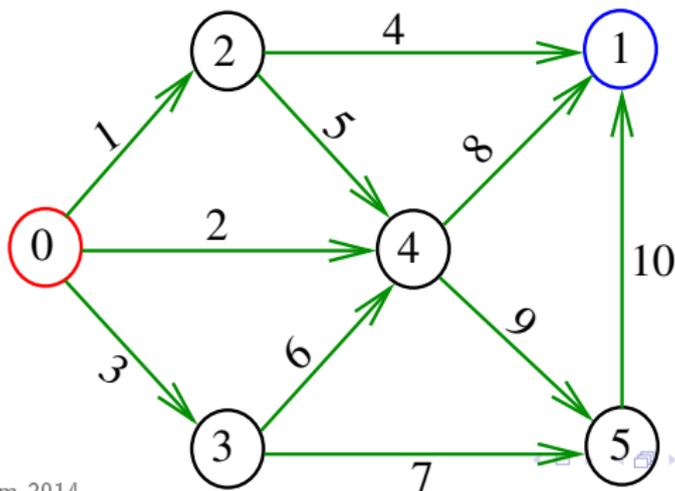


Fluxos em redes

S 22.1

Fluxos em arcos

Algumas funções a valores reais nos arcos de um digrafo serão denominadas **fluxos**. Esse termo se aplica quando estamos interessados nas relações entre *influxos* e *efluxos*, a serem definidos adiante. Diremos o valor de f num arco é o **fluxo no arco**.
Exemplo: o fluxo no arco 2-4 é 5

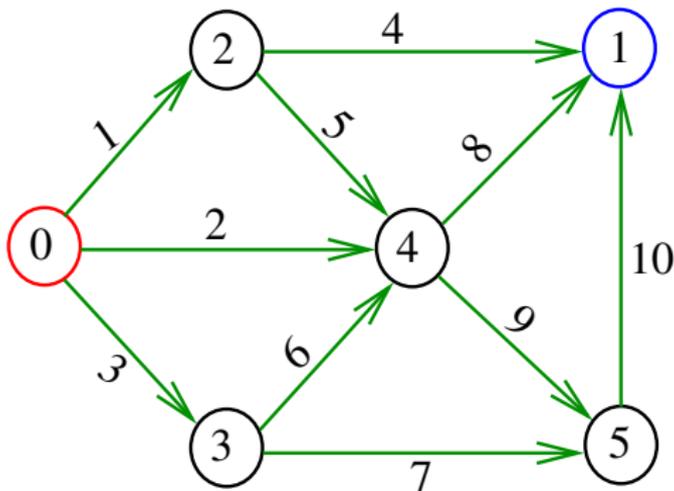


Influxos e efluxos

O **influxo** em v ($=$ *inflow into* v) é a soma dos fluxos nos arcos que entram em v .

O **efluxo** de v ($=$ *outflow from* v) é a soma dos fluxos nos arcos que saem de v .

Exemplo: em 4 o influxo é 13 e o efluxo é 17



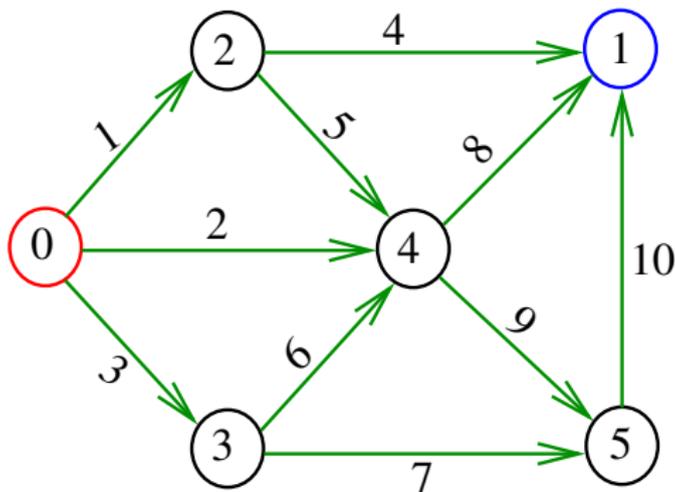
Saldos

O **saldo** em v é a diferença

$$ef(v) - inf(v)$$

entre o efluxo de v e o influxo em v .

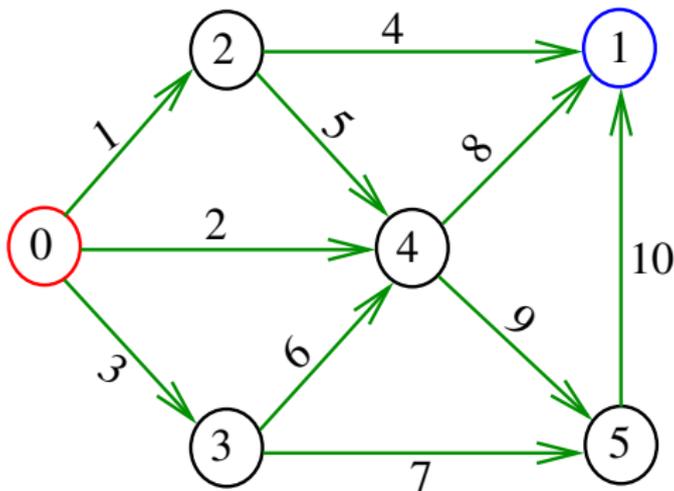
Exemplo: o saldo do vértice 4 é $17-13=4$



Fluxos

Num digrafo com **vértice inicial** s e **vértice final** t , um **st -fluxo** (= st -flow) é uma função f que atribui valores em \mathbb{R}_{\geq} aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de s e t é **nulo** e em s é ≥ 0 .

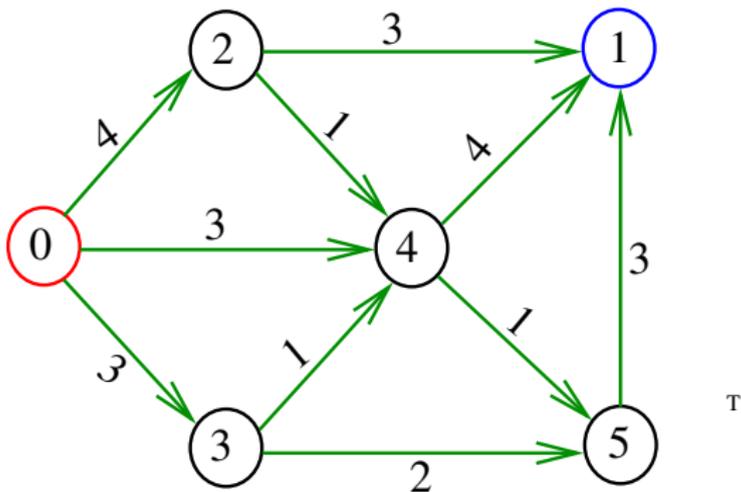
Exemplo: não é um fluxo



Fluxos

Num digrafo com **vértice inicial** s e **vértice final** t , um **st -fluxo** (= st -flow) é uma função f que atribui valores em \mathbb{R}_{\geq} aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de s e t é **nulo** e em s é ≥ 0 .

