MAP2110 Matemática e Modelagem

Folha de Estudos 1

1º semestre de 2010 – Prof. Claudio H. Asano

1 Vetores

- 1.1 Considere os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (3, 1)$. Encontre o módulo de $\overrightarrow{AB}$.
- 1.2 Sejam $A = (0, 0)$, $B = (3, 4)$, $C = (-4, 2)$ e $D = (-1, 6)$. Mostre que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais sem utilizar a forma componente dos vetores, isto é, mostre que eles têm o mesmo módulo, direção e sentido. Represente graficamente.
- 1.3 Defina $A = (3, -2)$ e $B = (-3, 1)$. Encontre as componentes horizontal e vertical de $\overrightarrow{AB}$.
- 1.4 Sejam $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
 - (a) Represente $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ no plano.
 - (b) Calcule $2\vec{u} + 3\vec{v}$.
 - (c) Determine $|\frac{1}{2}\vec{u}|$.
- 1.5 Esboce o vetor $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ em um sistema de coordenadas.
- 1.6 Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{v} = -\vec{i} - 5\vec{j}$, represente no plano o vetor $\vec{u}$, o vetor $\vec{v}$, a soma $\vec{u} + \vec{v}$ e a diferença $\vec{u} - \vec{v}$.
- 1.7 Sejam $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Calcule $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{u} + \vec{v}|$ e $|\vec{u} - \vec{v}|$. Verifique que $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.
- 1.8 Encontre um vetor unitário que faz um ângulo de $2\pi/3$ radianos com o semi-eixo x positivo.
- 1.9 Determine o vetor unitário obtido pela rotação do vetor $\vec{j}$ de um ângulo de 120° no sentido anti-horário.
- 1.10 Encontre um vetor com o dobro do comprimento de $\vec{i} + 2\vec{j}$, mas com o sentido oposto.
- 1.11 Sejam $A = (1, -1)$ e $B = (-2, 3)$. Determine o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
- 1.12 Sejam $A = (2, -2)$ e $B = (-1, 3)$. Divida o segmento $\overline{AB}$ em três partes iguais, isto é, encontre dois pontos C e D tais que os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$ tenham o mesmo comprimento.
- 1.13 Seja ABC um triângulo e X o ponto médio do lado BC . Escreva o vetor $\overrightarrow{AX}$ como uma combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Esta combinação linear é única? Explique.
- 1.14 Seja $OABC$ um tetraedro, X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$, para algum valor $m \in \mathbb{R}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.
- 1.15 São dados os pontos $A(1, 2)$, $B(2, 5)$ e $C(4, 3)$ no plano.
 - (a) Determine os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$.
 - (b) Esboce os pontos e os vetores num gráfico.
 - (c) Determine os ângulos do triângulo ABC .
- 1.16 Quando dois segmentos orientados representam o mesmo vetor?
- 1.17 Como dois vetores são somados geometricamente? E algebricamente?
- 1.18 Como encontramos o módulo de um vetor?
- 1.19 Se um vetor for multiplicado por um escalar positivo, como o resultado está relacionado com o vetor original? E se o escalar for zero? Negativo?

2 Combinações Lineares

- 2.1 Defina o que é uma combinação linear.
- 2.2 Exprima o vetor $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$ como uma combinação linear de $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
- 2.3 Exprima o vetor $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$ como uma combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, com $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$.
- 2.4 Dados os vetores $\vec{u} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = 17\vec{i} - 7\vec{j}$, encontre a e b tais que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- 2.5 Dados os vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{m} = -6\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}$, encontre a , b e c tais que $\vec{m} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
- 2.6 Mostre que existem infinitas maneiras de se escrever o vetor $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ como uma combinação linear de $\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{v}_3 = \vec{i} - \vec{j}$.

3 Dependência Linear e Independência Linear

- 3.1 O que é um conjunto l.i.? E l.d.?
- 3.2 Decida se cada conjunto a seguir é linearmente dependente ou linearmente independente.
(a) $\{\vec{0}\}$	(d) $\{\vec{i}, \vec{0}\}$
(b) $\{\vec{i} + \vec{j}\}$	(e) $\{(1, 1, 2), (1, 1, 3), (-1, -1, 2)\}$
(c) $\{\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j}\}$	(f) $\{(1, 1, 2), (1, 1, 3), (-1, -1, 2), (0, 0, 0)\}$
- 3.3 Quais devem ser os valores de $a \in \mathbb{R}$ para que os vetores $\vec{u} = (1, a)$ e $\vec{v} = (3, 5)$ sejam l.i.?
- 3.4 Encontre os valores de $m \in \mathbb{R}$ para que os vetores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 2, m)$ e $\vec{w} = (1, -2, 1)$ sejam l.d.
- 3.5 Dê exemplo de dois conjuntos l.i. cuja união é l.d.
- 3.6 Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove-a e se for falsa, exiba um contra-exemplo.
- A união de dois conjuntos l.i. também é l.i.
 - Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ for l.d. então $\vec{v}$ é necessariamente um múltiplo de $\vec{u}$.
 - Dois vetores não podem formar uma base para o espaço.