

CLRS cap 8

**Problema:** Rearranjar um vetor  $A[1..n]$  de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo  $O(n \lg n)$ .

Existe algoritmo **assintoticamente** melhor?

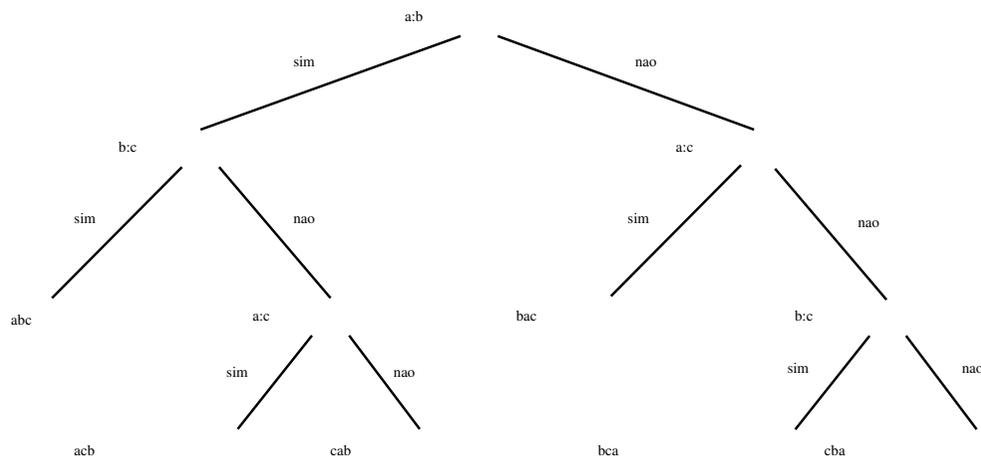
**NÃO**, se o algoritmo é baseado em **comparações**.

**Prova?**

Qualquer algoritmo baseado em comparações é uma **"árvore de decisão"**.

## Exemplo

ORDENA-POR-INSERÇÃO ( $A[1..3]$ ):



## Limite inferior

Considere uma **árvore de decisão** para  $A[1..n]$ .

Número de comparações, no pior caso?

**Resposta:** **altura**,  $h$ , da árvore de decisão.

Todas as  $n!$  permutações de  $1, \dots, n$  devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura  $h$  tem no máximo  $2^h$  folhas.

**Prova:** Por indução em  $h$ . A afirmação vale para  $h = 0$ .

**Prova:** Por indução em  $h$ . A afirmação vale para  $h = 0$ .

Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que  $h$ , para  $h \geq 1$ . **Prova:** Por indução em  $h$ . A afirmação vale para  $h = 0$ .

Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que  $h$ , para  $h \geq 1$ .

Número de folhas de árvore de altura  $h$  é a soma do número de folhas das subárvores, que têm altura  $\leq h - 1$ . **Prova:** Por indução em  $h$ . A afirmação vale para  $h = 0$ .

Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que  $h$ , para  $h \geq 1$ .

## Limite inferior

Assim, devemos ter  $2^h \geq n!$ , donde  $h \geq \lg(n!)$ .

$$n! \geq \prod_{i=\frac{n}{2}}^n i \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Portanto,

$$h \geq \lg(n!) \geq \frac{1}{2} n(\lg n - 1).$$

Mais precisamente, a fórmula de Stirling diz que

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Disso, temos que  $h \geq \lg(n!) \geq \lg\left(\frac{n}{e}\right)^n = n(\lg n - \lg e)$ .

## Conclusão

Todo algoritmo de ordenação baseado em comparações faz

$$\Omega(n \lg n)$$

comparações no pior caso.

## Counting Sort

Recebe inteiros  $n$  e  $k$ , e um vetor  $A[1..n]$  onde cada elemento é um inteiro entre 1 e  $k$ .

Devolve um vetor  $B[1..n]$  com os elementos de  $A[1..n]$  em ordem crescente.

