

Fluxos em redes

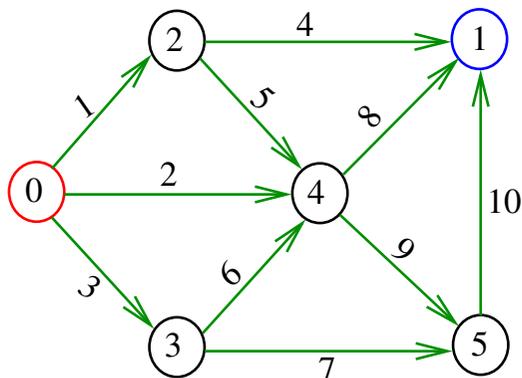
S 22.1

Influxos e efluxos

O **influxo** em v (= *inflow into v*) é a soma dos fluxos nos arcos que entram em v .

O **efluxo** de v (= *outflow from v*) é a soma dos fluxos nos arcos que saem de v .

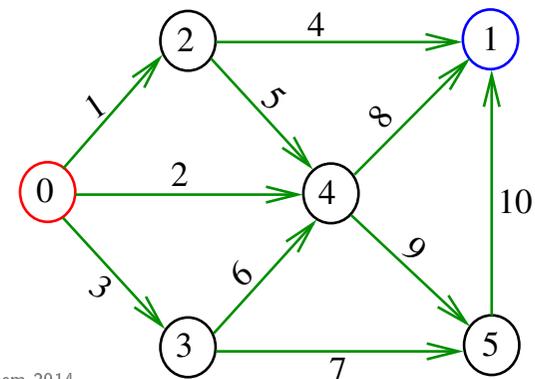
Exemplo: em 4 o influxo é 13 e o efluxo é 17



Fluxos em arcos

Algumas funções a valores reais nos arcos de um digrafo serão denominadas **fluxos**. Esse termo se aplica quando estamos interessados nas relações entre *influxos* e *efluxos*, a serem definidos adiante. Diremos o valor de f num arco é o **fluxo no arco**.

Exemplo: o fluxo no arco 2-4 é 5



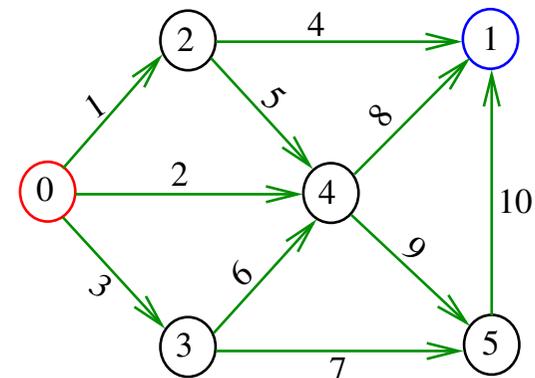
SalDOS

O **saldo** em v é a diferença

$$ef(v) - inf(v)$$

entre o efluxo de v e o influxo em v .

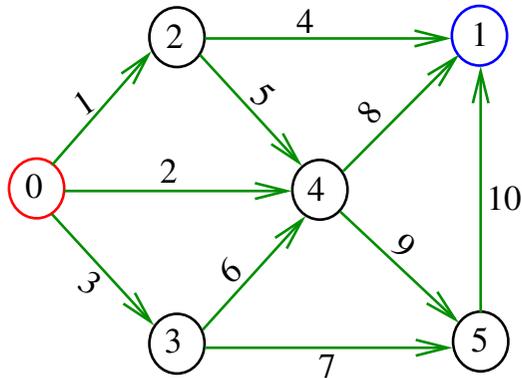
Exemplo: o saldo do vértice 4 é $17 - 13 = 4$



Fluxos

Num digrafo com **vértice inicial** s e **vértice final** t , um **st-fluxo** (= *st-flow*) é uma função f que atribui valores em \mathbb{R}_{\geq} aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de s e t é **nulo** e em s é ≥ 0 .

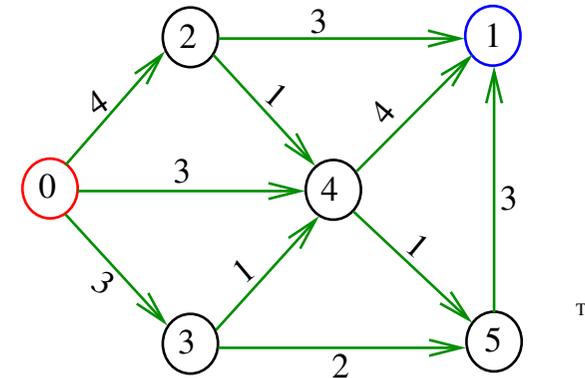
Exemplo: não é um fluxo



Propriedade de Fluxos

Para qualquer fluxo num digrafo com fonte s e sorvedouro t , o saldo em t é igual ao saldo em s com sinal trocado.

