MAP2110 Matemática e Modelagem
Folha de Estudos 1
1º semestre de 2010 – Prof. Claudio H. Asano

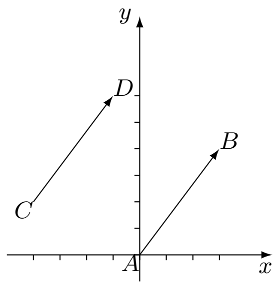
1 Vetores

1.1 Considere os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (3, 1)$. Encontre o módulo de $\overrightarrow{AB}$.

Resp: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$

1.2 Sejam $A = (0, 0)$, $B = (3, 4)$, $C = (-4, 2)$ e $D = (-1, 6)$. Mostre que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais sem utilizar a forma componente dos vetores, isto é, mostre que eles têm o mesmo módulo, direção e sentido. Represente graficamente.

Resp:



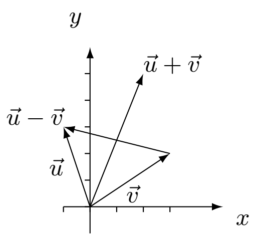
1.3 Defina $A = (3, -2)$ e $B = (-3, 1)$. Encontre as componentes horizontal e vertical de $\overrightarrow{AB}$.

Resp: $\overrightarrow{AB} = -6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, assim a componente horizontal é $-6\vec{\imath}$ e a componente vertical é $3\vec{\jmath}$.

1.4 Sejam $\vec{u} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ e $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

(a) Represente $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ no plano.

Resp:



(b) Calcule $2\vec{u} + 3\vec{v}$.

Resp: $7\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}$

(c) Determine $|\frac{1}{2}\vec{u}|$.

Resp: $\frac{\sqrt{10}}{2}$

1.5 Esboce o vetor $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ em um sistema de coordenadas.

1.6 Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ e $\vec{v} = -\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$, represente no plano o vetor $\vec{u}$, o vetor $\vec{v}$, a soma $\vec{u} + \vec{v}$ e a diferença $\vec{u} - \vec{v}$.

Resp: $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ e $\vec{u} - \vec{v} = 4\vec{\imath} + 9\vec{\jmath}$

1.7 Sejam $\vec{u} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Calcule $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{u} + \vec{v}|$ e $|\vec{u} - \vec{v}|$. Verifique que $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Resp: $|\vec{u}| = \sqrt{11}$, $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{10}$, $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{30}$,

1.8 Encontre um vetor unitário que faz um ângulo de $2\pi/3$ radianos com o semi-eixo x positivo.

Resp: $-\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$

1.9 Determine o vetor unitário obtido pela rotação do vetor $\vec{\jmath}$ de um ângulo de 120° no sentido anti-horário.

Resp: $-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}$

1.10 Encontre um vetor com o dobro do comprimento de $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, mas com o sentido oposto.

Resp: $-2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$

1.11 Sejam $A = (1, -1)$ e $B = (-2, 3)$. Determine o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Resp: O ponto médio é $M = (-1/2, 1)$.

1.12 Sejam $A = (2, -2)$ e $B = (-1, 3)$. Divida o segmento $\overline{AB}$ em três partes iguais, isto é, encontre dois pontos C e D tais que os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$ tenham o mesmo comprimento.

1.13 Seja ABC um triângulo e X o ponto médio do lado BC. Escreva o vetor $\overrightarrow{AX}$ como uma combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Esta combinação linear é única? Explique.

1.14 Seja $OABC$ um tetraedro, X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$, para algum valor $m \in \mathbb{R}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

1.15 São dados os pontos $A(1, 2)$, $B(2, 5)$ e $C(4, 3)$ no plano.

(a) Determine os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Resp: $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\overrightarrow{BC} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$

(b) Esboce os pontos e os vetores num gráfico.

(c) Determine os ângulos do triângulo ABC.