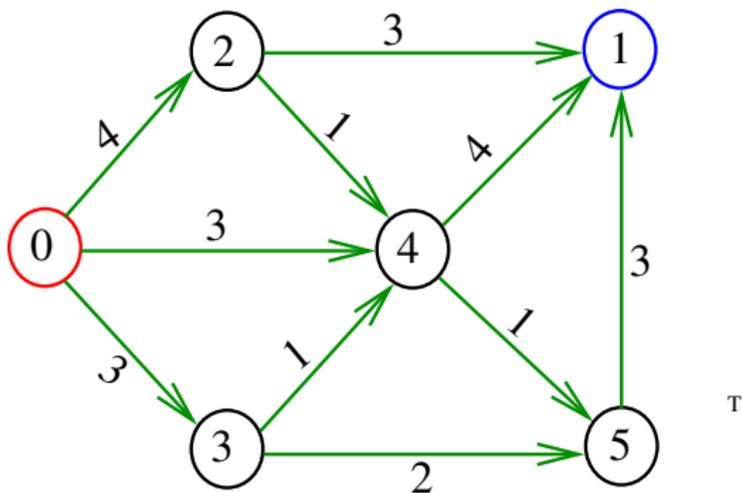
Exemplo: é um fluxo onde $s = 0$ e $t = 1$



Propriedade de Fluxos

Para qualquer fluxo num digrafo com fonte **s** e sorvedouro **t**, o saldo em **t** é igual ao saldo em **s** com sinal trocado.

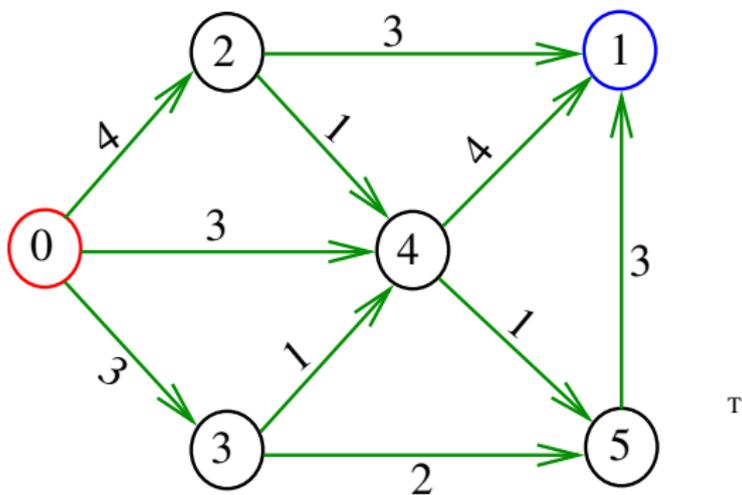
Exemplo: saldo em **0** = **10** = **-10** = saldo em **1**



Intensidade de fluxos

A **intensidade** de um fluxo f é o saldo de f em s .
Em geral (mas nem sempre) o influxo em s é nulo e o efluxo de t é nulo.

Exemplo: fluxo de intensidade 10



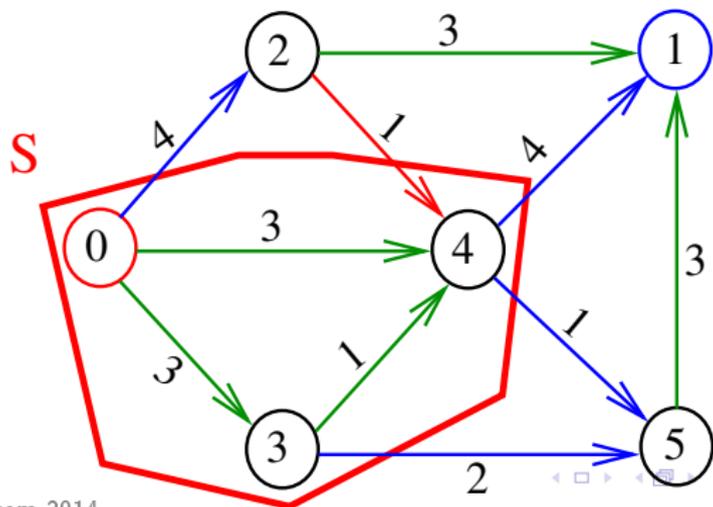
Saldo de fluxo num conjunto de vértices

Dado um conjunto S que contém s mas não contém t , o saldo em S é a diferença

$$ef(S) - inf(S),$$

entre o efluxo de S e o influxo em S

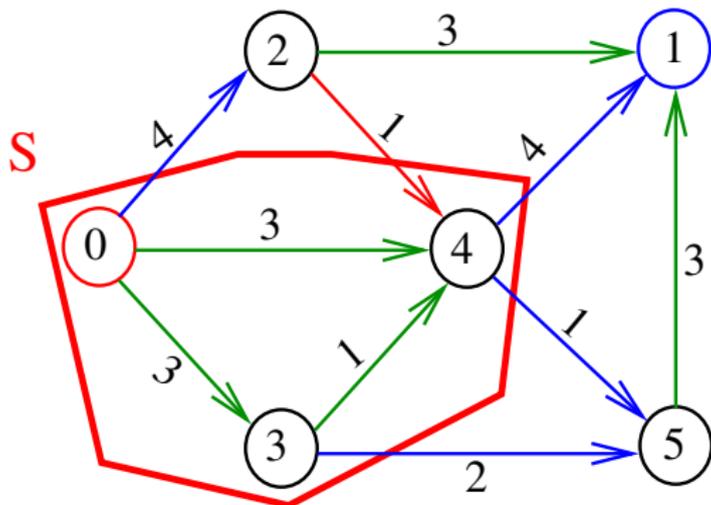
Exemplo: o saldo de S é $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



Propriedade do Saldo

Para qualquer fluxo num digrafo com vértice inicial s e vértice final t e para qualquer conjunto S que contém s mas não contém t , o saldo em S é igual ao saldo em s .