Exemplo: saldo em $0 = 10 = -10 =$ saldo em 1

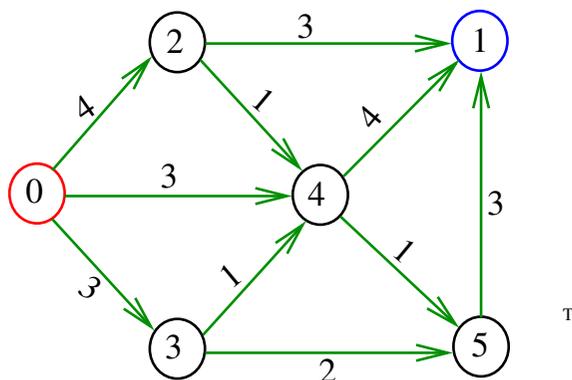


Exemplo: é um fluxo onde $s=0$ e $t=1$

Intensidade de fluxos

A **intensidade** de um fluxo f é o saldo de f em s . Em geral (mas nem sempre) o influxo em s é nulo e o efluxo de t é nulo.

Exemplo: fluxo de intensidade 10



5 / 1

Algoritmos em Grafos — 1º sem 2014

6 / 1

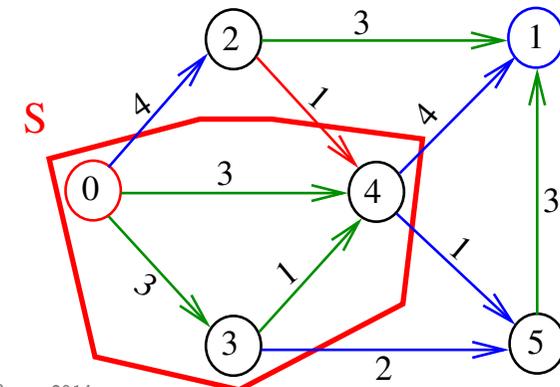
Saldo de fluxo num conjunto de vértices

Dado um conjunto S que contém s mas não contém t , o saldo em S é a diferença

$$ef(S) - inf(S),$$

entre o efluxo de S e o influxo em S

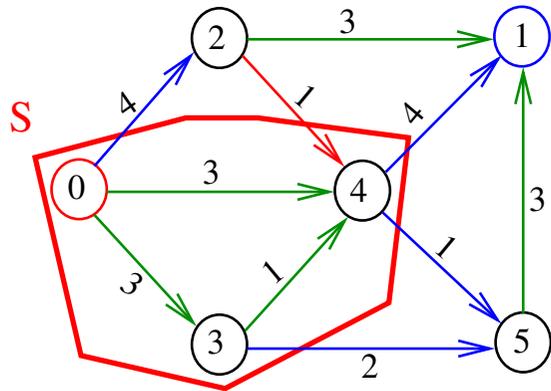
Exemplo: o saldo de S é $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



Propriedade do Saldos

Para qualquer fluxo num digrafo com vértice inicial s e vértice final t e para qualquer conjunto S que contém s mas não contém t , o saldo em S é igual ao saldo em s .

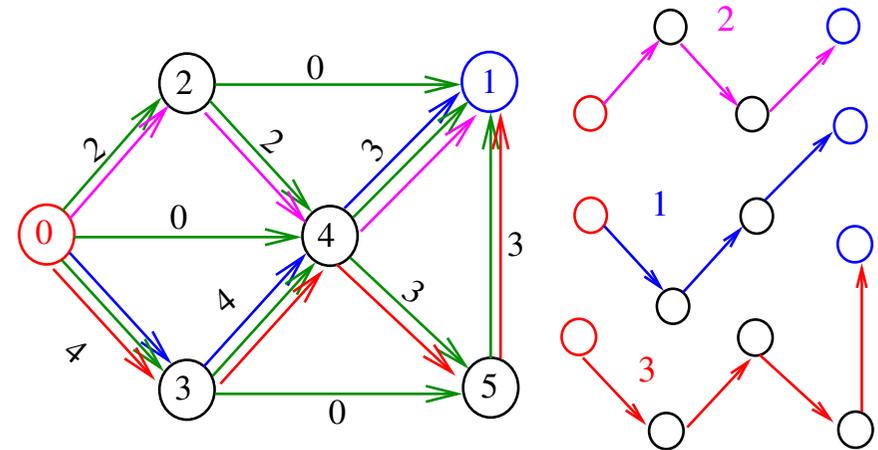
Exemplo: o saldo de S é $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



