

CLRS 2.3, 4.1 e 4.2

Rearranja $A[p..r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

Método: Divisão e conquista.

```

MERGESORT ( $A, p, r$ )
1  se  $p < r$ 
2    então  $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$ 
3          MERGESORT ( $A, p, q$ )
4          MERGESORT ( $A, q + 1, r$ )
5          INTERCALA ( $A, p, q, r$ )
    
```

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

Intercalação

Problema: Dados $A[p..q]$ e $A[q+1..r]$ crescentes, reorganizar $A[p..r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

Entra:

	p		q				r		
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Sai:

	p		q				r		
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Intercalação

INTERCALA (A, p, q, r)

```
0  ▷  $B[p..r]$  é um vetor auxiliar
1  para  $i \leftarrow p$  até  $q$  faça
2       $B[i] \leftarrow A[i]$ 
3  para  $j \leftarrow q+1$  até  $r$  faça
4       $B[r+q+1-j] \leftarrow A[j]$ 
5   $i \leftarrow p$ 
6   $j \leftarrow r$ 
7  para  $k \leftarrow p$  até  $r$  faça
8      se  $B[i] \leq B[j]$ 
9          então  $A[k] \leftarrow B[i]$ 
10              $i \leftarrow i+1$ 
11         senão  $A[k] \leftarrow B[j]$ 
12              $j \leftarrow j-1$ 
```

Essa versão do intercala não é estável. Por que?

Simulação

A	p	22	33	55	77	q	99	11	44	66	88	r
B												

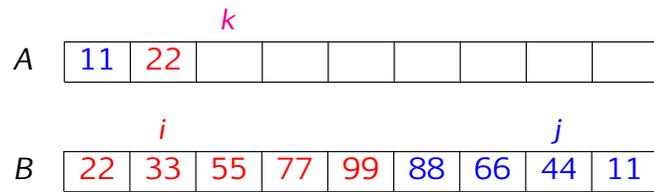
Simulação

A	k											
B	i	22	33	55	77	99	88	66	44	11	j	

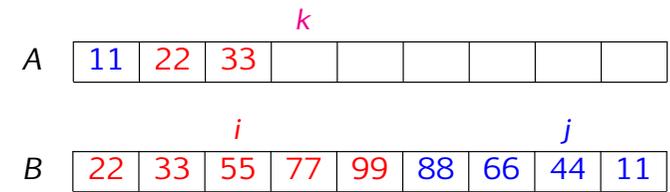
Simulação

A	k	11										
B	i	22	33	55	77	99	88	66	44	11	j	

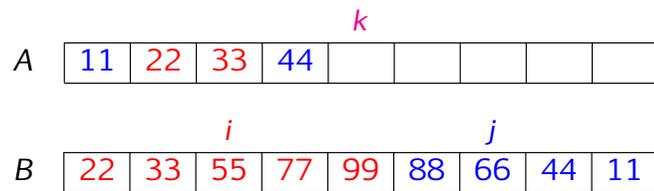
Simulação



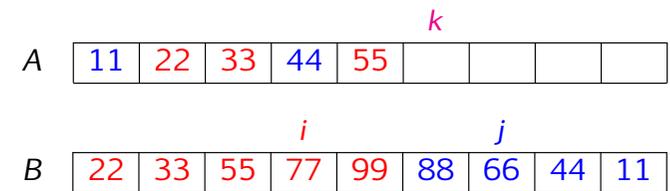
Simulação



Simulação



Simulação



Simulação

A	11	22	33	44	55	66			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Labels: k above the 7th cell of A; i above the 4th cell of B; j above the 6th cell of B.

Simulação

A	11	22	33	44	55	66	77		
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Labels: k above the 7th cell of A; i above the 5th cell of B; j above the 6th cell of B.

Simulação

A	11	22	33	44	55	66	77	88	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Labels: k above the 9th cell of A; $i = j$ above the 5th cell of B.

Simulação

A	11	22	33	44	55	66	77	88	99
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Labels: j above the 5th cell of B; i above the 6th cell of B.

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(n)$
2	$\Theta(n)$
3	$\Theta(n)$
4	$\Theta(n)$
5-6	$\Theta(1)$
7	$\Theta(n)$
8	$\Theta(n)$
9-12	$\Theta(n)$
total	$\Theta(7n + 1) = \Theta(n)$

Conclusão

O algoritmo **INTERCALA** consome $\Theta(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo **INTERCALA** consome tempo $\Theta(n)$.