Resp: Utilizamos a lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$ para obter $\hat{A} = \cos^{-1}(3/5) \approx 53.13°$, $\hat{B} = \cos^{-1}(\sqrt{5}/5) \approx 63.43°$ e $\hat{C} = \cos^{-1}(\sqrt{5}/5) \approx 63.43°$

1.16 Quando dois segmentos orientados representam o mesmo vetor?

1.17 Como dois vetores são somados geometricamente? E algebricamente?

1.18 Como encontramos o módulo de um vetor?

1.19 Se um vetor for multiplicado por um escalar positivo, como o resultado está relacionado com o vetor original? E se o escalar for zero? Negativo?

2 Combinações Lineares

2.1 Defina o que é uma combinação linear.

Resp: Dados vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ e números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, uma combinação linear é uma expressão do tipo $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$.

2.2 Exprima o vetor $\vec{w} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ como uma combinação linear de $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

Resp: $\vec{w} = -\vec{u} + \vec{w}$

2.3 Exprima o vetor $\vec{w} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ como uma combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, com $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

Resp: $\alpha = -x + 2y$ e $\beta = x - y$

2.4 Dados os vetores $\vec{u} = -5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ e $\vec{w} = 17\vec{\imath} - 7\vec{\jmath}$, encontre a e b tais que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Resp: $a = -3$ e $b = 1$

2.5 Dados os vetores $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{w} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ e $\vec{m} = -6\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} + 8\vec{k}$, encontre a, b e c tais que $\vec{m} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Resp: $a = 2$, $b = -2$ e $c = -2$.

2.6 Mostre que existem infinitas maneiras de se escrever o vetor $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ como uma combinação linear de $\vec{v}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{v}_3 = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

Resp: Se $\vec{u} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3$ então temos o sistema linear $\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & - & \gamma & = & 2 \end{array}\right.$ que possui infinitas soluções porque tem mais variáveis que equações independentes.

3 Dependência Linear e Independência Linear

3.1 O que é um conjunto l.i.? E l.d.?

3.2 Decida se cada conjunto a seguir é linearmente dependente ou linearmente independente.

(a) $\{\vec{0}\}$

Resp: l.d.

(b) $\{\vec{\imath}+\vec{\jmath}\}$

Resp: l.i.

(c) $\{\vec{\imath}+\vec{\jmath}, \vec{\imath}-\vec{\jmath}\}$

Resp: l.i.

(d) $\{\vec{\imath}, \vec{0}\}$

Resp: l.d.

(e) $\{(1,1,2),(1,1,3),(-1,-1,2)\}$

Resp: l.d.

(f) $\{(1,1,2),(1,1,3),(-1,-1,2),(0,0,0)\}$

Resp: l.d.

3.3 Quais devem ser os valores de $a \in \mathbb{R}$ para que os vetores $\vec{u} = (1, a)$ e $\vec{v} = (3, 5)$ sejam l.i.?

Resp: $a \neq 5/3$

3.4 Encontre os valores de $m \in \mathbb{R}$ para que os vetores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 2, m)$ e $\vec{w} = (1, -2, 1)$ sejam l.d.

Resp: $m = 2$

3.5 Dê exemplo de dois conjuntos l.i. cuja união é l.d.

Resp: Considere $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ e $\{\vec{\imath}+\vec{\jmath}, \vec{\jmath}\}$

3.6 Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove-a e se for falsa, exiba um contra-exemplo.

(a) A união de dois conjuntos l.i. também é l.i.

Resp: Falso. Considere $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ e $\{\vec{\imath}+\vec{\jmath}, \vec{\jmath}\}$.

(b) Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ for l.d. então $\vec{v}$ é necessariamente um múltiplo de $\vec{u}$.

Resp: Falso. Considere $\vec{u} = \vec{0}$ e $\vec{v} = \vec{\imath}$.

(c) Dois vetores não podem formar uma base para o espaço.

Resp: Verdade. Dois vetores l.i. formam uma base de um plano. Uma base para o espaço necessita de 3 vetores l.i.