

MAP0214 - Cálculo Numérico com Aplicações em Física

Instituto de Física – 1º Semestre de 2008
Exercício-programa 1

Bacia de atração do Método de Newton em duas dimensões

(data de entrega: 12/05/2008 no sistema <http://map2121.ime.usp.br>)

1 Preliminares

O exercício-programa deverá ser feito individualmente. Não serão admitidos programas feitos em grupo, mesmo parcialmente.

Você deverá implementar o exercício-programa em linguagem C, sempre indicando o equipamento e compilador utilizados.

2 Objetivo

O objetivo deste exercício-programa é resolver sistemas de equações não lineares pelo Método de Newton e determinar a bacia de atração de cada raiz encontrada.

3 O Método de Newton

Considere o problema de se encontrar uma solução para um sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Analogamente ao caso unidimensional, o Método de Newton bidimensional é dado pela recorrência

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{bmatrix} \quad (2)$$

A convergência da sequência (x_k, y_k) para uma solução do sistema não linear é de análise delicada, diferente do caso unidimensional. Em geral, a aproximação inicial (x_0, y_0) precisa estar razoavelmente próxima da solução para que o método funcione.

Neste programa você vai usar 2 critérios de parada para o Método de Newton: um número máximo de iterações $ITMAX \in \mathbb{N}$ e um limite inferior para a variação relativa $\varepsilon > 0$.

As derivadas parciais serão calculadas numericamente com uma extrapolação de Richardson especial descrita a seguir e a inversão da matriz será feita explicitamente pela transposta da matriz dos cofatores (afinal de contas, é uma matriz 2×2).

4 Aproximação numérica da derivada

Dada uma função $f(x)$ diferenciável, sua derivada é o limite $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Trocando h por $-h$, a derivada é escrita também como o limite $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$ de modo que temos também a fórmula de diferença central

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Se f for suficientemente diferenciável, escrevemos sua série de Taylor

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!} + \dots \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Então

$$F_0(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + f'''(x)\frac{h^2}{3!} + f^{(5)}(x)\frac{h^4}{5!} + \dots$$

Para $\lambda > 1$ consideramos o esquema usual da extrapolação de Richardson, mas utilizamos o fato da série ter somente potências pares de h . Assim escrevemos

$$F_1(h) = \frac{\lambda^2 F_0(h/\lambda) - F_0(h)}{\lambda^2 - 1}$$

e, em geral, para $j \geq 1$,

$$F_j(h) = \frac{\lambda^{2j} F_{j-1}(h/\lambda) - F_{j-1}(h)}{\lambda^{2j} - 1}$$

Para este projeto, vamos escolher um determinado $\lambda > 1$, um $h_0 > 0$ e um $N_0 \in \mathbb{N}$ e aproximar a derivada por $F_{N_0}(h_0)$.

5 Representação de imagens em arquivos texto

Esta seção descreve alguns formatos de representação de imagens em arquivos de tipo texto. Tais formatos, apesar de não serem tão populares como os formatos binários que ocupam muito menos espaço, são usados por uma série de programas de conversão e são convenientes para serem usados como formatos intermediários para saída de programas. Originalmente este formatos eram usados para transmissão de imagens por correio eletrônico.

Estaremos interessados nos chamados formatos PNM (portable anymap): PBM (portable bitmap file format), PGM (portable graymap file format) e PPM (portable pixmap file format) que correspondem, respectivamente, a imagens branco e preto, imagens em escala de cinza e imagens coloridas.

5.1 PBM

A definição de um arquivo PBM é a seguinte:

- Um “número mágico” para identificar o tipo de arquivo. Um arquivo PBM usa os caracteres “P1”.
- Espaço (brancos, TABs, CRs, LFs).
- Uma largura, em caracteres texto decimais.
- Espaço.
- Uma altura, em caracteres texto decimais.
- Espaço.
- Largura*Altura caracteres “0” ou “1”, começando do canto superior esquerdo da imagem. O caractere “1” representa preto e “0” representa branco.
- Espaços na seção acima são ignorados.
- Linhas que começam com “#” são comentários e portanto são ignoradas.
- Nenhuma linha pode ser mais longa que 70 caracteres.

Por exemplo:

```
P1
# feep.pbm
24 7
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0
0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0
0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0
0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

corresponde à imagem



que em tamanho normal é

FEEP

5.2 PGM

A definição de um arquivo PGM é a seguinte:

- Um “número mágico” para identificar o tipo de arquivo. Um arquivo PGM usa os caracteres “P2”.
- Espaço (brancos, TABs, CRs, LFs).
- Uma largura, em caracteres texto decimais.
- Espaço.
- Uma altura, em caracteres texto decimais.
- Espaço.
- O máximo nível de cinza, em caracteres texto decimais.
- Largura*Altura níveis de cinza entre 0 e o valor máximo especificado separados por espaço, começando do canto superior esquerdo da imagem. O nível 0 representa preto e o nível máximo representa branco.
- Linhas que começam com “#” são comentários e portanto são ignoradas.
- Nenhuma linha pode ser mais longa que 70 caracteres.

Por exemplo:

```
P2
# feep.pgm
24 7
15
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 3 3 3 3 0 0 7 7 7 7 0 0 11 11 11 11 0 0 15 15 15 15 0
0 3 0 0 0 0 0 7 0 0 0 0 0 11 0 0 0 0 0 15 0 0 15 0
0 3 3 3 0 0 0 7 7 7 0 0 0 11 11 11 0 0 0 15 15 15 15 0
0 3 0 0 0 0 0 7 0 0 0 0 0 11 0 0 0 0 0 15 0 0 0 0
0 3 0 0 0 0 0 7 7 7 7 0 0 11 11 11 11 0 0 15 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

corresponde à imagem



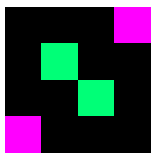
5.3 PPM

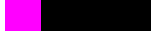
A definição de um arquivo PPM é a seguinte:

- Um “número mágico” para identificar o tipo de arquivo. Um arquivo PGM usa os caracteres “P3”.
- Espaço (brancos, TABs, CRs, LFs).
- Uma largura, em caracteres texto decimais.
- Espaço.
- Uma altura, em caracteres texto decimais.
- Espaço.
- O máximo nível de componente de cor, em caracteres texto decimais.
- Largura*Altura triplas de níveis de cor entre 0 e o valor máximo especificado separados por espaço, começando do canto superior esquerdo da imagem. Cada valor das triplas corresponde, respectivamente, aos níveis de vermelho, verde e azul. O valor 0 significa que a cor não aparece enquanto que o valor máximo significa que a cor está no nível máximo.
- Linhas que começam com “#” são comentários e portanto são ignoradas.
- Nenhuma linha pode ser mais longa que 70 caracteres.

Por exemplo:

```
P3
# feep.ppm
4 4
15
0 0 0 0 0 0 0 0 0 15 0 15
0 0 0 0 15 7 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 15 7 0 0 0
15 0 15 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```



corresponde à imagem  que aparece em tons de cinza no papel.

6 Bacia de atração de uma raiz

Considere um sistema de equações como em (1). Dizemos que um ponto (x_0, y_0) está na *bacia de atração* de uma solução $(\bar{x}, \bar{y})$ se a sequência correspondente do Método de Newton (2) for convergente a $(\bar{x}, \bar{y})$.

Dado um sistema (1) e um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, o objetivo deste exercício-programa é mapear as bacias de atração das soluções do sistema em R .

Para isso você deverá escrever um programa que cria um arquivo de imagem colorida PPM de tamanho $N \times M$ correspondente ao retângulo R (use uma função afim ou regra de três). O nível máximo de cada componente deve ser 255.

Cada pixel deve ser pintado com uma cor correspondente à raiz encontrada a partir do ponto correspondente. Em caso de parada do método de Newton por erro ou excesso de iterações, pinte o pixel de preto $RGB = (0, 0, 0)$. Os pontos que estiverem muito próximos da raiz (2 ou menos pixels de distância) devem ser pintados de branco $RGB = (255, 255, 255)$.

Os outros pontos podem ser pintados com o esquema que você preferir, mas tente não usar cores muito parecidas.

Como sugestão, você pode usar a tabela abaixo. Acrescente mais cores se você achar necessário.

raiz	RGB	cor
1	(255, 0, 0)	
2	(0, 255, 0)	
3	(0, 0, 255)	
4	(255, 255, 0)	
5	(255, 0, 255)	
6	(0, 255, 255)	

7 Testes

Para as derivadas numéricas, utilize $\lambda = 2$, $h_0 = 0.1$ e $N_0 = 6$. Para o método de Newton, use $ITMAX = 50$ e $\varepsilon = 10^{-6}$.

Teste seu programa para:

(a)

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 9 & = 0 \\ 18y - 14x^2 + 45 & = 0 \end{cases}$$

no retângulo $[-3, 3] \times [-3, 3]$ com $N = 100$ e $M = 100$.

(b)

$$\begin{cases} x^3 + 4y^2 - 9 & = 0 \\ 18y - 14x^4 + 45 & = 0 \end{cases}$$

no retângulo $[-3, 3] \times [-3, 3]$ com $N = 100$ e $M = 100$.

(c)

$$\begin{cases} x^2 - e^y &= 0 \\ y + e^{xy} &= 0 \end{cases}$$

no retângulo $[-3, 3] \times [-3, 3]$ com $N = 100$ e $M = 100$.

8 Critério de correção e demais regras do jogo

- Exercícios-programa atrasados não serão recebidos.
- O arquivo fonte deverá estar devidamente identificado com seu nome e NUSP. A ausência de identificação poderá implicar na invalidação do exercício-programa ou na redução da nota final.

Serão considerados os seguintes itens na correção:

- Organização e apresentação (indentação e comentários).
- Critério de parada: ITMAX e variação relativa.
- Cuidado tomado nas divisões por zero.
- A saída do programa deverá ser um arquivo PPM válido.