MAP2110 Matemática e Modelagem
Folha de Estudos 2
1º semestre de 2010 – Prof. Claudio H. Asano

1 Base, Mudança de Base e Mudança de Coordenadas

1.1 O que é uma base para o plano? E para o espaço?

1.2 Dada uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ do plano, sejam

$$\begin{cases} \vec{f}_1 & = -2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 & = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

(a) Verificar que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ é uma nova base.

(b) Escreva a matriz M_E^F de mudança de coordenadas na base F para coordenadas na base E.

Resp: Se $\vec{u} = (x, y)_E = (\alpha, \beta)_F$ então $\begin{cases} -2\alpha & - & \beta & = & x \\ -3\alpha & + & \beta & = & y \end{cases}$ e a matriz de mudança de coordenadas é $M_E^F = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Determine a matriz M_F^E de mudança de coordenadas na base E para coordenadas na base F.

Resp: Como $\begin{cases} \alpha & = & \dfrac{-x-y}{5} \\ \beta & = & \dfrac{-3x+2y}{5} \end{cases}$, a matriz de mudança de coordenadas na base E para coordenadas na base F é $M_F^E = \begin{bmatrix} -1/5 & -1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{bmatrix}$.

(d) Ache as coordenadas de $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ em relação à base F.

Resp: $\vec{v} = (1, -1)_E = (0, -1)_F$

1.3 Dada uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ do espaço, sejam

$$\begin{cases} \vec{f}_1 & = -2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 & = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 & = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{cases}$$

(a) Verificar que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma nova base.

(b) Escreva a matriz M_E^F de mudança de coordenadas na base F para coordenadas na base E.

Resp: Se $\vec{u} = (x, y, z)_E = (\alpha, \beta, \gamma)_F$ então $\begin{cases} -2\alpha & - & \beta & + & 2\gamma & = & x \\ -3\alpha & + & \beta & + & 3\gamma & = & y \\ 2\alpha & & & + & 3\gamma & = & z \end{cases}$ e a matriz de mudança de coordenadas é $M_E^F = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) Determine a matriz M_F^E de mudança de coordenadas na base E para coordenadas na base F.

Resp: $M_F^E = \begin{bmatrix} -3/25 & -3/25 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 & 0 \\ 2/25 & 2/25 & 1/5 \end{bmatrix}$

(d) Ache as coordenadas de $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ em relação à base F.

Resp: $\vec{v} = (1, -1, 1)_E = (\frac{1}{5}, -1, \frac{1}{5})_F$

1.4 Dada uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ do espaço, sejam

$$\begin{cases} \vec{f}_1 &= -2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \vec{g}_1 &= -3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ \vec{g}_2 &= -\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{g}_3 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{cases}$$

(a) Verificar que $G = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ é uma nova base.

(b) Escreva a matriz M_E^G de mudança de coordenadas na base G para coordenadas na base E.

Resp: $M_E^G = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) Determine a matriz M_F^G de mudança de coordenadas na base G para coordenadas na base F.

Resp: $M_F^G = \begin{bmatrix} 0 & 8/25 & 0 \\ 1 & 3/5 & 0 \\ -1 & 3/25 & 1 \end{bmatrix}$

(d) Ache as coordenadas de $\vec{v} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 - \vec{g}_3$ em relação à base F.

Resp: $\vec{v} = (\frac{8}{25}, \frac{8}{5}, \frac{-47}{25})_F$.

1.5 Se E, F e G forem bases de vetores, mostre que:

(a) $M_E^E = I$

(b) $(M_F^E)(M_E^F) = I$

(c) $(M_G^F)(M_F^E) = M_G^E$

2 Produto Escalar e Produto Vetorial

2.1 O que é o produto escalar de dois vetores? Dê uma interpretação geométrica.

2.2 O que é o produto vetorial de dois vetores? Dê uma interpretação geométrica.

2.3 Sejam $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ escritos na base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Calcule o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2.4 Dados os vetores $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 3)$ e $\vec{w} = (-3, 2, 3)$, calcule

(a) O produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Resp: -2

(b) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{22}}{11}\right)$

(c) A norma de $3\vec{u} + \vec{v}$.

Resp: $3\vec{u} + \vec{v} = (4, -1, 0)$ e sua norma é $\sqrt{17}$

(d) O produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Resp: $(-1, -4, -1)$

(e) O produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

Resp: $(-9, -12, -1)$

(f) O produto vetorial $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w})$.

Resp: $(-10, 6, -14)$

(g) O produto vetorial $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Resp: $(-12, 10, -12)$

(h) O produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Resp: -8

2.5 Dados os vetores $\vec{u} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 0, 3)$ e $\vec{w} = (-2, -1, -3)$, calcule

(a) O produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Resp: 8

(b) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{560}}{35}\right)$

(c) A norma de $\vec{u} + 2\vec{v}$.

Resp: $\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, -2, 9)$ e sua norma é $\sqrt{86}$

(d) O produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Resp: $(-6, -6, -2)$

(e) O produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

Resp: $(3, -9, 1)$

(f) O produto vetorial $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w})$.

Resp: $(16, -14, -6)$

(g) O produto vetorial $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Resp: $(25, 8, -3)$

(h) O produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Resp: 24

2.6 Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ e considere $\vec{u} = (1, 2, 3)_E$, $\vec{v} = (1, -2, 0)_E$ e $\vec{w} = (3, 2, 1)_E$. Determine:

(a) O produto escalar $u \cdot v$.

(b) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(c) A norma de $3\vec{u} - \vec{v}$.

(d) O produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

(e) O produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

(f) O produto vetorial $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w})$.

