pm 2i$ e soluções da equação homogênea dadas por $y_1 = \cos(2x)$ e $y_2 = \sin(2x)$. Uma solução particular é da forma $y_p = L_1y_1 + y_2L_2$, onde $L_1'y_1 + L_2'y_2 = 0$ e $L_1'y_1' + L_2'y_2' = \sin(2x)$. Assim $L_1' = -\frac{\sin^2(2x)}{2}$ e $L_2' = \frac{\sin(2x)\cos(2x)}{2}$ e portanto $L_1 = -\frac{x}{4} + \frac{\sin(2x)\cos(2x)}{8}$, $L_2 = \frac{\sin^2(2x)}{8}$, $y_p = -\frac{x \cos(2x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{8}$ e $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(2x) - \frac{x \cos(2x)}{4}$.