MAP2110 Matemática e Modelagem
Folha de Estudos 5
1º semestre de 2010 – Prof. Claudio H. Asano

1. Determine a transformação linear definida por $T(1,-2) = -2$ e $T(1,-3) = -1$.

   Resp: $[T] = \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix}$ ou $T(x,y) = -4x - y$

2. Determine a transformação linear definida por $T(1,-1) = (1,3)$ e $T(-2,3) = (2,3)$. Esboce a ação de T em $\mathbb{R}^2$.

   Resp: $[T] = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$ ou $T(x,y) = (5x + 4y, 12x + 9y)$

3. Encontre a transformação linear em $\mathbb{R}^2$ definida pela reflexão em torno da reta $ax + by = 0$, com $ab \neq 0$.

4. Encontre a transformação linear em $\mathbb{R}^2$ definida pela projeção ortogonal sobre a reta $ax + by = 0$, com $ab \neq 0$.

5. Seja E uma matriz 2×2 elementar qualquer. Descreva as possíveis ações de E sobre $\mathbb{R}^2$.

6. Dadas as matrizes A abaixo, encontre seus autovalores com respectivos autovetores.

   (a) $A = \begin{bmatrix} -9 & -24 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

   Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$. O autovalor $\lambda = -1$ tem autovetor $(-3,1)$. O autovalor $\lambda = 3$ tem autovetor $(-2,1)$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

   Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda$. O autovalor $\lambda = -3$ tem autovetor $(2,1)$. O autovalor $\lambda = 0$ tem autovetor $(1,1)$.

   (c) $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

   Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$. O autovalor $\lambda = -3$ tem autovetor $(2,1)$. O autovalor $\lambda = -2$ tem autovetor $(1,1)$.

   (d) $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   Resp: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$. O autovalor $\lambda = -2$ tem autovetor $(1,0)$. O autovalor $\lambda = -1$ tem autovetor $(-2,1)$.

7. Para cada matriz abaixo, encontre uma matriz ortogonal P para a qual $P^{-1}AP$ seja diagonal.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

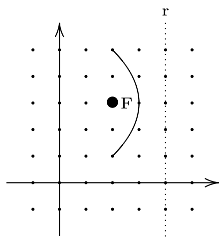
8. Diagonalize as formas quadráticas abaixo, indicando as mudanças de coordenadas correspondentes.

   (a) $Q(x,y) = x^2 + 4xy - 2y^2$ (b) $Q(x,y) = 5x^2 + 8xy - y^2$

9. Encontre o vértice, o foco e a diretriz das parábolas abaixo e em seguida esboce seus gráficos.

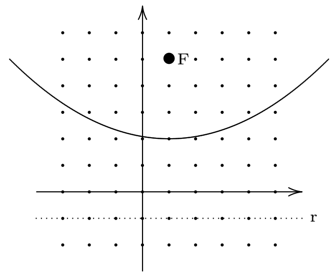
(a) $\left(y-3\right)^2 = -4(x-3)$

Resp: $-y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$, $p = -1$, centro $(3,3)$, vértice $(3,3)$, foco $(2,3)$, diretriz $x = 4$.



(b) $\left(x-1\right)^2 = 12(y-2)$

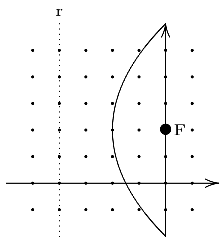
Resp: $x^2 - 2x - 12y + 25 = 0$, $p = 3$, centro $(1,2)$, vértice $(1,2)$, foco $(1,5)$, diretriz $y = -1$.



10. Encontre o vértice, o foco e a diretriz das parábolas abaixo e em seguida esboce seus gráficos.

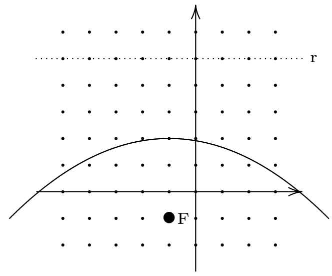
(a) $-y^2 + 8x + 4y + 12 = 0$

Resp: $\left(y-2\right)^2 = 8(x+2)$, $p = 2$, centro $(-2,2)$, vértice $(-2,2)$, foco $(0,2)$, diretriz $x = -4$.



