

Caminhos mais curtos

CLRS Secs 24.3 e 25.2

Caminhos mais curtos

Dados:

$G = (V, E)$: grafo **dirigido**

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o comprimento de um caminho de u a v de comprimento mínimo.

Problema 1: Dados G , c e um vértice s de G , encontrar a distância de s a cada vértice de G .

Problema 2: Dados G e c , encontrar a distância entre todo par de vértices de G .

Algoritmo de Dijkstra: comprimentos não negativos

Algoritmo de Floyd-Warshall: sem circuitos negativos

Circuitos negativos

Dados:

$G = (V, E)$: grafo **dirigido**

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o comprimento de um caminho entre u e v de comprimento mínimo.

Quando há um **circuito de comprimento negativo no grafo**, a distância entre certos vértices pode ficar mal-definida.

Poderíamos dar “voltas” num circuito negativo, cada vez obtendo um “caminho” de comprimento menor.

Assim definimos a distância $\delta(u, v)$ como $-\infty$, caso exista circuito negativo alcançável de u , e o comprimento de um caminho mais curto de u a v c.c.

Propriedades

P : caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c , seja $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k . Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j .

Corolário: Para G e c , se o último arco de um caminho mais curto de s a t é o arco ut , então $\delta(s, t) = \delta(s, u) + c(ut)$.

Lema: Para G , c e s ,

$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + c(uv)$ para todos os arcos uv .

Algoritmo de Dijkstra

π : representa os caminhos mínimos até s

d : guarda estimativa a distância de s ao vértice

```

DIJKSTRA ( $G, c, s$ )
1  para  $v \in V(G)$  faça     $v.d \leftarrow \infty$      $v.\pi \leftarrow \text{nil}$ 
2   $s.d \leftarrow 0$ 
3   $Q \leftarrow V(G)$     ▷ fila de prioridade: chave de  $v$  é  $v.d$ 
4  enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
5       $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
6      para cada  $v \in \text{adj}(u)$  faça
7          se  $v \in Q$  e  $v.d > u.d + c(uv)$ 
8              então  $v.\pi \leftarrow u$      $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$ 
9   $\pi$  e  $d$  são a informação desejada.

```

u d Invariantes: s u d δ s u

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

```

DIJKSTRA ( $G, c, s$ )
1  para  $v \in V(G)$  faça     $v.d \leftarrow \infty$      $v.\pi \leftarrow \text{nil}$ 
2   $s.d \leftarrow 0$ 
3   $Q \leftarrow V(G)$     ▷ fila de prioridade: chave de  $v$  é  $v.d$ 
4  enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
5       $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
6      para cada  $v \in \text{adj}(u)$  faça
7          se  $v \in Q$  e  $v.d > u.d + c(uv)$ 
8              então  $v.\pi \leftarrow u$      $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$ 
9   $\pi$  e  $d$  são a informação desejada.

```

Se Q for uma lista simples:

Linha 3 e **EXTRACT-MIN** : $O(n)$

Consumo de tempo do Dijkstra: $O(n^2)$

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

```

DIJKSTRA ( $G, c, s$ )
1  para  $v \in V(G)$  faça     $v.d \leftarrow \infty$      $v.\pi \leftarrow \text{nil}$ 
2   $s.d \leftarrow 0$ 
3   $Q \leftarrow V(G)$     ▷ fila de prioridade: chave de  $v$  é  $v.d$ 
4  enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
5       $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
6      para cada  $v \in \text{adj}(u)$  faça
7          se  $v \in Q$  e  $v.d > u.d + c(uv)$ 
8              então  $v.\pi \leftarrow u$      $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$ 
9   $\pi$  e  $d$  são a informação desejada.

```

Se Q for implementada com um heap:

Inicialização: $O(n)$ **EXTRACT-MIN** e **DECREASE-KEY** : $O(\lg n)$

DECREASE-KEY : linha 8

Consumo de tempo do Dijkstra: $O(m \lg n)$

Consumo de tempo com Fibonacci heap: $O(m + n \lg n)$

Problema 2

Dados:

$G = (V, E)$: grafo dirigido

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Problema 2: Dados G e c ,
encontrar a distância entre todo par de vértices de G .

Hipótese:

Não há circuito de comprimento negativo em G .

Algoritmo de Floyd-Warshall: programação dinâmica

Propriedades

P : caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c , seja $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k . Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j .

Vamos identificar $V = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Para $k \in [n]$, seja P um caminho mais curto de s a t cujos vértices internos estão todos em $[k]$.

Floyd-Warshall: Usa caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k-1]$ para obter caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Usa caminhos mínimos

com vértices intermediários em $[k-1]$ para obter caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Seja P um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k]$.

Se P não usa k como vértice intermediário, então P é um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k-1]$.

senão $P = P' \cdot P''$ onde

P' é um caminho mínimo de i a k em G com vértices intermediários em $[k-1]$ e P'' é um caminho mínimo de k a j em G com vértices intermediários em $[k-1]$.

Recorrência

$D^k[i][j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k]$.

$$D^k[i][j] = \begin{cases} c_{ij} & \text{se } k = 0 \\ \min\{D^{k-1}[i][j], D^{k-1}[i][k] + D^{k-1}[k][j]\} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

A matrix D^n tem a resposta ao **Problema 2**.

Algoritmo de Floyd-Warshall: calcula D^n pela recorrência.

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i][j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k-1]$.

FLOYD-WARSHALL- (G, c)

```
1   $n \leftarrow |V(G)|$ 
2   $D^0 \leftarrow c$ 
3  para  $k \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4      para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5          para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
6               $D^k[i][j] = \min\{D^{k-1}[i][j], D^{k-1}[i][k] + D^{k-1}[k][j]\}$ 
7  devolva  $D^n$ 
```

Consumo de tempo: $\Theta(n^3)$

Dijkstra: $O(nm \lg n)$
 $O(n(m + n \lg n))$ com Fibonacci heap.

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i][j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k - 1]$.

FLOYD-WARSHALL- (G, c)

```

1   $n \leftarrow |V(G)|$ 
2   $D^0 \leftarrow c$ 
3  para  $k \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4    para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5      para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
6         $D^k[i][j] = \min\{D^{k-1}[i][j], D^{k-1}[i][k] + D^{k-1}[k][j]\}$ 
7  devolva  $D^n$ 

```

E os caminhos mais curtos?

Guarde informação durante o processo acima para obter um caminho mais curto entre quaisquer dois vértices de G .

Simulação

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

Distâncias:

$$D^5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Como obter os caminhos?

Exercício!