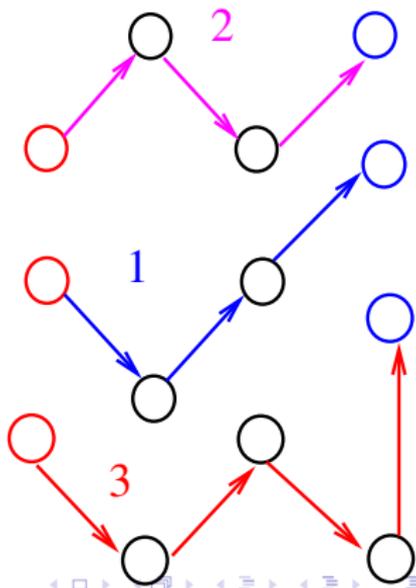
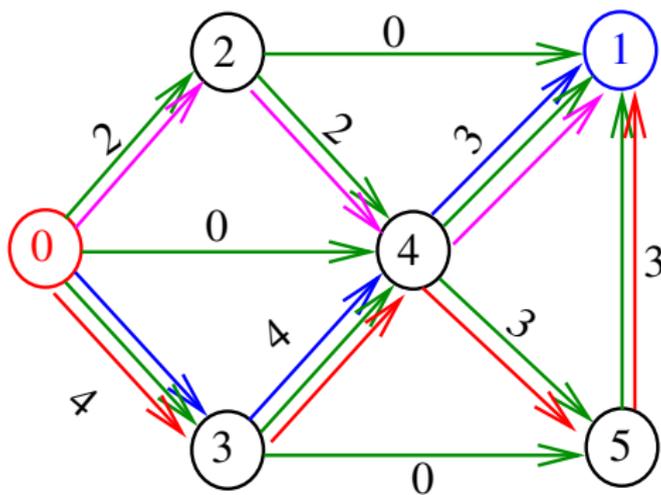
Exemplo: o saldo de S é $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



Fluxos versus coleção de caminhos

Fluxos podem ser representados por caminhos de s a t . A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

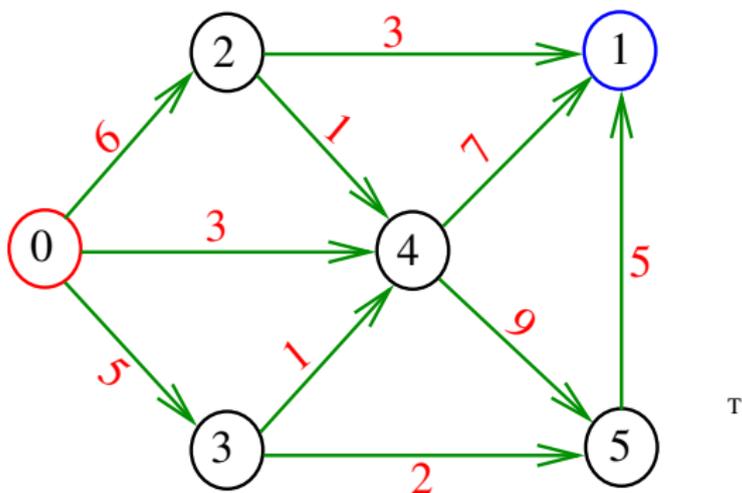
Exemplo:



Redes capacitadas

Uma **rede capacitada** é um digrafo com **vértice inicial** e **vértice final** em que a cada um arcos está associado uma **capacidade**, que é ou um número em \mathbb{R}_{\geq} ou o símbolo $+\infty$.

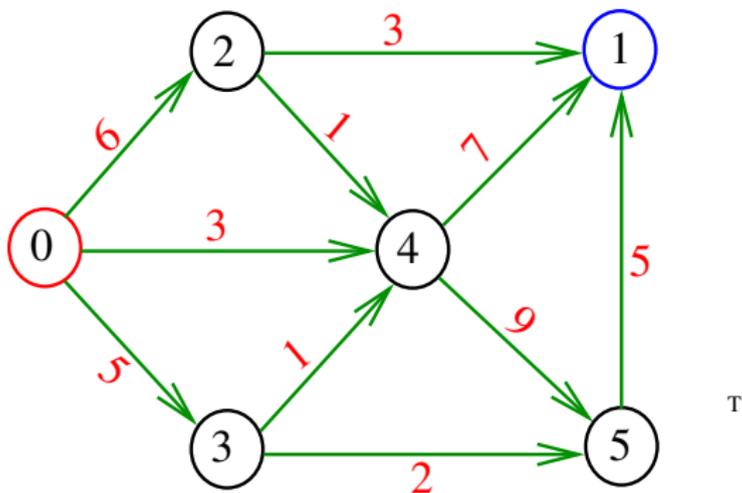
Exemplo:



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

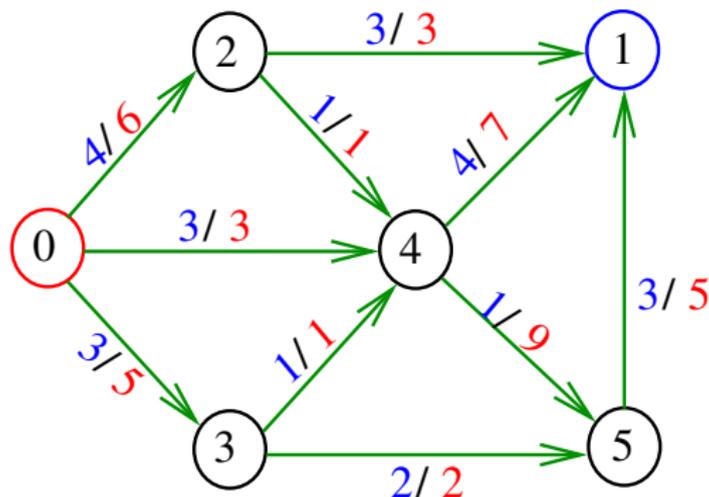
Exemplo: rede capacitada



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

Exemplo: fluxo que respeita as capacidades



Fluxo máximo (problema primal)

Podemos supor que a rede possui um arco b de t a s de capacidade $+\infty$.

