

MAP2110 Matemática e Modelagem

Folha de Estudos 4

1º semestre de 2010 – Prof. Claudio H. Asano

1 Reta e Plano

1.1 Encontre as equações paramétricas e simétricas da reta que passa pelos pontos A e B . Em seguida encontre as intersecções (se existirem) com os planos Oxy , Oyz e Oxz .

(a) $A = (2, -1, 0)$ e $B = (2, -2, -2)$.

Resp: paramétricas: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 - t \\ z = -2t \end{cases}$; simétricas: $x = 2, -1 - y = \frac{-z}{2}$; interceptos: $(2, -1, 0) (2, 0, 2)$

(b) $A = (2, 3, 0)$ e $B = (1, 3, 2)$.

Resp: paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 \\ z = 2t \end{cases}$; simétricas: $y = 3, 2 - x = \frac{z}{2}$; interceptos: $(2, 3, 0)$ $(0, 3, 4)$
--

(c) $A = (-3, 2, 0)$ e $B = (-2, 2, 0)$.

Resp: paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$; simétricas: $y = 2, z = 0$; interceptos: $(0, 2, 0)$

(d) $A = (1, -2, 2)$ e $B = (-2, -3, -3)$.

Resp: paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 - t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$; simétricas: $\frac{1-x}{3} = -2 - y = \frac{2-z}{5}$; interceptos: $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}, 0\right) (7, 0, 12) \left(0, -\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$

1.2 Encontre uma equação para o plano que passa pelos pontos

(a) $P = (0, -3, 1)$, $Q = (-3, -2, -3)$ e $R = (-1, 3, 3)$.

Resp: $26x + 10y - 17z + 47 = 0$

(b) $P = (0, -3, 0)$, $Q = (-1, -2, 3)$ e $R = (2, 3, -2)$.

Resp: $-20x + 4y - 8z + 12 = 0$ ou $-5x + y - 2z + 3 = 0$ ($mdc = 4$)
--

(c) $P = (3, 2, -1)$, $Q = (-2, 1, 1)$ e $R = (-3, 1, 1)$.

Resp: $-2y - z + 3 = 0$

(d) $P = (2, 3, 2)$, $Q = (1, -2, 1)$ e $R = (3, 3, -2)$.

Resp: $20x - 5y + 5z - 35 = 0$ ou $4x - y + z - 7 = 0$ ($mdc = 5$)

1.3 Encontre o ponto (se existir) no qual

(a) a reta $r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ intersecta o plano $3x + 3y - 2z + 3 = 0$.

Resp: $\left(\frac{29}{15}, -\frac{8}{15}, \frac{18}{5}\right)$ com $t = -\frac{8}{15}$.

(b) a reta $r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 \end{cases}$ intersecta o plano $-2x - 2y - 1 = 0$.

Resp: $\left(-2, \frac{3}{2}, -1\right)$ com $t = -\frac{1}{2}$.

(c) a reta $r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ intersecta o plano $-3x + 3y + 2z - 1 = 0$.

Resp: $\left(-1, -\frac{18}{13}, \frac{14}{13}\right)$ com $t = -\frac{6}{13}$.

(d) a reta $r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ intersecta o plano $-y - z - 3 = 0$.

Resp: $(2, 2, -5)$ com $t = 1$.

1.4 Determine a intersecção entre

(a) o plano $-y + 2z = 0$ e o plano $-3x + y - 2z - 3 = 0$.

Resp: o vetor diretor é $\vec{v} = (0, -6, -3)$ ou $\vec{v} = (0, -2, -1)$ e um ponto base é $(-1, 2, 1)$.

(b) o plano $-3x + 3y - 2z - 3 = 0$ e o plano $-3y - 2z + 3 = 0$.

Resp: o vetor diretor é $\vec{v} = (-12, -6, 9)$ ou $\vec{v} = (-4, -2, 3)$ e um ponto base é $(0, 1, 0)$.

(c) o plano $x + 2y - z - 11 = 0$ e o plano $-3x - 2y + 2z + 18 = 0$.

Resp: o vetor diretor é $\vec{v} = (2, 1, 4)$ e um ponto base é $(2, 3, -3)$.

(d) o plano $-2x + y - 3z + 12 = 0$ e o plano $-3x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Resp: o vetor diretor é $\vec{v} = (-3, 15, 7)$ e um ponto base é $(3, 0, 2)$.

1.5 Decida se as retas r_1 e r_2 dadas são reversas. Em seguida, calcule a distância entre elas.

$$(a) r_1 : \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 - 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = s \\ z = -1 - 2s \end{cases}$$

Resp: As retas são reversas e a distância é $\frac{6\sqrt{17}}{17} = 1.46$

$$(b) r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 1 + s \\ z = 1 - 3s \end{cases}$$

Resp: As retas são reversas e a distância é $\frac{23\sqrt{94}}{94} = 2.37$

$$(c) r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 + 3s \\ y = 3 + s \\ z = 1 + 3s \end{cases}$$

Resp: As retas são reversas e a distância é $\frac{13\sqrt{34}}{34} = 2.23$

$$(d) r_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 3t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2s \\ z = 0 \end{cases}$$

Resp: As retas são reversas e a distância é 3

1.6 Determine se cada sentença abaixo é verdadeira ou falsa:

- (a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.
- (b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são perpendiculares.
- (c) Dois planos paralelos a um terceiro plano são paralelos.
- (d) Dois planos perpendiculares a um terceiro plano são paralelos.
- (e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
- (f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.

