TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA - MAP2313
PROVA 1
11/05/2018

Justifique suas respostas. Boa prova.

Questão 1.

a) Mostre que a série de Fourier da função 2π-periódica $f(\theta) = \theta^2$, para $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\theta.$$

b) Enuncie o teorema que afirma que a série acima converge para $f(\theta)$, para toda escolha de $\theta \in \mathbb{R}$.

c) Use a série acima e uma escolha apropriada de θ para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{48} = -\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2}.$$

Questão 2. A equação do calor com condições de contorno de Neumann

$$u_t = ku_{xx}, \quad u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \tag{1}$$

descreve a evolução da temperatura $u(x,t)$ em uma barra de comprimento ℓ insulada e com extremos insulados. Aqui a variável x descreve um ponto da barra e $t \geq 0$ é um instante de tempo.

a) Use o método de separação de variáveis para mostrar que as funções

$$u_n(x,t) = \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 kt}{\ell^2}\right) \cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

são soluções da equação (1) para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$.

b) Encontre a solução de (1) com condição inicial $u(x,0) = f_3(x)$, onde

$$f_3(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos\frac{\pi x}{\ell} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi x}{\ell} - \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{\ell}\right).$$

Justifique sua resposta. Se quiser, tome $\ell = 1$ ou $\ell = \pi$ neste e no próximo item, mas avise que o está fazendo.

c) Use a Questão 1.a) para encontrar a solução de (1) com condição inicial $f(x) = x^2$. Justifique sua resposta.

Questão 3.

a) Seja V um espaço vetorial com produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ um conjunto de vetores ortogonais uns aos outros e diferentes de $\vec{0}$. Seja $v \in V$ um vetor qualquer. Mostre que a projeção ortogonal de v no subespaço gerado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é

$$w = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i.$$

b) Seja $V = \{f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R};\ f \text{ contínua}\}$ o espaço vetorial das funções contínuas, com valores reais, definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$, com o produto escalar

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Sabendo que o conjunto $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n=1}^{\infty}$ é ortogonal segundo este produto escalar, encontre a projeção ortogonal da função $f(x) = x^2$ no espaço gerado por $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n=1}^{3}$.