Fluxos versus coleção de caminhos

Fluxos podem ser representados por caminhos de s a t . A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

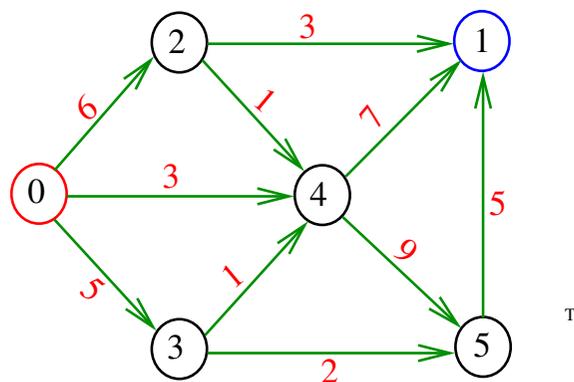
Exemplo:



Redes capacitadas

Uma **rede capacitada** é um digrafo com vértice inicial e vértice final em que a cada um arcos está associado uma **capacidade**, que é ou um número em \mathbb{R}_{\geq} ou o símbolo $+\infty$.

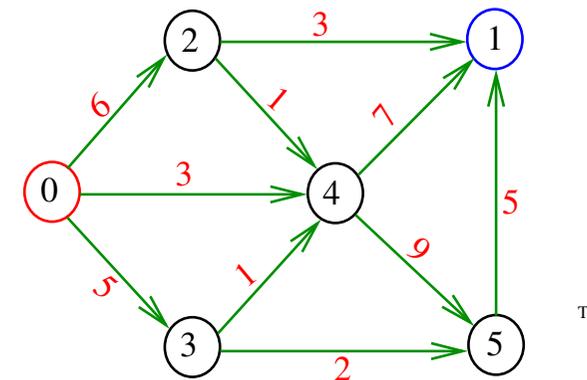
Exemplo:



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

Exemplo: rede capacitada



Exemplo: fluxo que respeita as capacidades

Fluxo máximo (problema primal)

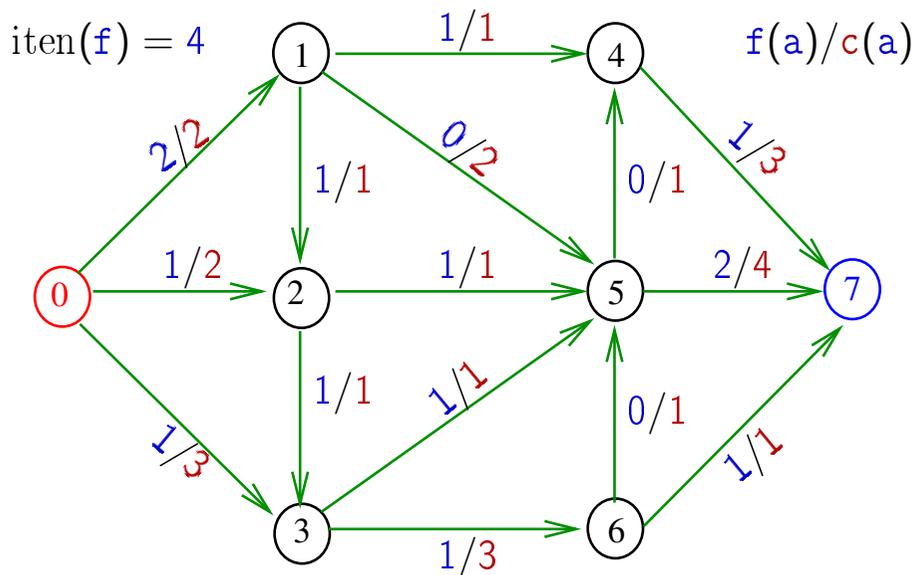
Podemos supor que a rede possui um arco b de t a s de capacidade $+\infty$.

O problema do fluxo máximo é **equivalente** ao seguinte programa linear, que chamamos de **primal**: encontrar um vetor x indexado por A que

