MAP2223 – Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Lista 1

2º semestre de 2024 – Prof. Claudio H. Asano

1 Classificação das Equações Diferenciais

1.1 Classifique as equações diferenciais a seguir.

(a) $y'' + 3y' - y = 0$

Resp: EDO linear de 2ª ordem

(b) $y' - xy = x^2$

Resp: EDO linear de 1ª ordem

(c) $y'' + y'y - x = 0$

Resp: EDO não linear de 2ª ordem

(d) $(y')^2 - y^2 = x^2$

Resp: EDO não linear de 1ª ordem

(e) $u_{xy} + u_{yy} = x^2 + y^2$

Resp: EDP linear de 2ª ordem

(f) $u_{xx} - uu_y = 0$

Resp: EDP não linear de 2ª ordem

1.2 Mostre que $y = \dfrac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$ é uma solução geral da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

1.3 Utilize a questão anterior para encontrar a solução da equação $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisfaz $y(0) = 2$.

Resp: $c = \frac{1}{3}$

1.4 Mostre que $y = 2 + e^{-x^3}$ é uma solução particular da equação diferencial $y' + 3x^2y = 6x^2$.

1.5 Verifique que se $y = \dfrac{2 + \ln x}{x}$ é uma solução do problema de valor inicial $x^2y' + xy = 1$, sujeito a $y(1) = 2$.

1.6 Encontre os valores para a de modo que $y = \operatorname{sen}(ax)$ seja uma solução da equação diferencial $y'' + 4y = 0$.

Resp: $a = \pm 2$

1.7 Uma população P é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 2P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

(a) Para quais valores de P temos $\dfrac{dP}{dt} \geq 0$?

Resp: $0 \leq P \leq 1000$

(b) Para quais valores de P a população é crescente?

Resp: $0 < P < 1000$

(c) Para quais valores de P a população é decrescente?

Resp: $P > 1000$

1.8 Uma função $y(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 5y^3 + 6y^2.$$

(a) Para quais valores de y tem-se $\dfrac{dy}{dt} = 0$?

Resp: $y = 0$, $y = 2$ e $y = 3$

(b) Quais são as soluções constantes dessa equação?

Resp: $y = 0$, $y = 2$ e $y = 3$

(c) Para quais valores de y a solução é crescente?

Resp: $y < 0$, $0 < y < 2$ e $y > 3$

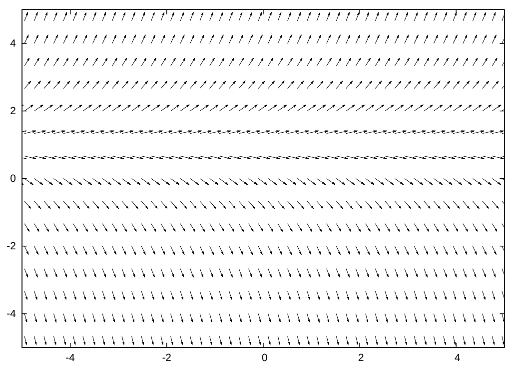
(d) Para quais valores de y a solução é decrescente?

Resp: $2 < y < 3$

1.9 Esboce o campo de direções de cada equação diferencial abaixo.

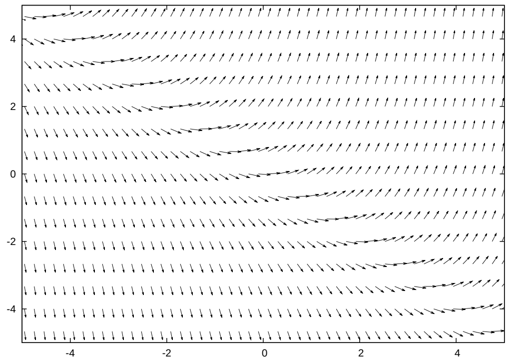
(a) $y' = y - 1$

Resp:



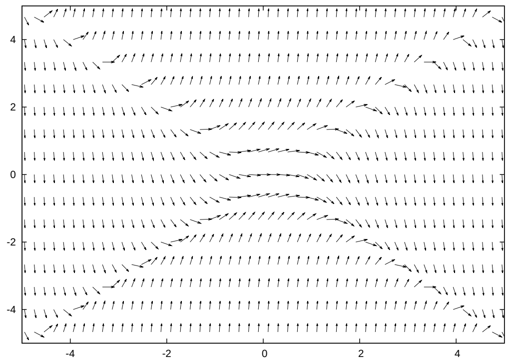
(b) $y' = y + x$

Resp:



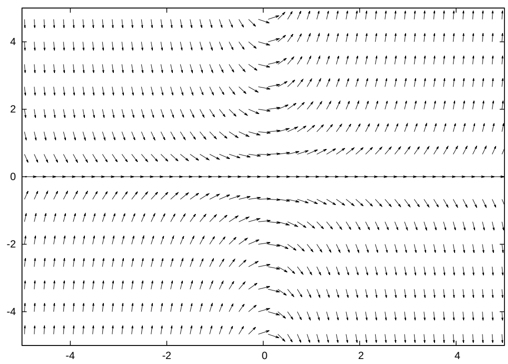
(c) $y' = y^2 - x^2$

Resp:



(d) $y' = xy$

Resp:



1.10 Resolva a equação diferencial $y' = 2x + 1$ sujeito a $y(0) = 1$.

Resp: $y = x^2 + x + 1$

1.11 Encontre a solução geral da equação diferencial dada.

(a) $y' = x^2 y$

Resp: $y = Ce^{x^3/3}$

(b) $y' = \dfrac{x}{y}$, $y \neq 0$

Resp: $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$

(c) $y' = \dfrac{y}{x}$, $x > 0$

Resp: $y = Cx$

(d) $y' = \dfrac{e^{2x}}{4y^3}$, $y > 0$

Resp: $y = \sqrt[4]{\frac{e^{2x}}{2} + C}$

1.12 A equação diferencial logística $\dfrac{dP}{dt} = kP(1-P/N)$ pode ser utilizada para modelar a propagação de rumores ou fofocas em uma população. Em uma cidade com N habitantes, a taxa de variação $\frac{dP}{dt}$ da quantidade de pessoas P que sabem sobre o rumor é proporcional ao produto de P pela fração de pessoas que ainda não ouviram o rumor. Sua solução é dada por $P(t) = \frac{N}{1+Ae^{-kt}}$, onde $A = \dfrac{N - P(0)}{P(0)}$. Mostre que $P(t)$ de fato resolve a equação diferencial logística. Calcule $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$.

1.13 Suponha que, em uma cidadezinha com 1000 habitantes, às 8:00h tenhamos 80 pessoas sabendo de uma história particularmente escabrosa ($k = 0.08$) sobre a filha do prefeito. Utilize o exercício anterior para encontrar quantas pessoas sabem da história às 10:00h.

Resp: $P(t) = \frac{1000}{1+(11.5)e^{-0.08t}}$ e $P(2) \simeq 92.60$. Assim aproximadamente 92 pessoas sabem da história às 10:00h.

1.14 O número de indivíduos y de uma determinada população varia conforme a EDO

$$y' = 0.02(y-10)(10000-y)$$

Determine y em função do tempo x, sabendo-se que a população inicial é $y(0) = 9$. Calcule em quanto tempo a população se extinguirá.

1.15 Esboce os gráficos das soluções de

$$y' = y(10-y)(50-y).$$

1.16 Cinqüenta gramas de um nutriente estão sendo utilizados por uma colônia de bactérias a uma taxa proporcional à quantidade de nutriente presente. Escreva uma equação diferencial que descreve a quantidade de nutriente.

Resp: $y' = -ky$, $k > 0$, $y(0) = 50$.

1.17 A taxa de variação da pressão em relação à temperatura em determinado sistema físico é proporcional à pressão e inversamente proporcional ao quadrado da temperatura. Escreva uma equação diferencial que descreve este fenômeno físico.

Resp: $p' = k\frac{p}{t^2}$

1.18 Dizemos que uma família a um parâmetro $y = y_C(x)$ provém de uma equação diferencial se ela corresponder a uma solução geral dessa equação. Dada a família a um parâmetro $y = Ce^{2x}$, mostre que ela provém da equação diferencial $y' = 2y$.

Resp: $y' = (Ce^{2x})' = 2Ce^{2x} = 2y$

1.19 Mostre que a família a dois parâmetros $y = ae^x + b$ provém da equação diferencial $y'' = y'$.

Resp: $y' = ae^x$ e $y'' = ae^x$

1.20 Encontre uma equação diferencial que está associada à família $y = e^{x+a}$.

Resp: $y' = y$

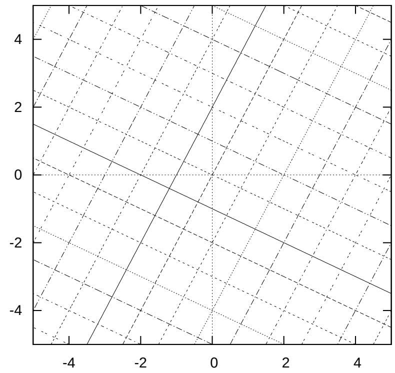
1.21 Encontre uma equação diferencial que está associada à família $y = c \operatorname{sen} x$.