O problema do fluxo máximo é **equivalente** ao seguinte programa linear, que chamamos de **primal**: encontrar um vetor x indexado por A que

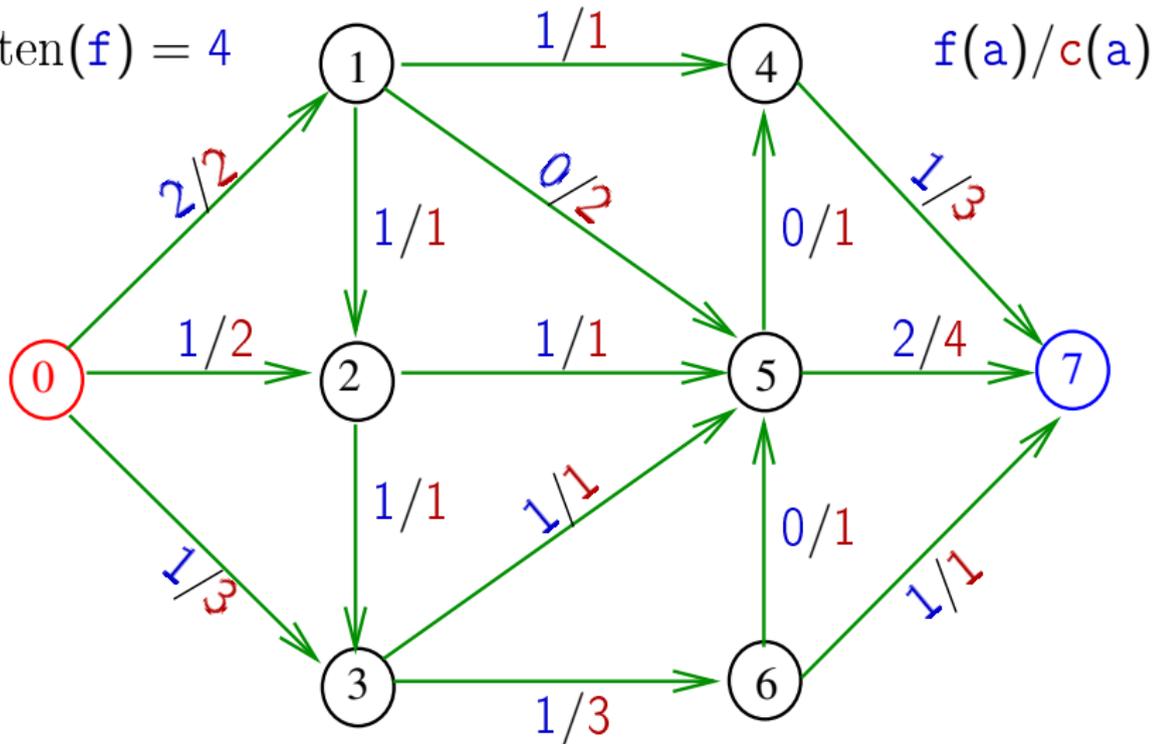
$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x(b) \\ \text{sob as restrições} & \text{ef}(v) - \text{inf}(v) = 0 \quad \forall v, \\ & x(a) \leq c(a) \quad \forall a \in A, \\ & x(a) \geq 0 \quad \forall a \in A. \end{array}$$

Método dos caminhos de aumento

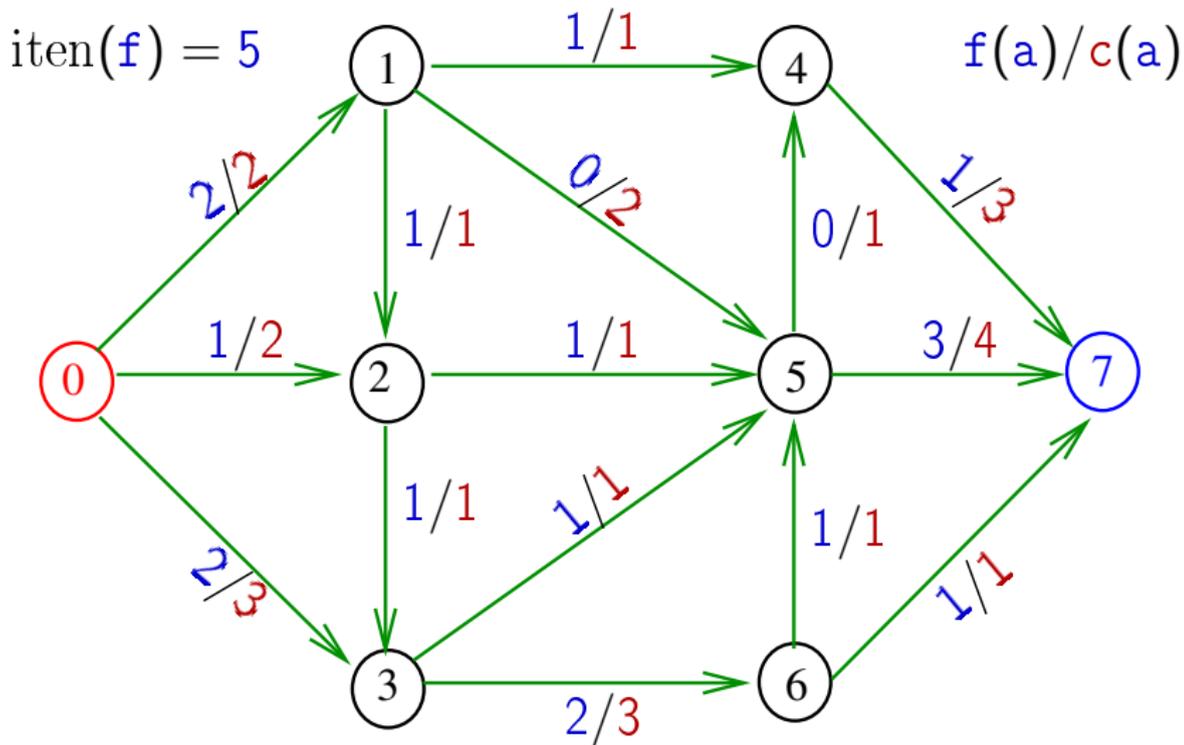
S 22.2

Fluxo é máximo?