(b) $x^2 + 2x + 12y - 23 = 0$

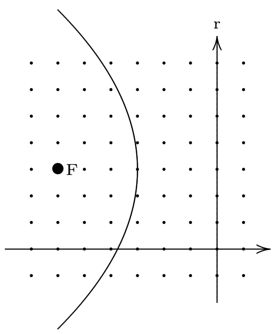
Resp: $\left(x+1\right)^2 = -12(y-2)$, $p = -3$, centro $(-1,2)$, vértice $(-1,2)$, foco $(-1,-1)$, diretriz $y = 5$.



11. Escreva as equações das parábolas com

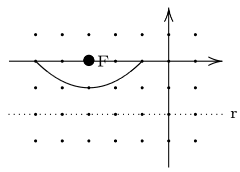
(a) vértice $(-3,3)$ e foco $(-6,3)$.

Resp: equação normal: $\left(y-3\right)^2 = -12(x+3)$, equação $-y^2 - 12x + 6y - 45 = 0$, $p = -3$, diretriz $x = 0$.



(b) foco $(-3,0)$ e diretriz $y = -2$.

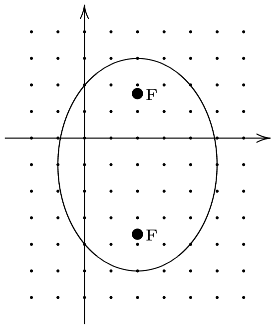
Resp: equação normal: $\left(x+3\right)^2 = 4(y+1)$, equação $x^2 + 6x - 4y + 5 = 0$, $p = 1$, vértice $(-3,-1)$.



12. Encontre os focos e os vértices das elipses abaixo e em seguida esboce seus gráficos.

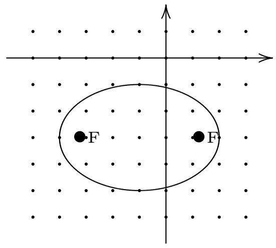
(a) $\dfrac{\left(x-2\right)^2}{9} + \dfrac{\left(y+1\right)^2}{16} = 1$

Resp: $16x^2 + 9y^2 - 64x + 18y - 71 = 0$, $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{7}$, centro $(2, -1)$, vértices $(2, -5)$ e $(2, 3)$, focos $(2, -1 \pm \sqrt{7})$, eixo principal vertical, excentricidade $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.



(b) $\dfrac{\left(x+1\right)^2}{9} + \dfrac{\left(y+3\right)^2}{4} = 1$

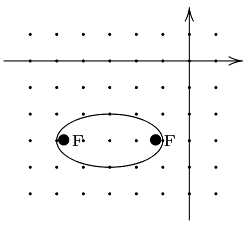
Resp: $4x^2 + 9y^2 + 8x + 54y + 49 = 0$, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$, centro $(-1, -3)$, vértices $(-4, -3)$ e $(2, -3)$, focos $(-1 \pm \sqrt{5}, -3)$, eixo principal horizontal, excentricidade $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



13. Encontre os focos e os vértices das elipses abaixo e em seguida esboce seus gráficos.

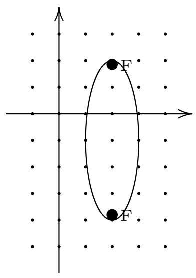
(a) $x^2 + 4y^2 + 6x + 24y + 41 = 0$

Resp: $\dfrac{\left(x+3\right)^2}{4} + \left(y+3\right)^2 = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, centro $(-3, -3)$, vértices $(-5, -3)$ e $(-1, -3)$, focos $(-3 \pm \sqrt{3}, -3)$, eixo principal horizontal, excentricidade $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



(b) $9x^2 + y^2 - 36x + 2y + 28 = 0$

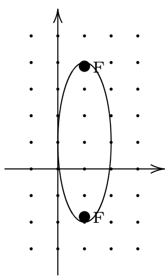
Resp: $\left(x-2\right)^2 + \dfrac{\left(y+1\right)^2}{9} = 1$, $a = 3$, $b = 1$, $c = 2\sqrt{2}$, centro $(2, -1)$, vértices $(2, -4)$ e $(2, 2)$, focos $(2, -1 \pm 2\sqrt{2})$, eixo principal vertical, excentricidade $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.