Resp: $y' = y \operatorname{cotan} x$

1.22 Encontre as trajetórias ortogonais às famílias de curvas dadas. Faça o esboço correspondente.

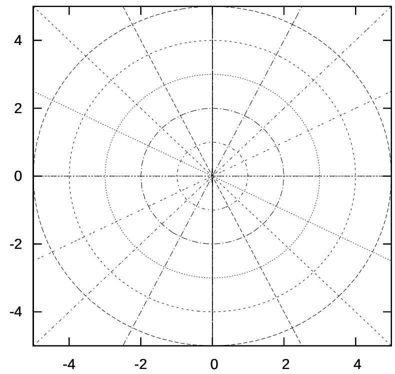
(a) $x + 2y = k$, retas paralelas.

Resp: A equação diferencial é $\frac{dy}{dx} = 2$ com solução geral $y = 2x + C$, retas paralelas.



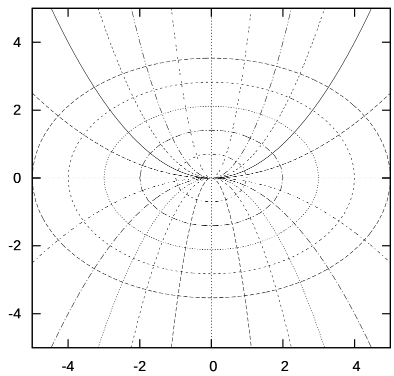
(b) $y = mx$, retas que passam pela origem.

Resp: A equação diferencial é $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ com solução geral $x^2 + y^2 = C$, circunferências concêntricas.



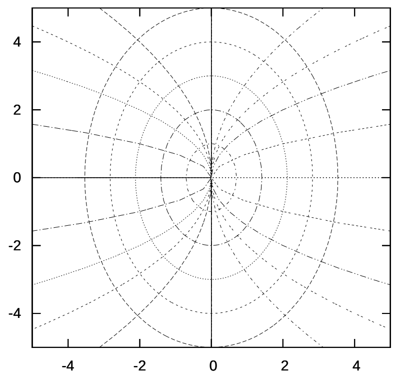
(c) $y = kx^2$, parábolas que passam pela origem.

Resp: A equação diferencial é $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$ com solução geral $2y^2 + x^2 = C$, elipses.



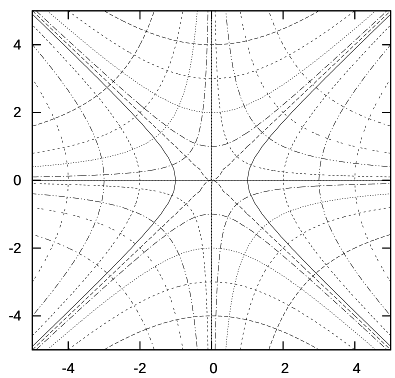
(d) $y^2 = kx$, parábolas que passam pela origem.

Resp: A equação diferencial é $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$ com solução geral $y^2 + 2x^2 = C$, elipses.



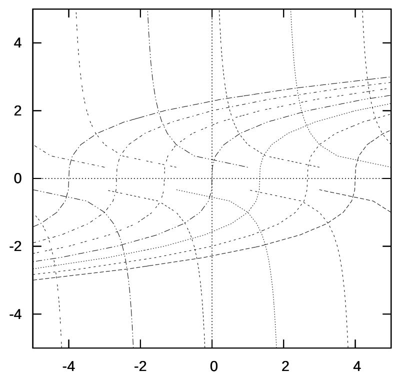
(e) $x^2 - y^2 = k$, hipérboles.

Resp: A equação diferencial é $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ com solução geral $xy = C$, hipérboles.



(f) $y = \dfrac{1}{x+k}$, hipérboles transladadas.

Resp: A equação diferencial é $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}$ com solução geral $y^3 - 3x = C$, cúbicas.



(g) $y = ke^{-x}$, exponenciais.

Resp: A equação diferencial é $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$ com solução geral $y^2 - 2x = C$, parábolas transladadas.