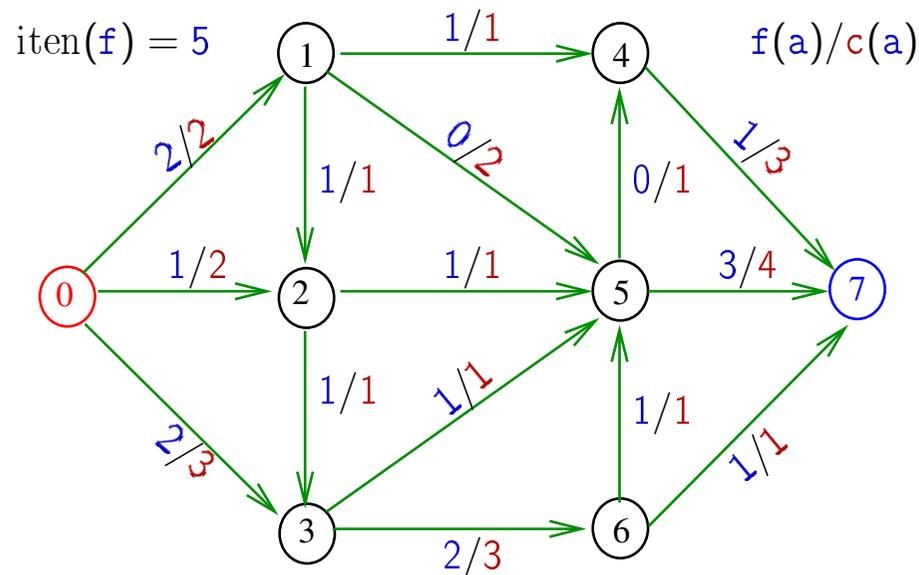
$$\begin{aligned} &\text{maximize} && x(b) \\ &\text{sob as restrições} && ef(v) - inf(v) = 0 \quad \forall v, \\ & && x(a) \leq c(a) \quad \forall a \in A, \\ & && x(a) \geq 0 \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

S 22.2

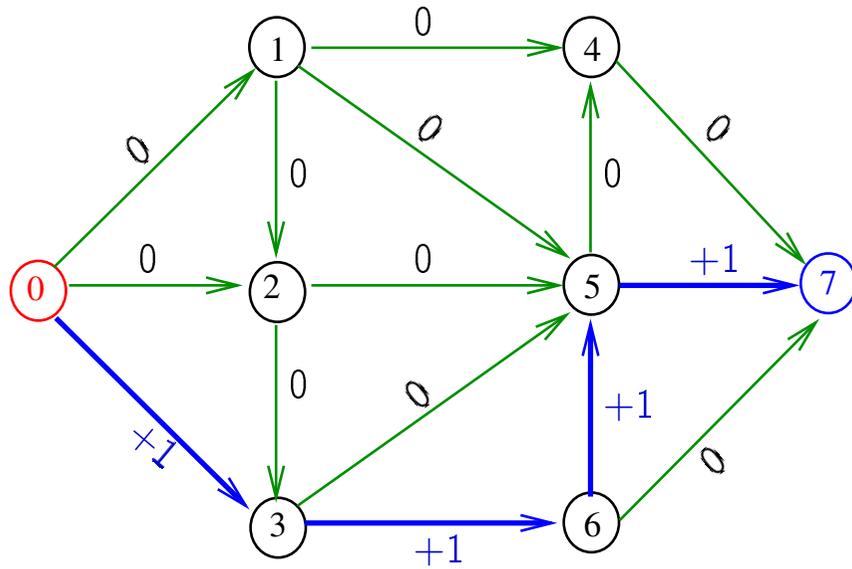
Fluxo é máximo?



E agora? Fluxo é máximo?



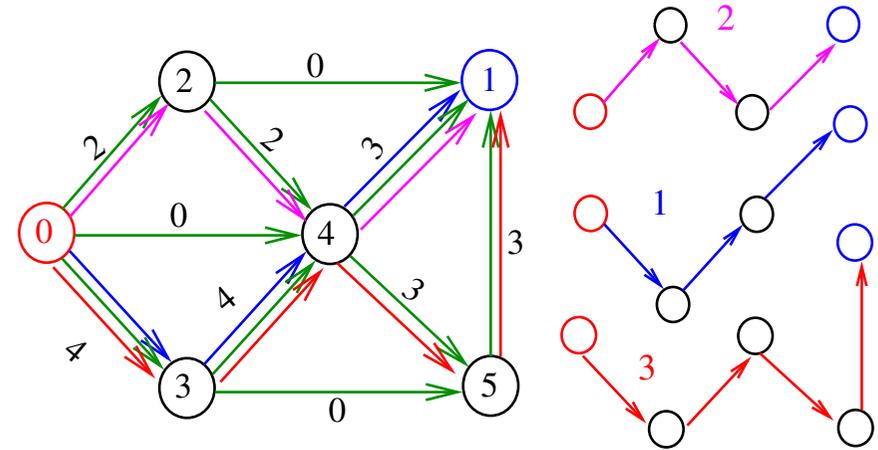
Onde mudou?