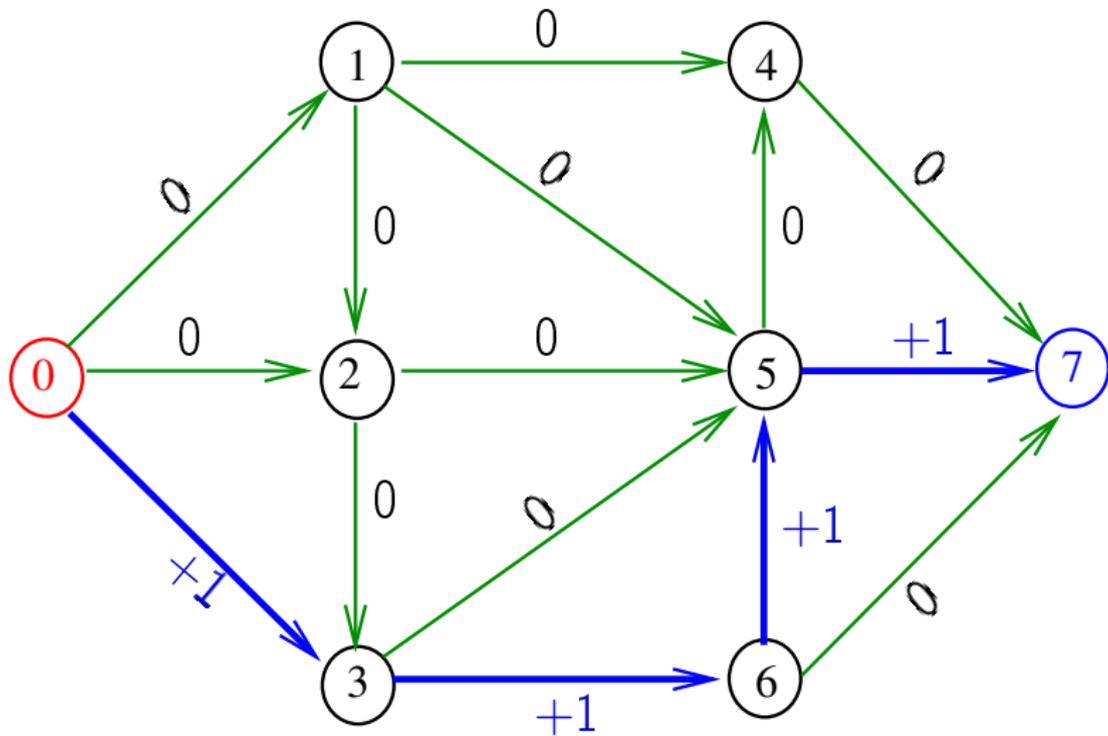
iten(f) = 4



E agora? Fluxo é máximo?



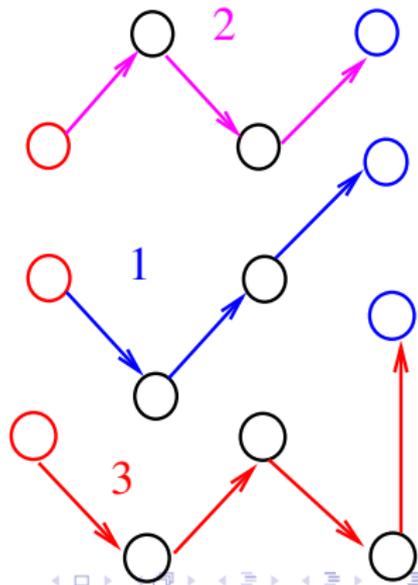
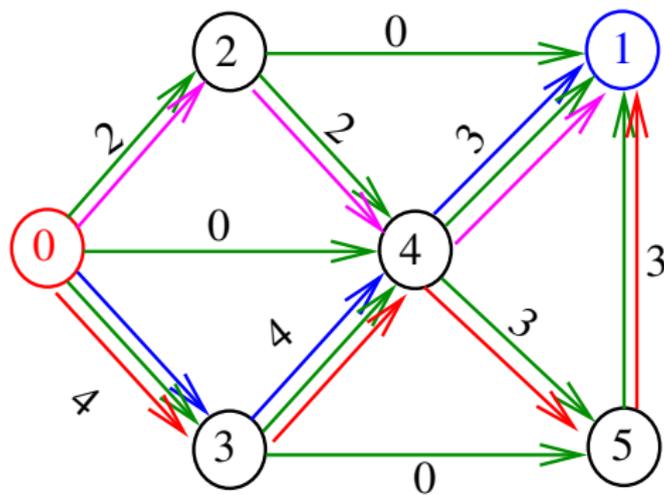
Onde mudou?



Decomposição de fluxos

Fluxos podem ser representados por caminhos de **s** a **t**. A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

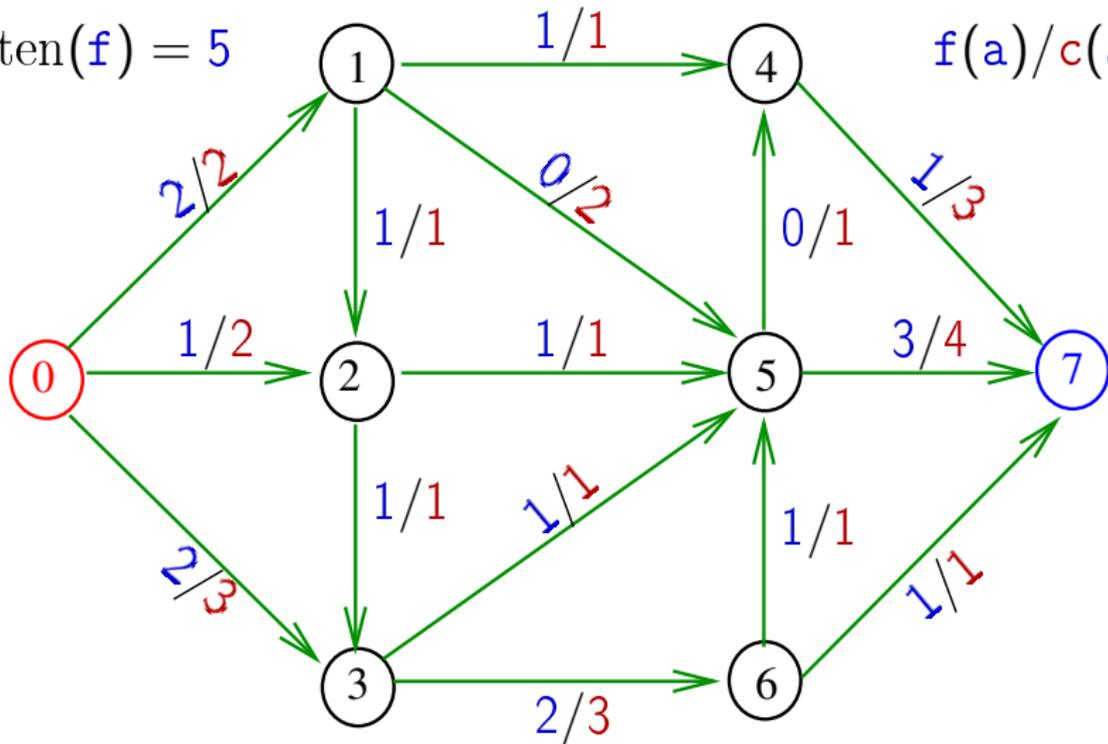
Exemplo:



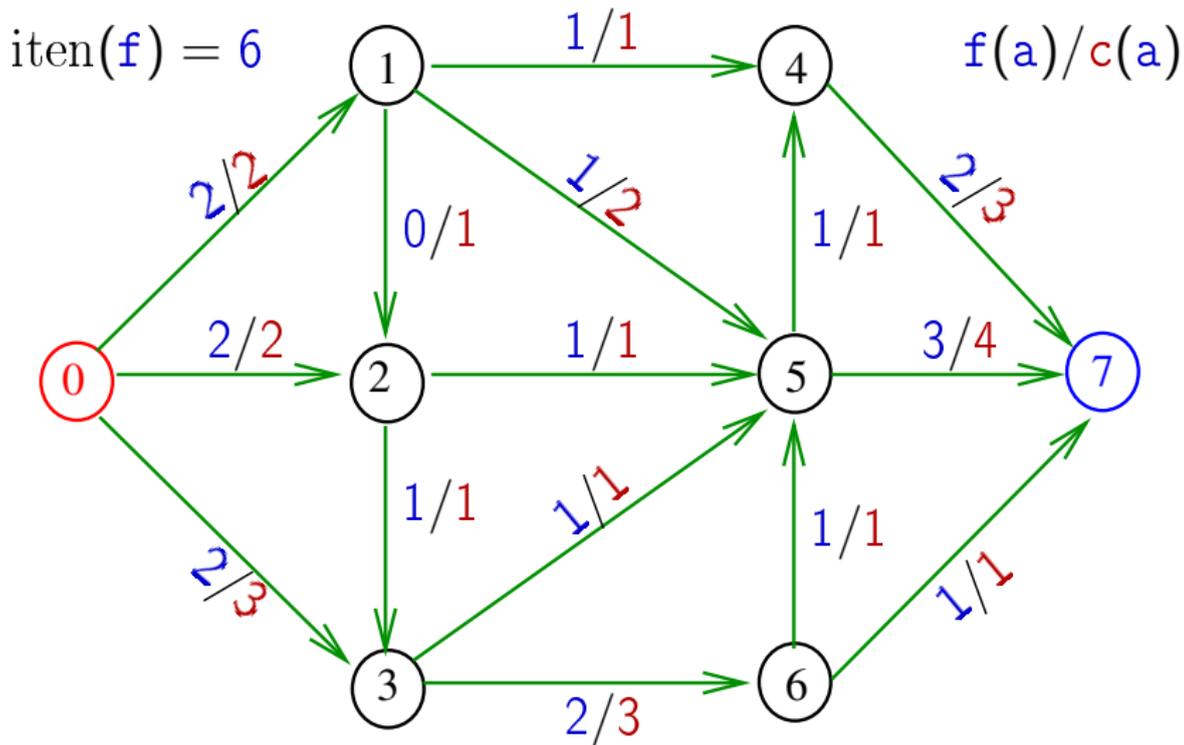
Fluxo é máximo?

iten(f) = 5

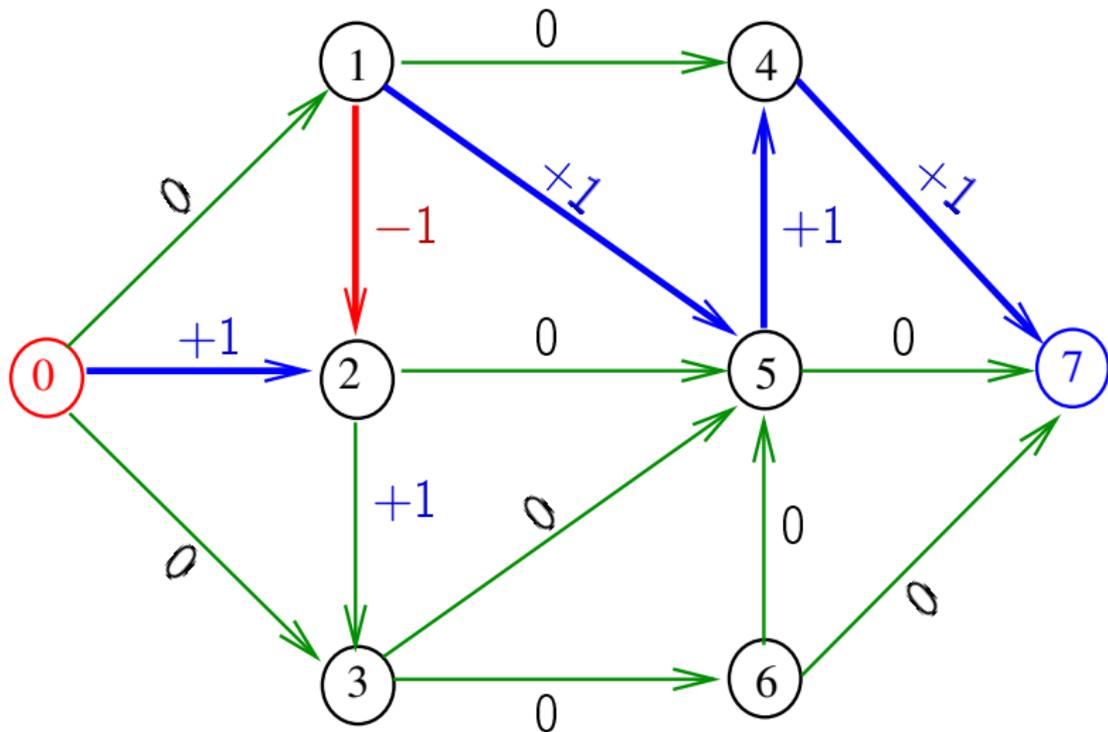
$f(a)/c(a)$



E agora? Fluxo é máximo?

