

# Grafos e BFS

CLRS 22 Elementary Graph Algorithms

CLRS 22.1 e 22.2

# Busca em largura

É uma **moldura** de algoritmos que vão fazendo seu serviço enquanto percorrem o grafo.

## Inicialização

BFS( $G, s$ )

```
1 para cada  $u \in G.V \setminus \{s\}$  faça
2    $u.cor \leftarrow$  branco
3    $u.d \leftarrow \infty$ 
4    $u.\pi \leftarrow$  nil
5  $Q \leftarrow \emptyset$   $\triangleright$  fila dos vértices descobertos

6  $s.cor \leftarrow$  cinzento
7  $s.d \leftarrow 0$ 
8  $s.\pi \leftarrow$  nil
9  $Q.INSIRA(s)$ 
```

# Busca em largura

BFS( $G, s$ )

```
1 para cada  $u \in G.V \setminus \{s\}$  faça
2    $u.cor \leftarrow$  branco    $u.d \leftarrow \infty$     $u.\pi \leftarrow$  nil
3    $Q \leftarrow \emptyset$   $\triangleright$  fila dos vértices descobertos
4    $s.cor \leftarrow$  cinzento    $s.d \leftarrow 0$     $s.\pi \leftarrow$  nil
5    $Q.INSIRA(s)$ 

6 enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
7    $u \leftarrow Q.REMOVA()$ 
8   para cada  $v \in u.Estrela$  faça
9     se  $v.cor =$  branco
10      então  $v.cor \leftarrow$  cinzento
11               $v.d \leftarrow u.d + 1$ 
12               $v.\pi \leftarrow u$ 
13               $Q.INSIRA(v)$ 
14    $u.cor \leftarrow$  preto
```

# Descrição

**Vértice branco:** ainda não descoberto

**Vértice cinzento:** descoberto mas não processado  
(são os vértices em  $Q$ )

**Vértice preto:** processado

BFS devolve em  $\pi$  uma **árvore BF** enraizada em  $s$ .

$u.\pi$ : predecessor ou pai de  $u$  na árvore BF

$u.d$ : distância de  $s$  a  $u$  em  $G$

BFS descobre todos os vértices à distância  $k$   
antes de descobrir qualquer um à distância  $k + 1$

## Consumo de tempo

Cada vértice é descoberto uma única vez, pois é branco e, ao ser descoberto, passa a ser cinzento, e depois preto.

A estrela de cada vértice descoberto é percorrida uma única vez, quando o vértice sai de  $Q$ .

Logo, com listas de adjacência, o consumo de tempo é  $O(n + m)$ , pois a inicialização custa  $\Theta(n)$  e a soma do tamanho das listas de adjacências percorridas é  $O(m)$ .

O consumo de tempo de uma BFS é linear no tamanho do grafo.

## Corretude

Vamos verificar que  $u.d$  é a distância de  $s$  a  $u$  e que a árvore BF contém um caminho mínimo de  $s$  a  $u$ .

Seja  $\delta(s, u)$  a distância de  $s$  a  $u$  em  $G$ .

**Lema:**  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$  para toda aresta  $uv$ .

**Lema:**  $v.d \geq \delta(s, v)$  para todo vértice ao final da BFS.

**Lema:** Se  $Q$  contém os vértices  $v_1, v_2, \dots, v_r$  nesta ordem, então  $v_r.d \leq v_1.d + 1$  e  $v_i.d \leq v_{i+1}.d$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ .

## Corretude

Seja  $\delta(s, u)$  a distância de  $s$  a  $u$  em  $G$ .

**Lema:**  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$  para toda aresta  $uv$ .

**Lema:**  $v.d \geq \delta(s, v)$  para todo vértice ao final da BFS.

**Lema:** Se  $Q$  contém os vértices  $v_1, v_2, \dots, v_r$  nesta ordem, então  $v_r.d \leq v_1.d + 1$  e  $v_i.d \leq v_{i+1}.d$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ .

**Corolário:** Se  $v_i$  entra na fila antes de  $v_j$ , então  $v_i.d \leq v_j.d$  quando  $v_j$  entra na fila.

**Teorema:** Ao final da BFS,  $v.d = \delta(s, v)$  para todo  $v \in V$ . Ademais, para todo  $v$  alcançável de  $s$  com  $v \neq s$ , um caminho mais curto de  $s$  a  $v$  consiste em um caminho mais curto de  $s$  a  $\pi[v]$  seguido da aresta  $v.\pi$ .

## Algumas aplicações

- ▶ Determinar componentes conexas de um grafo.
- ▶ Determinar se um grafo é bipartido.
- ▶ Decidir se uma palavra é aceita por um autômato não determinístico.
- ▶ Algoritmo de Edmonds-Karp para fluxo máximo.

As duas últimas só com breves comentários em aula.

## Componentes conexas

Num grafo dizemos que um vértice  $u$  é **alcançável** a partir de um vértice  $v$  se existe caminho de  $v$  a  $u$ .

- ▶ Num grafo dirigido, essa relação é transitiva e reflexiva.
- ▶ Num grafo não dirigido, ela é de equivalência. Os subgrafos induzidos pelas classes são as componentes conexas do grafo.

Como achar as componentes?

Basta achar as classes.

BFS a partir de um vértice determina sua classe.

## Grafos bipartidos

Um grafo é **bipartido** se é possível dividir seus vértices em duas classes de tal modo que cada aresta tem uma ponta em cada classe.

**ALGORITMO** -Decide se  $G$  (conexo) é bipartido

Faça uma BFS. Pequena alteração: Se  $v.d == u.d$ , devolva NÃO.  
Se terminou, a bipartição é dada pela paridade do  $d$ .

O algoritmo tem a mesma complexidade da BFS. A corretude vem junto com o

**Teorema**

*Um grafo é bipartido se e só se não tem um circuito ímpar.*

**Prova:** Necessidade é fácil. Suficiência: modificar o algoritmo para devolver um circuito ímpar no caso NÃO.

## Grafos tripartidos

Um grafo é **tripartido** se é possível dividir seus vértices em três classes de tal modo que cada aresta tenha as pontas em classes diferentes.

**Exercício**

*Encontrar um algoritmo polinomial para decidir se um grafo é tripartido.*

**PRÊMIOS**

Nota A no curso

+

Título de Doutor

+

US\$10<sup>6</sup>