COUNTINGSORT( $A, n$ )

```

1  para  $i \leftarrow 1$  até  $k$  faça
2     $C[i] \leftarrow 0$ 
3  para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4     $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$ 
5  para  $i \leftarrow 2$  até  $k$  faça
6     $C[i] \leftarrow C[i] + C[i - 1]$ 
7  para  $j \leftarrow n$  decrescendo até 1 faça
8     $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$ 
9     $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$ 
10 devolva  $B$ 

```

## Consumo de tempo

linha	consumo na linha
1	$\Theta(k)$
2	$O(k)$
3	$\Theta(n)$
4	$O(n)$
5	$\Theta(k)$
6	$O(k)$
7	$\Theta(n)$
8	$O(n)$
9	$O(n)$
10	$\Theta(1)$

total      ????

linha	consumo na linha
1	$\Theta(k)$
2	$O(k)$
3	$\Theta(n)$

COUNTINGSORT( $A, n$ )

```
1 para  $i \leftarrow 1$  até  $k$  faça
2    $C[i] \leftarrow 0$ 
3 para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4    $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$ 
5 para  $i \leftarrow 2$  até  $k$  faça
6    $C[i] \leftarrow C[i] + C[i - 1]$ 
7 para  $j \leftarrow n$  decrescendo até 1 faça
8    $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$ 
9    $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$ 
10 devolva  $B$ 
```

Consumo de tempo:  $\Theta(k + n)$

Se  $k = O(n)$ , o consumo de tempo é  $\Theta(n)$ .

Algoritmo usado para ordenar

- ▶ inteiros não-negativos com  $d$  dígitos
- ▶ cartões perfurados (Hollerith!)
- ▶ registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo

dígito  $d$ : mais significativo

RADIXSORT( $A, n, d$ )

```
1 para  $i \leftarrow 1$  até  $d$  faça
2   ORDENE( $A, n, i$ )
```

ORDENE( $A, n, i$ ): ordena  $A[1..n]$  pelo  $i$ -ésimo dígito dos números em  $A$  por meio de um algoritmo estável.

## Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é **estável** se sempre que, inicialmente,  $A[i] = A[j]$  para  $i < j$ , a cópia  $A[i]$  termina em uma posição menor do vetor que a cópia  $A[j]$ .

Isso só é relevante quando temos **informação satélite**.

Quais dos algoritmos que vimos são estáveis?

- ▶ inserção direta? seleção direta? bubblesort?
- ▶ mergesort?
- ▶ quicksort?
- ▶ heapsort?
- ▶ countingsort?

## Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a  $k$ , então podemos usar o COUNTINGSORT.

Neste caso, o consumo de tempo é  $\Theta(d(k + n))$ .

Se  $d$  é limitado por uma constante (ou seja, se  $d = O(1)$ ) e  $k = O(n)$ , então o consumo de tempo é  $\Theta(n)$ .

Recebe um inteiro  $n$  e um vetor  $A[1..n]$  onde cada elemento é um número no intervalo  $[0, 1)$ .

A 

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Devolve um vetor  $C[1..n]$  com os elementos de  $A[1..n]$  em ordem crescente.

C 

.03	.12	.38	.42	.47	.62	.77	.82	.91	.93
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

CLRS sec 8.4

## Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$B[0]$ :	.03
$B[1]$ :	.12
$B[2]$ :	
$B[3]$ :	.38
$B[4]$ :	.47 .42
$B[5]$ :	
$B[6]$ :	.62
$B[7]$ :	.77
$B[8]$ :	.82
$B[9]$ :	.93 .91

$B[0]$ :	.03
$B[1]$ :	.12
$B[2]$ :	
$B[3]$ :	.38
$B[4]$ :	.42 .47
$B[5]$ :	
$B[6]$ :	.62
$B[7]$ :	.77
$B[8]$ :	.82
$B[9]$ :	.91 .93

## Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$B[0]$ :	.03
$B[1]$ :	.12
$B[2]$ :	
$B[3]$ :	.38
$B[4]$ :	.42 .47
$B[5]$ :	
$B[6]$ :	.62
$B[7]$ :	.77
$B[8]$ :	.82
$B[9]$ :	.91 .93

.03	.12	.38	.42	.47	.62	.77	.82	.91	.93
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

## Bucket Sort

Recebe um inteiro  $n$  e um vetor  $A[1..n]$  onde cada elemento é um número no intervalo  $[0, 1)$ .