14. Escreva as equações das elipses com

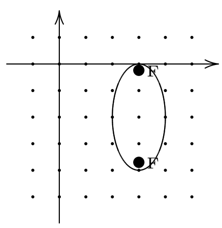
(a) vértices $(1, -2)$ e $(1, 4)$ e focos $(1, 1 \pm 2\sqrt{2})$.

Resp: equação normal: $\left(x-1\right)^2 + \dfrac{\left(y-1\right)^2}{9} = 1$, equação $9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0$, $a = 3$, $b = 1$, $c = 2\sqrt{2}$, centro $(1, 1)$, eixo principal vertical.



(b) vértices $(3, -4)$ e $(3, 0)$ e focos $(3, -2 \pm \sqrt{3})$.

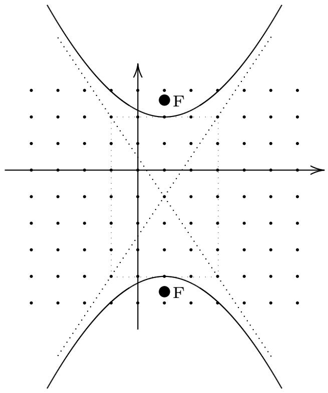
Resp: equação normal: $\left(x-3\right)^2 + \dfrac{\left(y+2\right)^2}{4} = 1$, equação $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$, $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, centro $(3, -2)$, eixo principal vertical.



15. Encontre os focos, os vértices e as assíntotas das hipérboles abaixo e em seguida esboce seus gráficos.

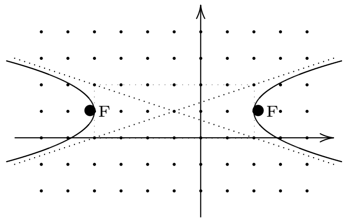
(a) $-\dfrac{\left(x-1\right)^2}{4}+\dfrac{\left(y+1\right)^2}{9}=1$

Resp: $-9x^2+4y^2+18x+8y-41=0$, $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{13}$, centro $(1,-1)$, vértices $(1,-4)$ e $(1,2)$, focos $(1,-1\pm\sqrt{13})$, eixo principal vertical e assíntotas $\frac{x-1}{2}=\pm\frac{y+1}{3}$, excentricidade $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$.



(b) $\dfrac{\left(x+1\right)^2}{9}-\left(y-1\right)^2=1$

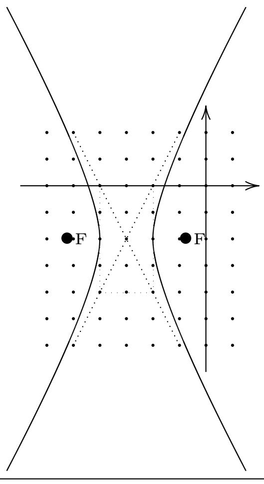
Resp: $x^2-9y^2+2x+18y-17=0$, $a=3$, $b=1$, $c=\sqrt{10}$, centro $(-1,1)$, vértices $(-4,1)$ e $(2,1)$, focos $(-1\pm\sqrt{10},1)$, eixo principal horizontal e assíntotas $\frac{x+1}{3}=\pm\frac{y-1}{1}$, excentricidade $e=\frac{\sqrt{10}}{3}$.