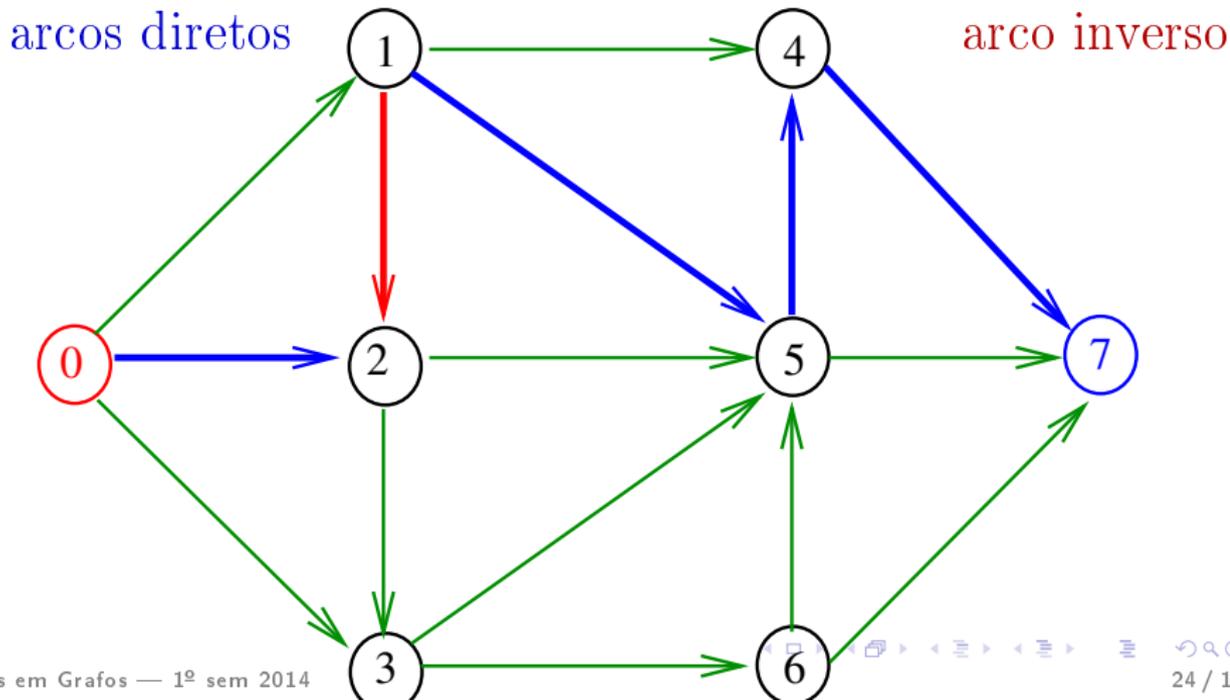


Onde mudou?



Pseudo-caminhos

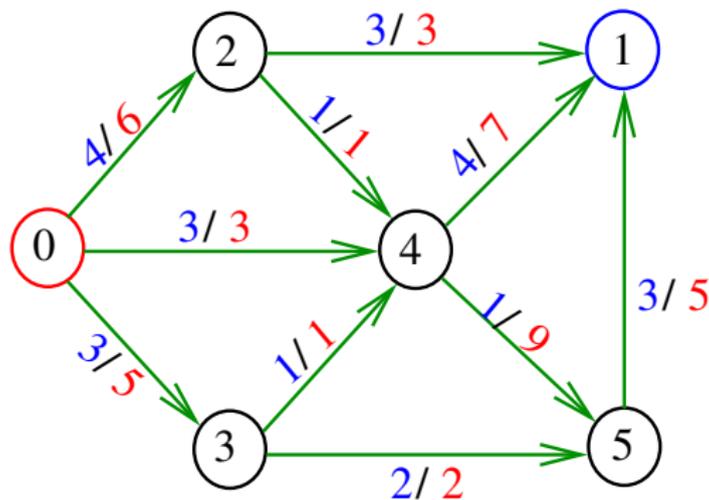
Um **pseudo-caminho** num digrafo é uma seqüência de vértices tal que para cada par (u,v) de vértices consecutivos, $u \rightarrow v$ ou $v \rightarrow u$ é um arco do digrafo.



Arcos cheios e vazios

Dizemos que um arco $u-v$ está **cheio** se o fluxo no arco é igual à capacidade do arco. Dizemos que um arco $u-v$ está **vazio** se o fluxo no arco é nulo.

Exemplo: 2-1 está cheio e 4-1 não está cheio

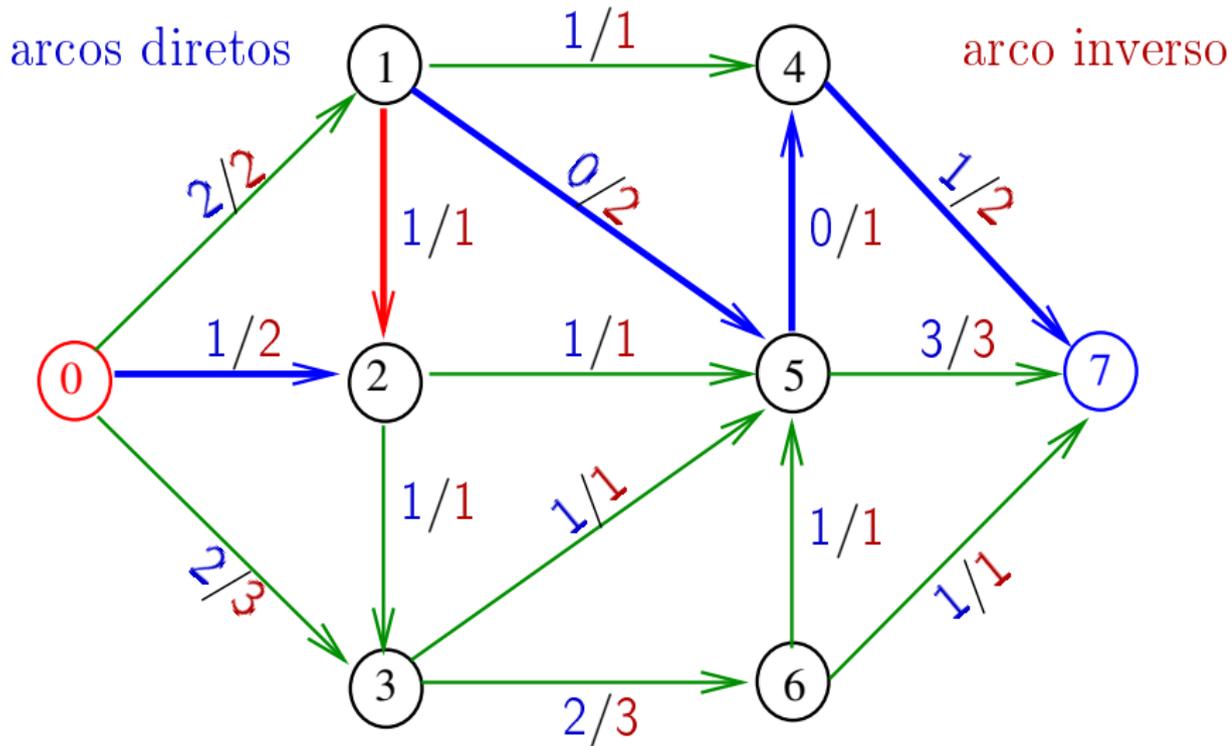


Caminho de aumento

Um **caminho de aumento** (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- os **arcos diretos** não estão cheios e
- os **arcos inversos** não estão vazios.