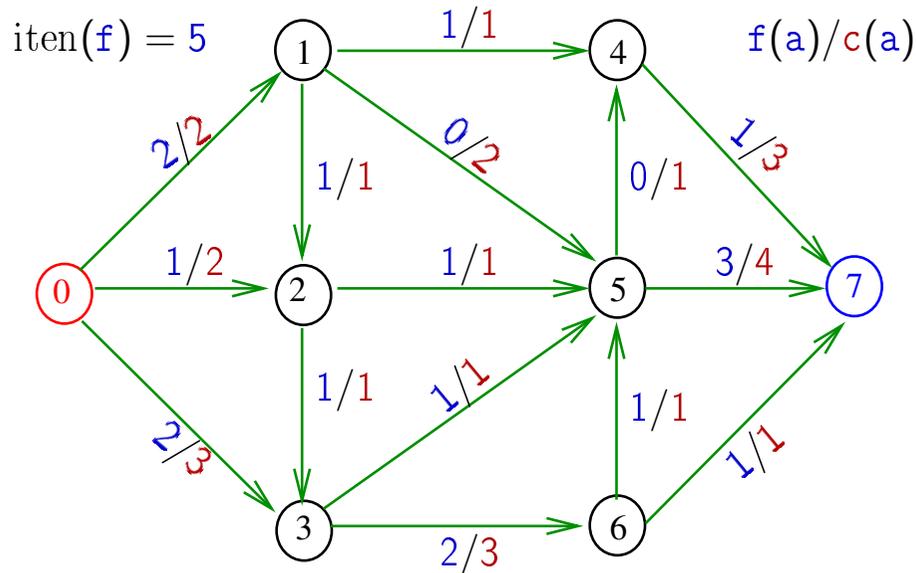
Decomposição de fluxos

Fluxos podem ser representados por caminhos de s a t . A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

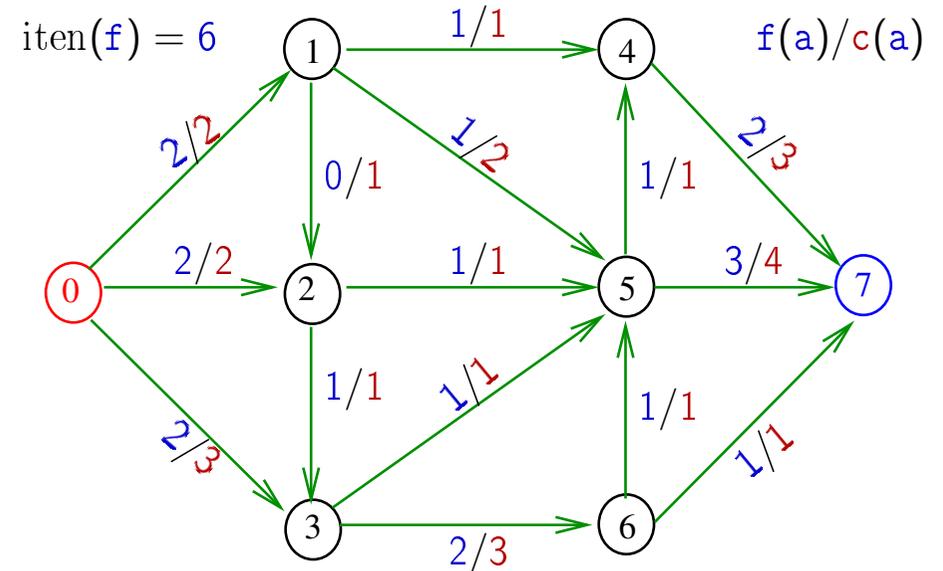
Exemplo:



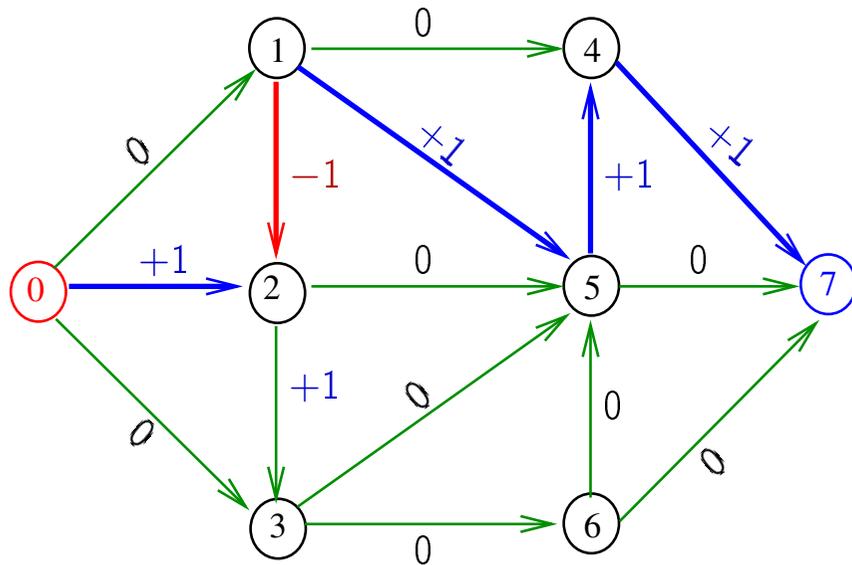
Fluxo é máximo?