(g) O produto vetorial $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

(h) O produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

2.7 Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores tais que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

(a) Determine o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) Calcule o produto escalar de $\vec{u} - \vec{v}$ por $\vec{u} + 2\vec{v}$.

2.8 Mostre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\big(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2\big)$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2.9 Demonstre que, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos a desigualdade triangular $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

2.10 Prove que:

(a) $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.

2.11 Suponha que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

(a) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

(b) Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

(c) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

2.12 Mostre que

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \det \begin{bmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{bmatrix}$$

2.13 Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos arbitrários. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\vec{u} - \alpha\vec{v}|$ seja mínimo.

2.14 Calcule a projeção $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$, onde

(a) $\vec{u} = (3, -1, -1)$ e $\vec{v} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}$.

Resp: $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = (\frac{14}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{14}{9})$

(b) $\vec{u} = (3, -1, 3)$ e $\vec{v} = 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$.

Resp: $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = (0, -2, 2)$

2.15 Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$. Verifique as identidades abaixo:

(a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

(b) $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

(d) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

(e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

(f) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

2.16 Prove que:

(a) $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.

2.17 Encontre dois vetores unitários que são ortogonais a:

(a) $\vec{u} = 2\vec{\jmath}$ e $\vec{v} = (3, -1, 2)$.

Resp: $\pm\frac{\sqrt{13}}{13}(2, 0, -3)$

(b) $\vec{u} = (1, 0, -3)$ e $\vec{v} = (1, 3, 0)$.

Resp: $\pm\frac{\sqrt{11}}{11}(3, -1, 1)$

(c) $\vec{u} = (0, 1, 2)$ e $\vec{v} = (3, 1, 0)$.

(d) $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.

2.18 Suponha que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

(a) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

(b) Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

(c) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

2.19 Mostre que

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \det \begin{bmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{bmatrix}$$

2.20 Suponha que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$. Calcule $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ e $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

Resp: $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 30$ e $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 38$

2.21 Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = -2\vec{\jmath}$, calcule o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e encontre o cosseno do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $|\vec{u}| = \sqrt{18}$, $|\vec{v}| = \sqrt{4}$ e $\cos\theta = 0$

2.22 Calcule a projeção $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$, onde $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ e $\vec{v} = -4\vec{\imath} + 2\vec{k}$.

Resp: $u \cdot v = -14$, $v \cdot v = 20$, $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = -\frac{7}{10}\vec{v} = \frac{14}{5}\vec{\imath} - \frac{7}{5}\vec{k}$

2.23 Calcule e represente no plano as projeções $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ e $\text{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}$, onde $\vec{u} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ e $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

Resp: $u \cdot v = -1$, $u \cdot u = 5$, $v \cdot v = 2$, $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$ e $\text{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v} = -\frac{1}{5}\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{\imath} + \frac{1}{5}\vec{\jmath}$

2.24 Dado o vetor $\vec{w} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, calcule a sua projeção ortogonal sobre as combinações lineares de $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$.

Resp: O sistema normal é $\left\{\begin{array}{rcrcr} 14a & - & 7b & = & -4 \\ - & 7a & + & 45b = & 25 \end{array}\right.$ e a solução é $a = \frac{-5}{581}$ e $b = \frac{46}{83}$. A projeção ortogonal de $\vec{w}$ sobre o plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{-5}{581}\vec{u} + \frac{46}{83}\vec{v}$.

2.25 Dados os vetores $\vec{u} = -\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$ e $\vec{v} = -5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, determine o conjunto dos valores de a para que

(a) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos.

Resp: $\{\frac{2}{5}\}$

(b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais.

Resp: $\{-\frac{5}{2}\}$

(c) o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja de 45^{o}.

Resp: $\{\frac{7}{3}, -\frac{3}{7}\}$

2.26 Encontre a área do triângulo PQR com:

(a) $P = (-3, 4, 3)$, $Q = (-2, 4, 1)$ e $R = (0, 5, 3)$.

Resp: Área$= \frac{\sqrt{41}}{2} = 3.20$

(b) $P = (3, 1, -3)$, $Q = (4, 5, -2)$ e $R = (-2, 0, -3)$.

Resp: Área$= \frac{3\sqrt{43}}{2} = 9.84$

(c) $P = (4, 5, 1)$, $Q = (-4, -4, 3)$ e $R = (3, 4, 1)$.

Resp: Área$= \frac{3}{2} = 1.50$

(d) $P = (1, 4, 6)$, $Q = (-2, 5, -1)$ e $R = (1, -1, 1)$.

(e) $P = (1, 2, 3)$, $Q = (4, 5, 6)$ e $R = (3, 2, 1)$.

(f) $P = (2, 0, 6)$, $Q = (-1, -1, 2)$ e $R = (2, -1, 0)$.

2.27 Ache o volume V do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

(a) $\vec{u} = (4, 1, 2)$, $\vec{v} = (-4, 3, -3)$ e $\vec{w} = (-5, -2, 0)$.

Resp: Volume=37

(b) $\vec{u} = (1, 4, 4)$, $\vec{v} = (3, 3, 3)$ e $\vec{w} = (4, -5, 2)$.

Resp: Volume=63

(c) $\vec{u} = (5, 5, 5)$, $\vec{v} = (-5, 3, -4)$ e $\vec{w} = (3, 3, 0)$.

Resp: Volume=120

(d) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$.

(e) $\vec{u} = (2, 4, 6)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 1)$.

(f) $\vec{u} = (1, 4, 6)$, $\vec{v} = (-2, 5, -1)$ e $\vec{w} = (1, -1, 1)$.