16. Encontre os focos, os vértices e as assíntotas das hipérboles abaixo e em seguida esboce seus gráficos.

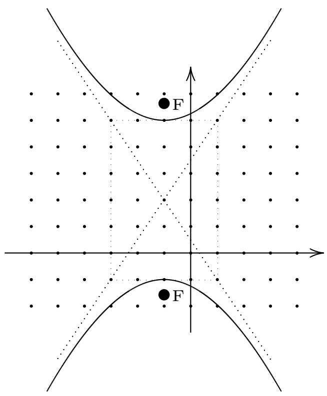
(a) $4x^2-y^2+24x-4y+28=0$

Resp: $\left(x+3\right)^2-\dfrac{\left(y+2\right)^2}{4}=1$, $a=1$, $b=2$, $c=\sqrt{5}$, centro $(-3,-2)$, vértices $(-4,-2)$ e $(-2,-2)$, focos $(-3\pm\sqrt{5},-2)$, eixo principal horizontal e assíntotas $\frac{x+3}{1}=\pm\frac{y+2}{2}$, excentricidade $e=\sqrt{5}$.



(b) $-9x^2+4y^2-18x-16y-29=0$

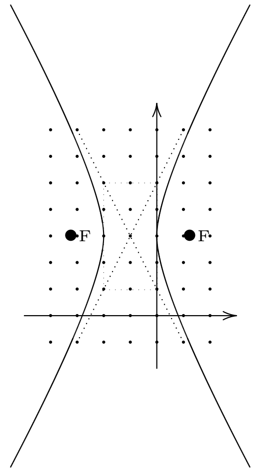
Resp: $-\dfrac{\left(x+1\right)^2}{4}+\dfrac{\left(y-2\right)^2}{9}=1$, $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{13}$, centro $(-1,2)$, vértices $(-1,-1)$ e $(-1,5)$, focos $(-1,2\pm\sqrt{13})$, eixo principal vertical e assíntotas $\frac{x+1}{2}=\pm\frac{y-2}{3}$, excentricidade $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$.



17. Escreva as equações das hipérboles com

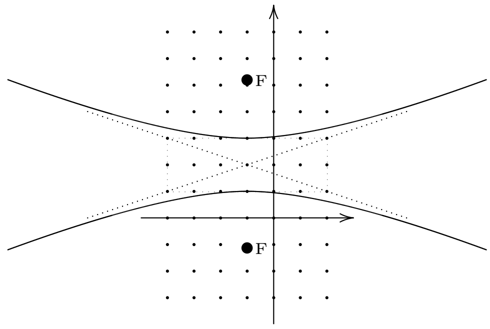
(a) vértices $(-2, 3)$ e $(0, 3)$ e focos $(-1 \pm \sqrt{5}, 3)$.

Resp: equação normal: $\left(x+1\right)^2 - \dfrac{\left(y-3\right)^2}{4} = 1$, equação $4x^2 - y^2 + 8x + 6y - 9 = 0$, $a = 1$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$, centro $(-1, 3)$, eixo principal horizontal e assíntotas $\frac{x+1}{1} = \pm\frac{y-3}{2}$.



(b) vértices $(-1, 1)$ e $(-1, 3)$ e focos $(-1, 2 \pm \sqrt{10})$.

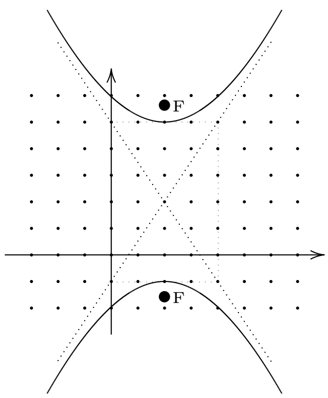
Resp: equação normal: $-\dfrac{\left(x+1\right)^2}{9} + \left(y-2\right)^2 = 1$, equação $-x^2 + 9y^2 - 2x - 36y + 26 = 0$, $a = 1$, $b = 3$, $c = \sqrt{10}$, centro $(-1, 2)$, eixo principal vertical e assíntotas $\frac{x+1}{3} = \pm\frac{y-2}{1}$.