E agora? Fluxo é máximo?

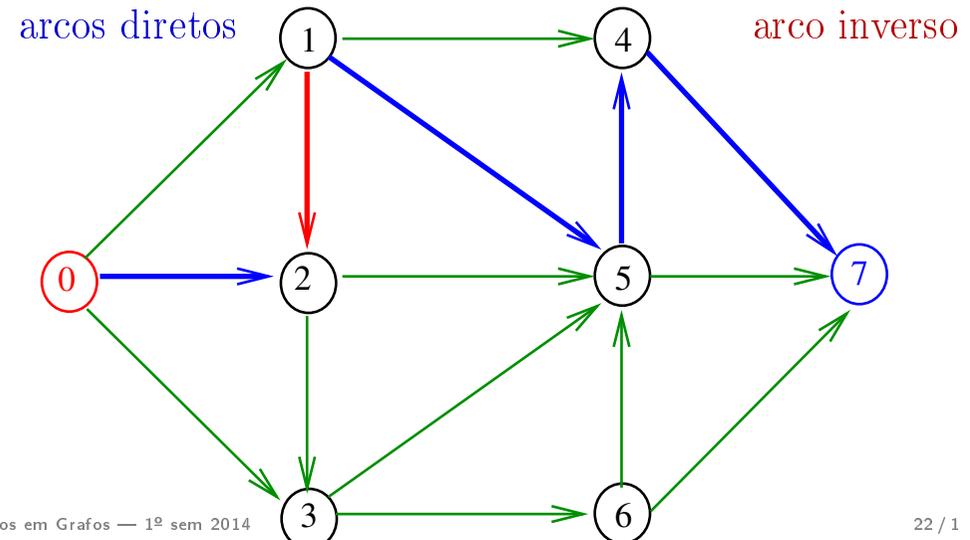


Onde mudou?



Pseudo-caminhos

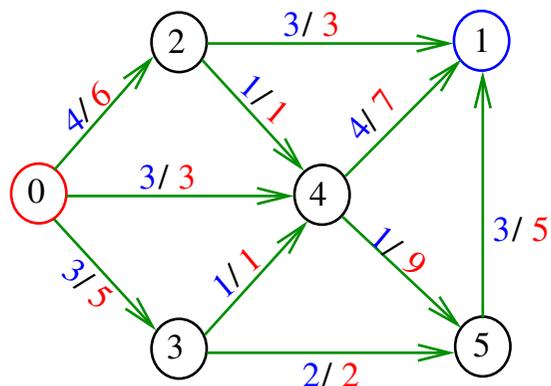
Um **pseudo-caminho** num digrafo é uma seqüência de vértices tal que para cada par (u,v) de vértices consecutivos, $u-v$ ou $v-u$ é um arco do digrafo.



Arcos cheios e vazios

Dizemos que um arco $u-v$ está **cheio** se o fluxo no arco é igual à capacidade do arco. Dizemos que um arco $u-v$ está **vazio** se o fluxo no arco é nulo.

