MAP2110 Modelagem e Matemática

Prova 2

1º semestre de 2010 – Prof. Claudio H. Asano

1. Encontre a distância entre as retas $r_1 : \begin{cases} x &= -2-5t \\ y &= 6-6t \\ z &= 5-t \end{cases}$ e $r_2 : \dfrac{-2-x}{3} = \dfrac{-3-y}{6} = \dfrac{1-z}{3}$

   Resp: A distância é $\frac{5\sqrt{3}}{3} = 2.89$

2. Encontre um vetor diretor para a reta que passa pelo ponto $A = (2, 3, 2)$ e que intercepta as retas $r_1 : \begin{cases} x &= 2+4t \\ y &= -3-4t \\ z &= 4+5t \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x &= 6+4s \\ y &= -1+s \\ z &= 5-s \end{cases}$.

   Resp: Como r_1 e r_2 têm direções diferentes, a reta procurada é a intersecção do plano π_1 que contém A e r_1 com o plano π_2 que contém A e r_2. Assim, $\vec{v} = -28\vec{\imath} + 58\vec{\jmath} - 45\vec{k}$.

3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 28 & -6 \\ 135 & -29 \end{bmatrix}$, calcule A^{2010}.

   Resp: autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$, autovetores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$, diagonalização $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ e $A^{2010} = (PDP^{-1})^{2010} = PD^{2010}P^{-1} =$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^{2010} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9(-2)^{2010} + 10 & -2(1-(-2)^{2010}) \\ 45(1-(-2)^{2010}) & 10(-2)^{2010} - 9 \end{bmatrix}$

4. Determine e esboce a cônica de equação $39x^2 - 96xy + 11y^2 + 25 = 0$. Justifique sua resposta.

   Resp: $A = \begin{bmatrix} 39 & -48 \\ -48 & 11 \end{bmatrix}$, autovalores $\lambda_1 = -25$ e $\lambda_2 = 75$, autovetores ortonormais $v_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$. A mudança de variável é $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, e a equação se torna $(x')^2 - 3(y')^2 = 1$. A cônica é uma hipérbole com eixo principal na direção de $\vec{v}_1$.

5. Encontre a expressão geral para a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada pela projeção ortogonal de um ponto $P(x, y, z)$ sobre o plano $\pi : x + y - z = 0$.

   Resp: Solução 1: O vetor normal é $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e dois vetores diretores são $f_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Como $T(f_1) = 0$, $T(f_2) = f_2$ e $T(f_3) = f_3$, segue que $[T]_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $[T]_E =$ $M_E^F [T]_F M_F^E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

Resp: Solução 2: calculamos a projeção ortogonal $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \sim a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sobre os vetores diretores f_2 e f_3, com sistema normal $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y \\ x+z \end{bmatrix}$ e solução $a = \frac{-x+2y+z}{3}$ e $b = \frac{x+y+2z}{3}$. Deste modo, a projeção ortogonal é $\dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2x-y+z \\ -x+2y+z \\ x+y+2z \end{bmatrix}$

Resp: Solução 3: A origem O pertence ao plano π. Se Q é a projeção ortogonal de P sobre π então $\overrightarrow{QP} = \operatorname{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP}$. Assim $Q = P - \operatorname{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP} = P - \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = (x, y, z) - \frac{x+y-z}{3} (\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}) = \left(\frac{2x-y+z}{3}, \frac{-x+2y+z}{3}, \frac{x+y+2z}{3} \right)$.