MAP2110 Matemática e Modelagem
Folha de Estudos 3
1º semestre de 2010 – Prof. Claudio H. Asano

1 Método dos Mínimos Quadrados

1.1 Aproxime os dados da tabela

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	-3	1

por uma função do tipo $ax + b$ usando o Método dos Mínimos Quadrados.

Resp: Sistema normal: $M = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, solução: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

1.2 Aproxime os dados da tabela

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	-2	1	1

por uma função do tipo $ax + b$ usando o Método dos Mínimos Quadrados.

Resp: Sistema normal: $M = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, solução: $\begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

1.3 Aproxime os dados da tabela

x	0	1	2
$f(x)$	-3	-1	0

por uma função do tipo $ax^2 + bx$ usando o Método dos Mínimos Quadrados.

Resp: Sistema normal: $M = \begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, solução: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

1.4 Aproxime os dados da tabela

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	0	-3	-1

por uma função do tipo $ax^2 + bx + c$ usando o Método dos Mínimos Quadrados.

Resp: Sistema normal: $M = \begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -21 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$, solução: $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{63}{20} \\ \frac{27}{20} \end{bmatrix}$

1.5 Queremos aproximar os dados da tabela

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	3	2

por uma função do tipo ae^{bx} usando o Método dos Mínimos Quadrados. Linearize o problema e resolva o problema linearizado.

Resp: Um problema linearizado é $\ln f(x) \sim \ln(a) + bx$. Sistema normal: $M = \begin{bmatrix} 4.00 & 10.0 \\ 10.0 & 30.0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2.89 \\ 8.27 \end{bmatrix}$, solução: $\begin{bmatrix} 0.203 \\ 0.208 \end{bmatrix}$, $f(x) \sim 1.22e^{0.208x}$

1.6 Procuramos uma aproximação para os dados da tabela

x	1	2	3	4
$f(x)$	4	4	4	1

por uma função do tipo ax^b usando o Método dos Mínimos Quadrados. Determine uma linearização e encontre a solução do problema linearizado.

Resp: Um problema linearizado é $\ln f(x) \sim \ln a + b \ln x$. Sistema normal: $M = \begin{bmatrix} 4.00 & 3.18 \\ 3.18 & 3.61 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4.16 \\ 2.48 \end{bmatrix}$, solução: $\begin{bmatrix} 1.64 \\ -0.757 \end{bmatrix}$, $f(x) \sim 5.16x^{-0.757}$

1.7 Uma companhia tem três fábricas que produzem quatro tipos de veículos V_1, V_2, V_3 e V_4. A primeira fábrica produz 60 veículos por dia, sendo 30 do tipo V_1, 0 do tipo V_2, 10 do tipo V_3 e 20 do tipo V_4. A segunda fábrica produz 60 veículos por dia, sendo 20 do tipo V_1, 10 do tipo V_2, 20 do tipo V_3 e 10 do tipo V_4. E a terceira fábrica produz 50 veículos por dia, sendo 10 do tipo V_1, 30 do tipo V_2, 0 do tipo V_3 e 10 do tipo V_4. Cada fábrica tem de operar com sua capacidade diária total. A companhia recebe um pedido de 110 veículos do tipo V_1, 79 do tipo V_2, 64 do tipo V_3 e 93 do tipo V_4. Determine quantos dias cada fábrica deve operar de modo a minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre as quantidades pedidas e produzidas de cada tipo de veículo.

Resp: A aproximação a ser efetuada é $\begin{bmatrix} 110 \\ 79 \\ 64 \\ 93 \end{bmatrix} \sim a_1 \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$. O sistema normal é $\begin{bmatrix} 1400 & 1000 & 500 \\ 1000 & 1000 & 600 \\ 500 & 600 & 1100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5800 \\ 5200 \\ 4400 \end{bmatrix}$. A solução é $a_1 = a_2 = a_3 = 2$. Cada fábrica deve operar por 2 dias.

1.8 A quantidade de alunos presentes em uma sala de aula é dada pela tabela

t (mês)	1	2	3	4
$f(t)$ (alunos)	72	59	52	44

Queremos aproximar os dados da tabela por uma função do tipo $y(t) = \dfrac{t}{at+b}$ de modo a minimizar o erro quadrático $EQ(a,b) = \sum_{k=1}^{4} \big(f(k) - y(k)\big)^2$. Encontre uma linearização para o problema de aproximação $f(t) \sim \frac{t}{at+b}$ e resolva o problema linearizado.

> **Resp:** Uma possível linearização é $\frac{1}{f(t)} \sim a + b\frac{1}{t}$. O sistema normal é $\begin{bmatrix} 4 & 2.08333333333 \\ 2.08333333333 & 1.42361111111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.072796083389 \\ 0.0344555397522 \end{bmatrix}$ e sua solução é $a = 0.0235206931751$ e $b = -0.0102176108693$.

1.9 Aproxime a tabela

$f(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=1$	0	1	1
$x=2$	1	1	1

por um plano $z = ax + by + c$ de modo a minimizar o erro quadrático

$$EQ = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{2}(f(i,j) - ai - bj - c)^2.$$

> **Resp:** A aproximação é $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ com sistema normal correspondente $\begin{bmatrix} 15 & 9 & 9 \\ 9 & 10 & 6 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ e resposta $a = 1/3$, $b = 1/4$ e $c = 1/12$