Exemplo: 2-1 está cheio e 4-1 não está cheio

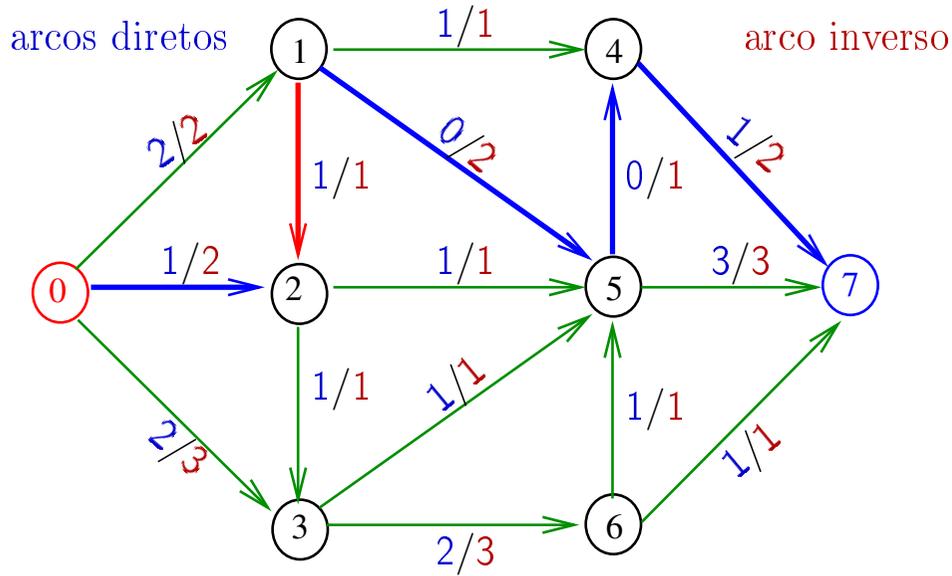


Caminho de aumento

Um **caminho de aumento** (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- os **arcos diretos** não estão cheios e
- os **arcos inversos** não estão vazios.

Exemplo

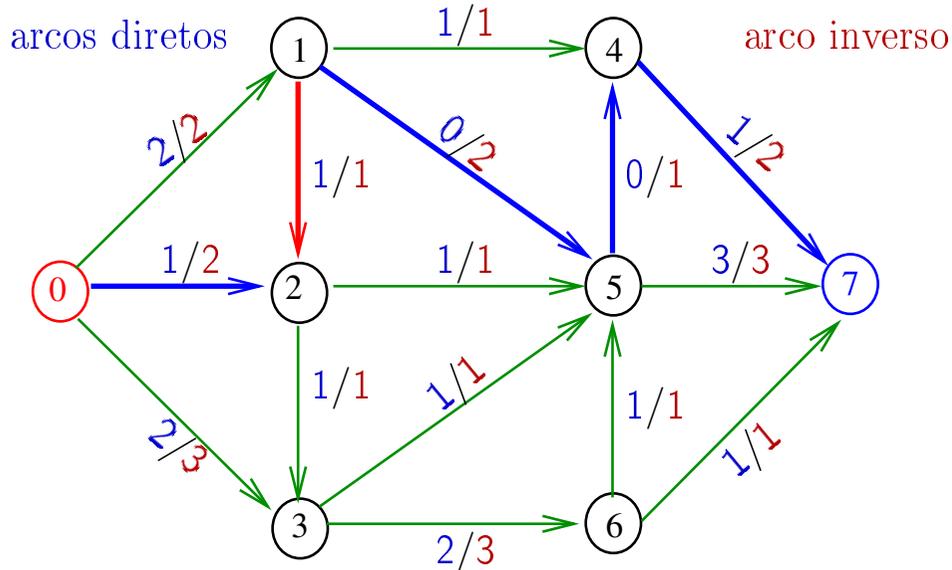


Enviar fluxo através de caminhos de aumento

A operação de **enviar** d unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

- para cada **arco direto**, some d ao fluxo
- para cada **arco inverso**, subtraia d do fluxo.

Exemplo



Capacidade residual

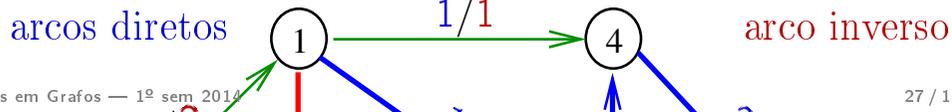
A **capacidade residual** de um **arco direto** a é $c(a) - f(a)$.

A **capacidade residual** de um **arco reverso** b é $f(b)$.

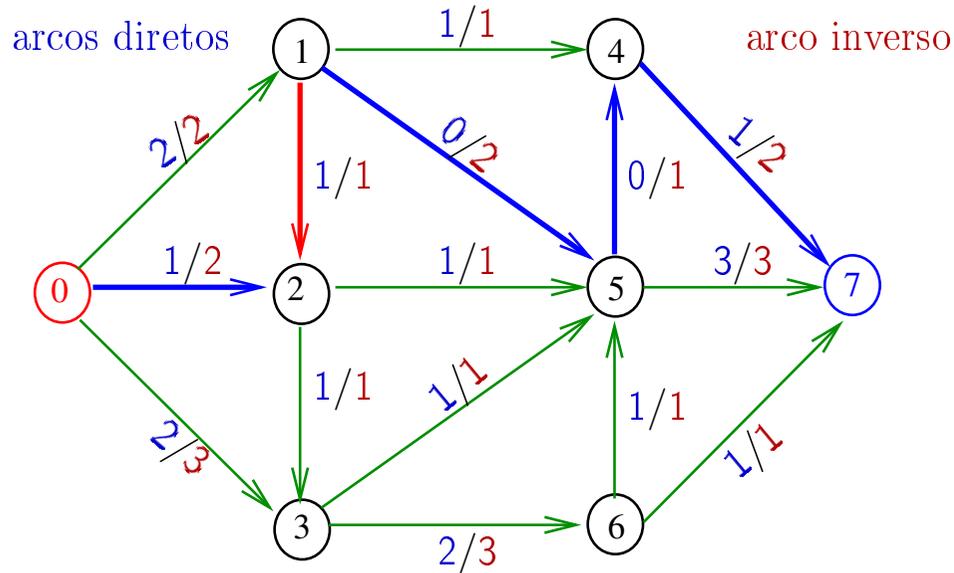
A **capacidade residual de um caminho de aumento** é a **menor** das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- **arco inverso** 2-1 é 1;
- **arco direto** 1-5 é 2; e
- **arco direto** 4-7 é 1.



