MAC 5711 — Análise de Algoritmos

Lista 1 — 14/3/2001

Obs.: em tudo o que se refere a comparar crescimento de funções, supõe-se que as funções dadas são assintoticamente positivas (só têm valores positivos a partir de algum ponto).

Exercícios entregues para correção serão corrigidos na medida do possível. Esta lista não entrará para a média final; assim faça e entregue quantos quiser.

1. Prove:

   (a) $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(m) + g(n))$.

   (b) $\sum_{i=1}^{n} \Theta(1) = \Theta(n)$.

2. A função $\lg^* n$, conhecida como "log estrela", é definida por:

   $$\lg *n = \min\left\{i \geq 0 : \lg^{(i)} n \leq 1\right\}$$

   onde $\lg^{(i)} n$ é lg iterada i vezes:

   $$\lg^{(i)} n = \begin{cases} n & \text{if } i = 0. \\ \lg(\lg^{(i-1)} n) & \text{if } i > 0 \text{ and } \lg^{(i-1)} n > 0. \\ \text{indefinido} & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

   Qual o menor valor de n tal que $\lg^* n = 5$?

3. Classifique essas funções por ordem de crescimento, ou seja, coloque-as numa ordem $g_1, g_2, \ldots, g_{25}$ de forma que $g_{i+1} = \Omega(g_i)$, para cada i. Indique também os casos em que $g_{i+1} = \Theta(g_i)$.

$(3/2)^n$	$(\sqrt{2})^{\lg n}$	$\lg^* n$	n^2	$(\lg n)!$
n^3	$\lg^2 n$	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\lg\lg n$	$n2^n$	$n^{\lg\lg n}$	$\ln n$	2^n
$2^{\ln n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$n!$	$2^{\sqrt{2\lg n}}$	n	$n \lg n$	1

4. Mostre que:

   (a) Se $g(n) = o(f(n))$, então $f(n) + g(n) = \Theta(f(n))$. O que acontece com essa soma se só se sabe que $g(n) = O(f(n))$?

   (b) Se $f_i(n) = O(g_i(n)), i = 1, 2$, então $f_1(n)f_2(n) = O(g_1(n)g_2(n))$.

5. Mostre que se $f(n)$ é um polinômio (assintoticamente positivo) de grau k, então:

   (a) $f(n) = \Theta(n^k)$.

   (b) Se $\varepsilon > 0$, então $f(n) = o(n^{k+\varepsilon})$.

6. Prove ou desprove:

   (a) $f(n) = O(g(n))$ implica $g(n) = O(f(n))$.

   (b) $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n))$

   (c) Se $f(n), g(n) > 1$ para todo n suficientemente grande, e $f(n) = O(g(n))$, então $\lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$.

   (d) $f(n) = O(g(n))$ implica $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

   (e) $f(n) = O(f(n)^2)$.

   (f) $f(n) = O(g(n))$ implica $g(n) = \Omega(f(n))$.

   (g) $f(n) = O(f(n/2))$

7. A função $\lceil \lg n \rceil!$ é limitada polinomialmente? E a função $\lceil \lg \lg n \rceil!$?