1.7 Encontre uma equação paramétrica e uma equação geral para o plano que passa por P_0 e tem vetores diretores \vec{u} e \vec{v} .

- (a) $P_0 = (1, 2, 1)$, $\vec{u} = (1, -1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 2, 1)$.
- (b) $P_0 = (0, -1, 1)$, $\vec{u} = (-2, -1, 3)$ e $\vec{v} = (1, 1, -3)$.
- (c) $P_0 = (2, -3, 1)$, $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

1.8 Encontre equações paramétricas para os planos.

- (a) $2x - 3y + z = 2$.
- (b) $x - y + 2z + 1 = 0$.
- (c) $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

1.9 Encontre equações paramétricas da reta que passa pelo ponto P_0 e que é perpendicular ao plano π .

(a) $P_0 = (5, 1, 0)$ e $\pi : 2x - y + z = 1$.

(b) $P_0 = (1, 1, 2)$ e $\pi : x + 3y - z = 2$.

(c) $P_0 = (-1, 2, 1)$ e $\pi : \begin{cases} x = -1 + 2t + s \\ y = 3 + 3t + 2s \\ z = 2 - t - s \end{cases}$.

(d) $P_0 = (2, 2, 1)$ e $\pi : \begin{cases} x = t + s \\ y = 2 + t + 2s \\ z = 1 - t + 3s \end{cases}$.

1.10 Encontre uma equação para os planos abaixo.

(a) O plano que passa pelo ponto $(6, 3, 2)$ e perpendicular ao vetor $(-2, 1, 5)$.

(b) O plano que passa pelo ponto $(4, 0, -3)$ e vetor normal $\vec{j} + 2\vec{k}$.

(c) O plano que passa por $(1, 2, 3)$ e contém a reta $r : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

(d) O plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e contém a reta $r : x = 2y = 3z$.

(e) O plano que passa pela reta de intersecção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$.

1.11 Encontre uma equação para o plano que consiste de todos os pontos equidistantes de $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$.

1.12 Encontre a distância entre os planos paralelos dados.

(a) $z = x + 2y + 1$ e $3x + 6y - 3z = 4$.

(b) $3x + 6y - 9z = 4$ e $x + 2y - 3z = 1$.

1.13 Encontre uma equação para o plano que passa pelo ponto $(-4, 1, 3)$ e contém a reta $\frac{x+1}{5} = \frac{5-y}{5} = \frac{3-z}{3}$.

Resp: $-12x + 9y - 35z + 48 = 0$

1.14 Encontre uma equação para o plano que passa pelo ponto $(-1, -3, 2)$ e contém a reta $x+2 = 3-y = \frac{-3-z}{3}$.

Resp: $-23x - 8y - 5z - 37 = 0$

1.15 Encontre uma equação para o plano que passa pela reta de intersecção dos planos $\pi_1 : y+2z+7 = 0$ e $\pi_2 : -x+y+3z+10 = 0$ e é perpendicular ao plano $\pi_3 : z-3 = 0$.

Resp: $-2x - y - 1 = 0$

- 1.16 Dê uma equação paramétrica da reta que passa pelo ponto $P_0 = (-1, -2, -1)$, paralela ao plano $\pi : -2x - 3y - 3z + 11 = 0$ e ortogonal à reta que passa por $A = (-2, 3, 1)$ e $B = (0, 2, 1)$.

$$\text{Resp: } \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2 + 6t \\ z = -1 - 8t \end{cases}$$

- 1.17 Decida, com uma justificativa, se o ponto $P = (3, 2, -3)$ pertence ao plano que passa pelos pontos $A = (2, 3, -3)$, $B = (-2, 3, 1)$ e $C = (1, 0, 3)$.

Resp: A equação do plano é $12x + 20y + 12z - 48 = 0$ ou $3x + 5y + 3z - 12 = 0$ ($mdc = 4$) e o ponto P não pertence ao plano.

- 1.18 Dê uma descrição geométrica para cada uma das famílias de planos.

(a) $x + y + z = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Resp: planos paralelos com vetor normal $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

(b) $x + y + cz = 1$, $c \in \mathbb{R}$.

Resp: planos que contêm os pontos $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ e que portanto contêm a reta que passa por eles, $r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$

(c) $y \cos \theta + z \sin \theta = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Resp: para cada $\theta \in \mathbb{R}$, o plano π_θ contém a reta dada pelos pontos $(x, \cos \theta, \sin \theta)$, $x \in \mathbb{R}$, com vetor normal correspondente ao vetor $\vec{n} = (\cos \theta)\vec{j} + (\sin \theta)\vec{k}$, assim a família é de planos tangentes ao cilindro circular de raio 1 com eixo correspondente ao eixo x .