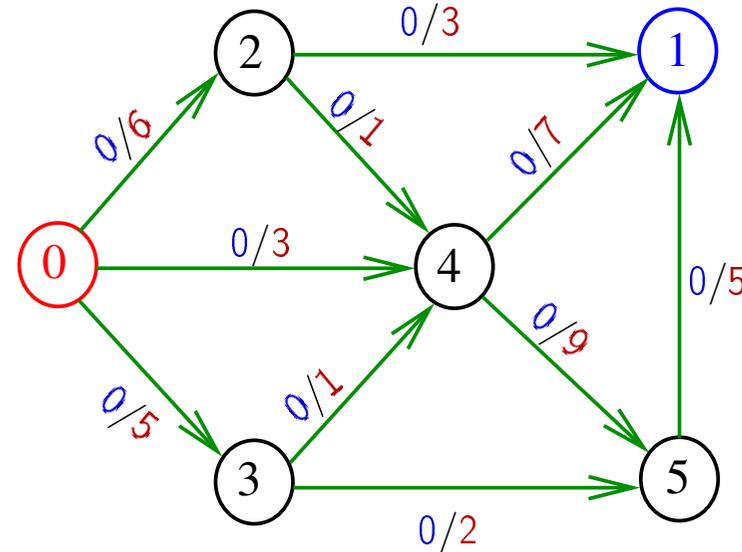
Exemplo



Método dos caminhos de aumento

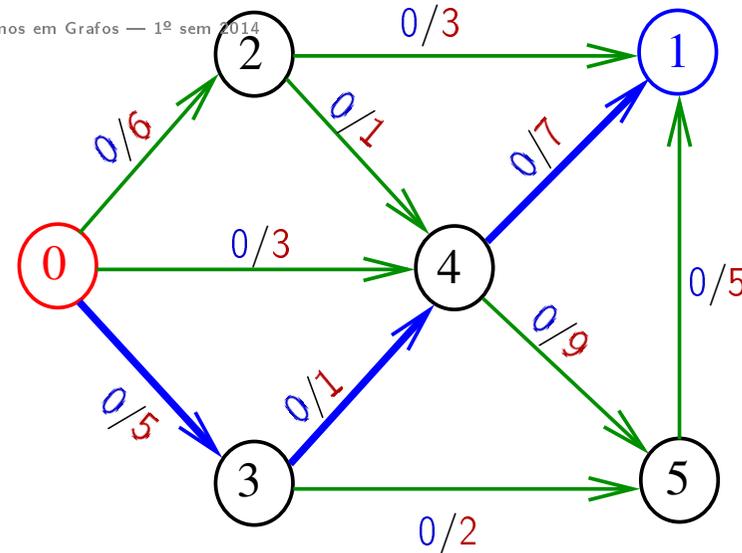
$\text{int}(f) = 0$

$f(a)/c(a)$



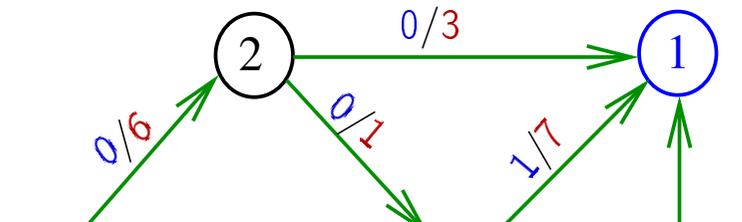
$\text{int}(f) = 0$

$f(a)/c(a)$



$\text{int}(f) = 1$

$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo f que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração f é o fluxo nulo.

Cada iteração consiste em:

Caso 1: **não existe** um caminho de aumento
Devolva f e pare

Caso 2: **existe** uma caminho de aumento

Seja d a capacidade residual de um caminho de aumento P

Seja f' o fluxo obtido ao enviarmos d unidades de fluxo ao longo de P

Comece nova iteração com f' no papel