Devolve um vetor  $C[1..n]$  com os elementos de  $A[1..n]$  em ordem crescente.

```

BUCKETSORT( $A, n$ )
1  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
2     $B[i] \leftarrow \text{NIL}$ 
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4    INSIRA( $B[[] A[i]]$ ,  $A[i]$ )
5  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
6    ORDENELISTA( $B[i]$ )
7   $C \leftarrow \text{CONCATENE}(B, n)$ 
8  devolva  $C$ 

```

## Bucket Sort

```

BUCKETSORT( $A, n$ )
1  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
2     $B[i] \leftarrow \text{NIL}$ 
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4    INSIRA( $B[[] A[i]]$ ,  $A[i]$ )
5  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
6    ORDENELISTA( $B[i]$ )
7   $C \leftarrow \text{CONCATENE}(B, n)$ 
8  devolva  $C$ 

```

INSIRA( $p, x$ ): insere  $x$  na lista apontada por  $p$

ORDENELISTA( $p$ ): ordena a lista apontada por  $p$

CONCATENE( $B, n$ ): devolve a lista obtida da concatenação das listas apontadas por  $B[0], \dots, B[n - 1]$ .

## Consumo de tempo

Suponha que os números em  $A[1..n]$  são uniformemente distribuídos no intervalo  $[0, 1)$ .

Suponha que o ORDENELISTA seja o INSERTIONSORT.

Seja  $X_i$  o número de elementos na lista  $B[i]$ .

Seja

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Observe que  $X_i = \sum_j X_{ij}$ .

$Y_i$ : número de comparações para ordenar a lista  $B[i]$ .

## Consumo de tempo

$X_i$ : número de elementos na lista  $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

$Y_i$ : número de comparações para ordenar a lista  $B[i]$ .

Observe que  $Y_i \leq X_i^2$ .

Logo  $E[Y_i] \leq E[X_i^2] = E[(\sum_j X_{ij})^2]$ .

$$\begin{aligned} E[(\sum_j X_{ij})^2] &= E[\sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik}] \\ &= E[\sum_j X_{ij}^2 + \sum_j \sum_{k \neq j} X_{ij} X_{ik}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(\sum_j X_{ij})^2] &= E[\sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik}] \\ &= E[\sum_j X_{ij}^2] + E[\sum_j \sum_{k \neq j} X_{ij} X_{ik}] \end{aligned}$$

## Consumo de tempo

$X_i$ : número de elementos na lista  $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

$Y_i$ : número de comparações para ordenar a lista  $B[i]$ .

Observe que  $Y_i \leq X_i^2$ . Ademais,

$$E[Y_i] \leq \sum_j E[X_{ij}^2] + \sum_j \sum_{k \neq j} E[X_{ij} X_{ik}].$$

Observe que  $X_{ij}^2$  é uma variável aleatória binária. Vamos calcular sua esperança:

$$E[X_{ij}^2] = \Pr[X_{ij}^2 = 1] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}.$$

## Consumo de tempo

Para calcular  $E[X_{ij} X_{ik}]$  para  $j \neq k$ , primeiro note que  $X_{ij}$  e  $X_{ik}$  são variáveis aleatórias independentes.

Portanto,  $E[X_{ij} X_{ik}] = E[X_{ij}] E[X_{ik}]$ .

Ademais,  $E[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}$ .

Logo,

$$\begin{aligned} E[Y_i] &\leq \sum_j \frac{1}{n} + \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n}{n} + n(n-1) \frac{1}{n^2} \\ &= 1 + (n-1) \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

## Consumo de tempo

Agora, seja  $Y = \sum_i Y_i$ .

Note que  $Y$  é o número de comparações realizadas pelo `BUCKETSORT` no total.

Assim  $E[Y]$  é o número esperado de comparações realizadas pelo algoritmo, e tal número determina o consumo assintótico de tempo do `BUCKETSORT`.

Mas então  $E[Y] = \sum_i E[Y_i] \leq 2n - 1 = O(n)$ .

O consumo de tempo esperado do `BUCKETSORT` quando os números em  $A[1..n]$  são uniformemente distribuídos no intervalo  $[0, 1)$  é  $O(n)$ .