18. Determine e esboce a cônica dada pela equação

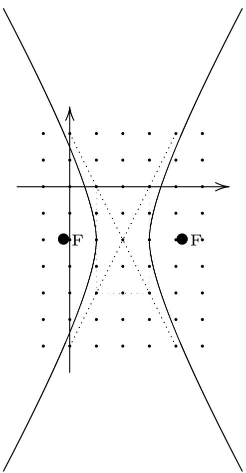
(a) $-9x^2 + 4y^2 + 36x - 16y - 56 = 0$.

Resp: hipérbole: $-\dfrac{\left(x-2\right)^2}{4} + \dfrac{\left(y-2\right)^2}{9} = 1$, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{13}$, centro $(2, 2)$, vértices $(2, -1)$ e $(2, 5)$, focos $(2, 2 \pm \sqrt{13})$, eixo principal vertical e assíntotas $\frac{x-2}{2} = \pm\frac{y-2}{3}$, excentricidade $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$.



(b) $4x^2 - y^2 - 16x - 4y + 8 = 0$.

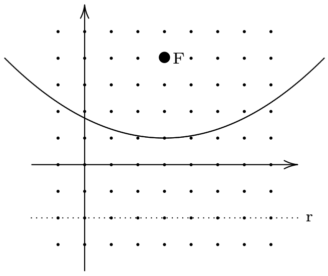
Resp: hipérbole: $\left(x-2\right)^2 - \dfrac{\left(y+2\right)^2}{4} = 1$, $a = 1$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$, centro $(2, -2)$, vértices $(1, -2)$ e $(3, -2)$, focos $(2 \pm \sqrt{5}, -2)$, eixo principal horizontal e assíntotas $\frac{x-2}{1} = \pm\frac{y+2}{2}$, excentricidade $e = \sqrt{5}$.



19. Escreva as equações das cônicas com

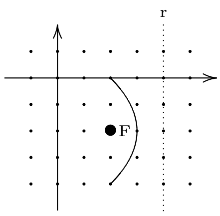
(a) vértice $(3,1)$ e foco $(3,4)$.

Resp: parábola: $(x-3)^2 = 12(y-1)$, equação $x^2 - 6x - 12y + 21 = 0$, $p = 3$, centro $(3,1)$, diretriz $y = -2$.



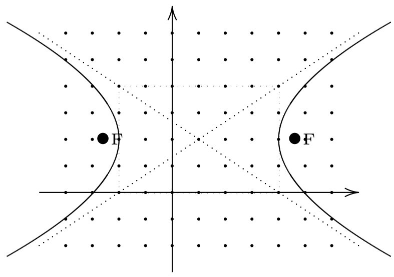
(b) vértice $(3,-2)$ e foco $(2,-2)$.

Resp: parábola: $(y+2)^2 = -4(x-3)$, equação $-y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$, $p = -1$, centro $(3,-2)$, diretriz $x = 4$.



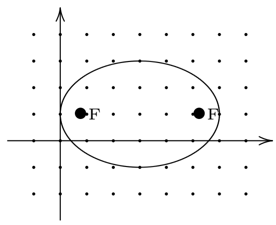
(c) vértices $(-2,2)$ e $(4,2)$ e focos $(1 \pm \sqrt{13}, 2)$.

Resp: hipérbole: $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$, equação $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0$, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{13}$, centro $(1,2)$, eixo principal horizontal e assíntotas $\frac{x-1}{3} = \pm\frac{y-2}{2}$.



(d) vértices $(0,1)$ e $(6,1)$ e focos $(3 \pm \sqrt{5}, 1)$.

Resp: elipse: $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$, equação $4x^2 + 9y^2 - 24x - 18y + 9 = 0$, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$, centro $(3,1)$, eixo principal horizontal.



20. Determine e esboce a cônica dada pela equação

(a) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

(b) $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$

(c) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

(d) $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 18x - 24y + 24 = 0$