Mergesort

MERGESORT (A, p, r)

```
1 se  $p < r$ 
2   então  $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$ 
3     MERGESORT ( $A, p, q$ )
4     MERGESORT ( $A, q + 1, r$ )
5     INTERCALA ( $A, p, q, r$ )
```

linha	consumo máximo na linha
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(1)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$\Theta(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Mergesort

$T(n) :=$ consumo de tempo **máximo** quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad (1)$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n \end{aligned}$$

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) = 2T(n/2) + n \quad (\text{e, deixamos implícito, } T(1) = 1)$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k , onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k : $T(2^k) = 2^k + k 2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Então $T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^k$ pela recorrência.

$$\begin{aligned} \text{Logo } T(2^k) &= 2(2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}) + 2^k \\ &= 2^k + (k-1)2^k + 2^k = 2^k + k 2^k. \blacksquare \end{aligned}$$

Resolução de recorrências

- ▶ Substitua a notação assintótica por função da classe. Por exemplo, An^2 em vez de $O(n^2)$.
- ▶ Restrinja-se a valores convenientes de n , se necessário.
- ▶ Estipule que na base o valor é 1.
- ▶ Use expansão ou árvore de recorrência para determinar um “chute” de solução.
- ▶ Confira se o chute está correto.

Exemplos:

- ▶ $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$
- ▶ $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- ▶ $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$
- ▶ $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$

Resolução de recorrências

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n/2) + 1 \\ &= (T(n/2^2) + 1) + 1 = T(n/2^2) + 2 \\ &= (T(n/2^3) + 1) + 2 = T(n/2^3) + 3 \\ &= (T(n/2^4) + 1) + 3 = T(n/2^4) + 4 \\ &= \dots = T(n/2^k) + k \quad \text{para } k = \lg n \\ &= T(1) + \lg n = 1 + \lg n = \Theta(\lg n). \end{aligned}$$

Resolução de recorrências

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1 \text{ e } T(n) = T(n-1) + n \text{ para } n \geq 2.$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-4) + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \dots = T(1) + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + 2 + \dots + (n-1) + (n-2) + n = \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}$$

Resolução de recorrências

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \dots = T(1) + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + 2 + \dots + (n-1) + (n-2) + n = \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}$$

Note que não temos restrição no n neste caso.

Só faça a conta quando

os termos que saem da recorrência são o mesmo

(como o n na recorrência do Mergesort, e o 1 na anterior).

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 3T(n/2) + n \text{ para } n \geq 2 \text{ potência de } 2.$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= 3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n = 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\
&= 3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n = 3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2n + \frac{3}{2}n + n
\end{aligned}$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= 3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n = 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\
&= 3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n = 3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2n + \frac{3}{2}n + n
\end{aligned}$$

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n = 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\
&= 3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2n + \frac{3}{2}n + n \\
&= 3^4T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^3n + \left(\frac{3}{2}\right)^2n + \frac{3}{2}n + n \\
&= \dots = 3^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}n + \dots + \frac{3}{2}n + n \text{ para } k = \lg n
\end{aligned}$$

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n = 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\ &= \dots = 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \dots + \frac{3}{2}n + n \quad \text{para } k = \lg n \\ &= 3^{\lg n} T(1) + \sum_{i=0}^{\lg n - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^i n = 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n \\ &= 3^{\lg n} + 2 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1 \right) n \\ &= 3^{\lg n} + 2 \left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1 \right) n \\ &= 3^{\lg n} + 2(3^{\lg n} - n) \end{aligned}$$

CLRS 7

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n = 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\ &= \dots = 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \dots + \frac{3}{2}n + n \quad \text{para } k = \lg n \\ &= 3^{\lg n} T(1) + \sum_{i=0}^{\lg n - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^i n = 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n \\ &= 3^{\lg n} + 2 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1 \right) n \\ &= 3^{\lg n} + 2 \left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1 \right) n \\ &= 3^{\lg n} + 2(3^{\lg n} - n) \\ &= 3^{\lg n} + 2 \cdot 3^{\lg n} - 2n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n = 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\ &= \dots = 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \dots + \frac{3}{2}n + n \quad \text{para } k = \lg n \\ &= 3^{\lg n} T(1) + \sum_{i=0}^{\lg n - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^i n = 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n \end{aligned}$$