MAP2110 Matemática e Modelagem

Folha de Estudos 2

1º semestre de 2010 – Prof. Claudio H. Asano

1 Base, Mudança de Base e Mudança de Coordenadas

1.1 O que é uma base para o plano? E para o espaço?

1.2 Dada uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ do plano, sejam

$$\begin{cases} \vec{f}_1 &= -2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 &= -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

(a) Verificar que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ é uma nova base.

(b) Escreva a matriz M_E^F de mudança de coordenadas na base F para coordenadas na base E.

(c) Determine a matriz M_F^E de mudança de coordenadas na base E para coordenadas na base F.

(d) Ache as coordenadas de $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ em relação à base F.

1.3 Dada uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ do espaço, sejam

$$\begin{cases} \vec{f}_1 &= -2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{cases}$$

(a) Verificar que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma nova base.

(b) Escreva a matriz M_E^F de mudança de coordenadas na base F para coordenadas na base E.

(c) Determine a matriz M_F^E de mudança de coordenadas na base E para coordenadas na base F.

(d) Ache as coordenadas de $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ em relação à base F.

1.4 Dada uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ do espaço, sejam

$$\begin{cases} \vec{f}_1 &= -2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \vec{g}_1 &= -3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ \vec{g}_2 &= -\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{g}_3 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{cases}$$

(a) Verificar que $G = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ é uma nova base.

(b) Escreva a matriz M_E^G de mudança de coordenadas na base G para coordenadas na base E.

(c) Determine a matriz M_F^G de mudança de coordenadas na base G para coordenadas na base F.

(d) Ache as coordenadas de $\vec{v} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 - \vec{g}_3$ em relação à base F.

1.5 Se E, F e G forem bases de vetores, mostre que:

(a) $M_E^E = I$

(b) $\left(M_F^E\right)\left(M_E^F\right) = I$

(c) $\left(M_G^F\right)\left(M_F^E\right) = M_G^E$

2 Produto Escalar e Produto Vetorial

2.1 O que é o produto escalar de dois vetores? Dê uma interpretação geométrica.

2.2 O que é o produto vetorial de dois vetores? Dê uma interpretação geométrica.

2.3 Sejam $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ escritos na base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Calcule o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2.4 Dados os vetores $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 3)$ e $\vec{w} = (-3, 2, 3)$, calcule

(a) O produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(b) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(c) A norma de $3\vec{u} + \vec{v}$.

(d) O produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

(e) O produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

(f) O produto vetorial $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

(g) O produto vetorial $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

(h) O produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

2.5 Dados os vetores $\vec{u} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 0, 3)$ e $\vec{w} = (-2, -1, -3)$, calcule

(a) O produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(b) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(c) A norma de $\vec{u} + 2\vec{v}$.

(d) O produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

(e) O produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

(f) O produto vetorial $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

(g) O produto vetorial $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

(h) O produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

2.6 Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ e considere $\vec{u} = (1, 2, 3)_E$, $\vec{v} = (1, -2, 0)_E$ e $\vec{w} = (3, 2, 1)_E$. Determine:

(a) O produto escalar $u \cdot v$.

(b) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(c) A norma de $3\vec{u} - \vec{v}$.

(d) O produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

(e) O produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

(f) O produto vetorial $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

(g) O produto vetorial $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

(h) O produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

2.7 Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores tais que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

(a) Determine o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) Calcule o produto escalar de $\vec{u} - \vec{v}$ por $\vec{u} + 2\vec{v}$.

2.8 Mostre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2\right)$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2.9 Demonstre que, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos a desigualdade triangular $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$.

2.10 Prove que:

(a) $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.

2.11 Suponha que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

(a) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

(b) Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

(c) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

2.12 Mostre que

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \det \begin{bmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{bmatrix}$$

2.13 Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos arbitrários. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\vec{u} - \alpha\vec{v}|$ seja mínimo.

2.14 Calcule a projeção $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$, onde

(a) $\vec{u} = (3, -1, -1)$ e $\vec{v} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}$.

(b) $\vec{u} = (3, -1, 3)$ e $\vec{v} = 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$.

2.15 Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$. Verifique as identidades abaixo:

(a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

(b) $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

(d) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

(e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

(f) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

2.16 Prove que:

(a) $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.

2.17 Encontre dois vetores unitários que são ortogonais a:

(a) $\vec{u} = 2\vec{\jmath}$ e $\vec{v} = (3, -1, 2)$.

(b) $\vec{u} = (1, 0, -3)$ e $\vec{v} = (1, 3, 0)$.

(c) $\vec{u} = (0, 1, 2)$ e $\vec{v} = (3, 1, 0)$.

(d) $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.

2.18 Suponha que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

(a) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

(b) Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

(c) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$, segue que $\vec{v} = \vec{w}$?

2.19 Mostre que

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \det \begin{bmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{bmatrix}$$

2.20 Suponha que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$. Calcule $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ e $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

2.21 Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = -2\vec{\jmath}$, calcule o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e encontre o cosseno do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2.22 Calcule a projeção $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$, onde $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ e $\vec{v} = -4\vec{\imath} + 2\vec{k}$.

2.23 Calcule e represente no plano as projeções $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ e $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}$, onde $\vec{u} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ e $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

2.24 Dado o vetor $\vec{w} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, calcule a sua projeção ortogonal sobre as combinações lineares de $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$.

2.25 Dados os vetores $\vec{u} = -\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$ e $\vec{v} = -5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, determine o conjunto dos valores de a para que

(a) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos.

(b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais.

(c) o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja de 45°.

2.26 Encontre a área do triângulo PQR com:

(a) $P = (-3, 4, 3)$, $Q = (-2, 4, 1)$ e $R = (0, 5, 3)$.

(b) $P = (3, 1, -3)$, $Q = (4, 5, -2)$ e $R = (-2, 0, -3)$.

(c) $P = (4, 5, 1)$, $Q = (-4, -4, 3)$ e $R = (3, 4, 1)$.

(d) $P = (1, 4, 6)$, $Q = (-2, 5, -1)$ e $R = (1, -1, 1)$.

(e) $P = (1, 2, 3)$, $Q = (4, 5, 6)$ e $R = (3, 2, 1)$.

(f) $P = (2, 0, 6)$, $Q = (-1, -1, 2)$ e $R = (2, -1, 0)$.

2.27 Ache o volume V do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

(a) $\vec{u} = (4, 1, 2)$, $\vec{v} = (-4, 3, -3)$ e $\vec{w} = (-5, -2, 0)$.

(b) $\vec{u} = (1, 4, 4)$, $\vec{v} = (3, 3, 3)$ e $\vec{w} = (4, -5, 2)$.

(c) $\vec{u} = (5, 5, 5)$, $\vec{v} = (-5, 3, -4)$ e $\vec{w} = (3, 3, 0)$.

(d) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$.

(e) $\vec{u} = (2, 4, 6)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 1)$.

(f) $\vec{u} = (1, 4, 6)$, $\vec{v} = (-2, 5, -1)$ e $\vec{w} = (1, -1, 1)$.