MAP0214 - Cálculo Numérico com Aplicações em Física

Instituto de Física – 1º Semestre de 2008

Exercício-programa 2

Solução da equação do calor unidimensional

(data de entrega: 16/06/2008 no sistema `http://map2121.ime.usp.br`)

1 Preliminares

O exercício-programa deverá ser feito individualmente. Não serão admitidos programas feitos em grupo, mesmo parcialmente.

Você deverá implementar o exercício-programa em linguagem C, sempre indicando o equipamento e compilador utilizados.

2 Objetivo

O objetivo deste exercício-programa é aproximar numericamente uma função $u = u(x,t)$ que é solução da equação do calor $u_t = c^2 u_{xx}$ para $x \in [a,b]$ e $t \in [t_0, t_0 + T]$ sujeito a condições de contorno $u(x,t_0) = f(x)$ para $x \in [a,b]$, $u(a,t) = g_a(t)$ e $u(b,t) = g_b(t)$ para $t \in [t_0, t_0 + T]$.

3 Equações de diferença

Para $h > 0$ e $k > 0$, utilizaremos as aproximações para as derivadas parciais

$$u_t(x,t) \simeq \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k}$$

$$u_{xx}(x,t) \simeq \frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)}{h^2}$$

Substituindo na equação do calor $u_t = c^2 u_{xx}$, obtemos

$$\frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} = c^2 \frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)}{h^2}$$

e isolando $u(x,t+k)$ temos

$$u(x,t+k) = u(x,t) + \frac{kc^2}{h^2}\big(u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)\big)$$

e finalmente

$$u(x,t+k) = ru(x-h,t) + (1-2r)u(x,t) + ru(x+h,t) \tag{1}$$

onde $r = kc^2/h^2$. Se soubermos a temperatura $u(x,t)$ para um determinado instante t_0, a equação (1) nos permite aproximar a temperatura em um instante $t_1 > t_0$.

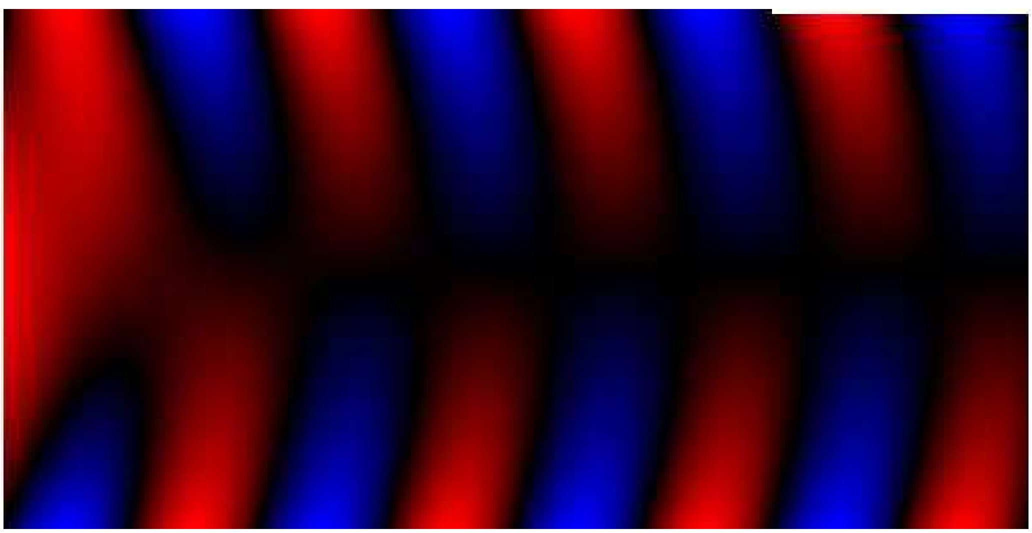
Entretanto, dependendo do valor de r, o erro cometido na aproximação pode ficar razoavelmente controlado ou pode crescer exponencialmente. É possível demonstrar que para $r \leq 1/2$, o erro cresce proporcionalmente a $t - t_0$. Assim, dado o valor de h, escolhemos $k \leq h^2/(2c^2)$ para que o erro fique controlado.

4 Visualização da função

A função $u(x,t)$ é uma função de duas variáveis e pode ser representada graficamente de várias maneiras. Como ela descreve a temperatura de uma barra de material uniforme colocada em $[a,b]$ ao longo do tempo em $[t_0, t_0+T]$, ela será representada por uma imagem colorida de tamanho $N \times M$ onde cada pixel representará um ponto correspondente no retângulo $[a,b] \times [t_0, t_0+T]$.

Escreva um programa que gera um arquivo de imagem colorida PPM correspondente à função u. O nível máximo de cada componente deve ser 255. Utilize $RGB = (255,0,0)$ para a temperatura máxima, $RGB = (0,0,255)$ para a temperatura mínima e $RGB = (0,0,0)$ para a média entre a temperatura máxima e a temperatura mínima (não é a temperatura média, somente a média entre a máxima e a mínima). Use proporcionalmente níveis de vermelho e de azul para as temperaturas intermediárias.

Veja um exemplo (sem relação com os testes pedidos a seguir):



5 Testes

Teste seu programa para:

(a)

$$\begin{cases} f(x) &= 1 - x^2 \\ g_a(t) &= 1 + \operatorname{sen}(2\pi t) \\ g_b(t) &= 1 - \operatorname{sen}(2\pi t) \end{cases}$$

no retângulo $[-1,1] \times [0,1]$ com $c^2 = 1$, $N = 200$ e $M = 100$.

(b)

$$\begin{cases} f(x) &= \operatorname{sen}(2\pi x) \\ g_a(t) &= 0 \\ g_b(t) &= 0 \end{cases}$$

no retângulo $[0,1] \times [0,0.1]$ com $c^2 = 1$, $N = 100$ e $M = 100$.

(c)

$$\begin{cases} f(x) &= \operatorname{sen}(2\pi x) \\ g_a(t) &= t \operatorname{sen}(2\pi t) \\ g_b(t) &= -t^2 \cos(2\pi t) \end{cases}$$

no retângulo $[0,1] \times [0,1]$ com $c^2 = 1$, $N = 100$ e $M = 100$.

6 Critério de correção e demais regras do jogo

- Exercícios-programa atrasados não serão recebidos.
- O arquivo fonte deverá estar devidamente identificado com seu nome e NUSP. A ausência de identificação poderá implicar na invalidação do exercício-programa ou na redução da nota final.

Serão considerados os seguintes itens na correção:

- Organização e apresentação (indentação e comentários).
- Escolha o valor de k apropriado ao valor de h.
- A saída do programa deverá ser um arquivo PPM válido.