Exemplo

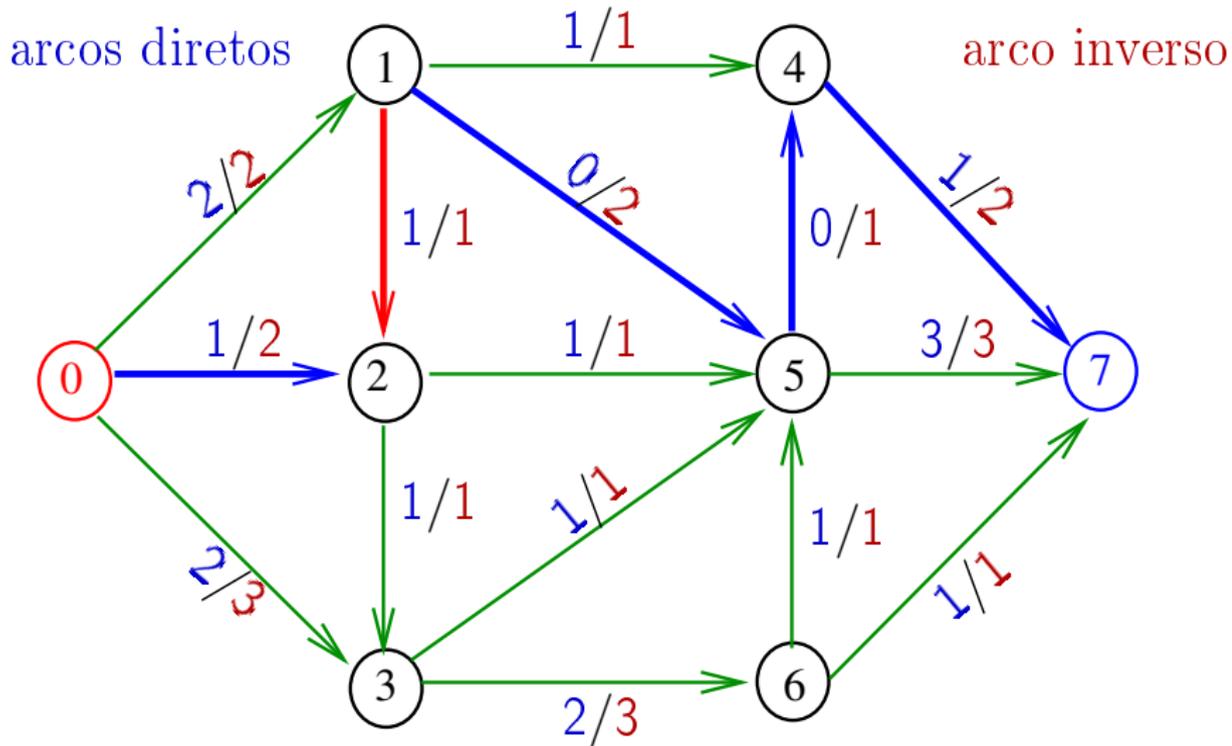


Enviar fluxo através de caminhos de aumento

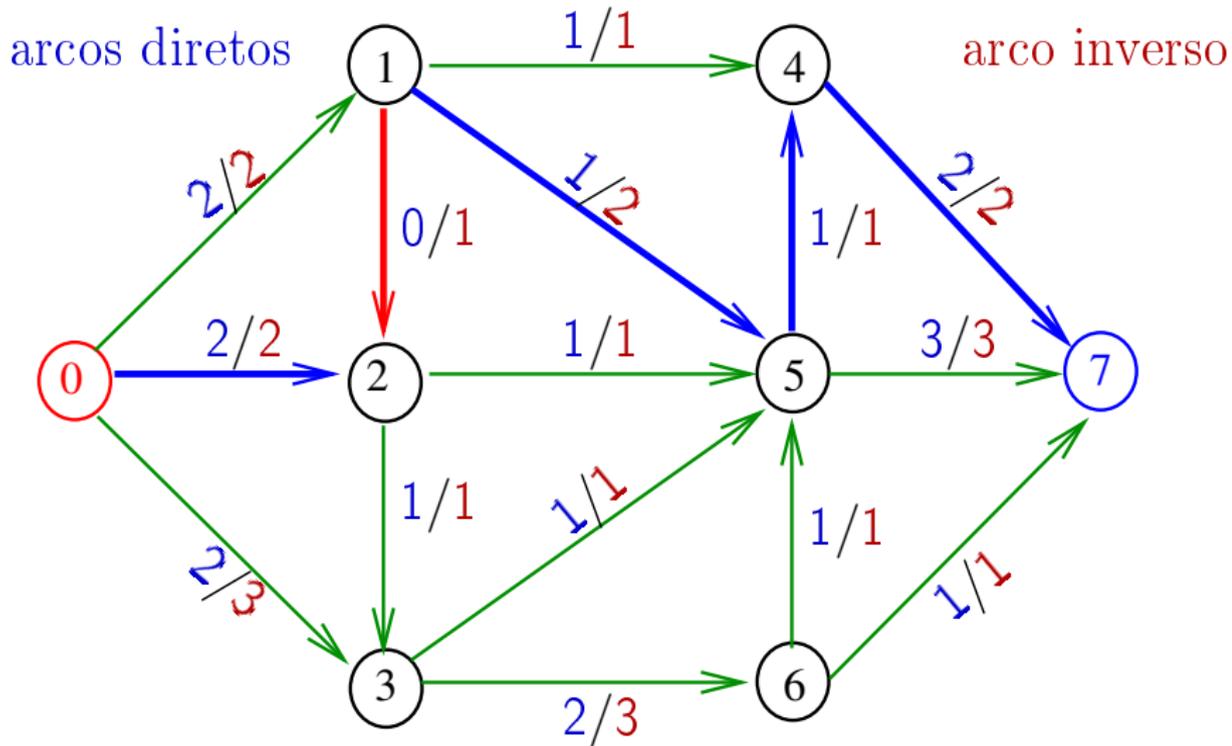
A operação de **enviar** d unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

- para cada **arco direto**, some d ao fluxo
- para cada **arco inverso**, subtraia d do fluxo.

Exemplo



Exemplo



Capacidade residual

A **capacidade residual** de um arco direto a é

$$c(a) - f(a).$$

A **capacidade residual** de um arco reverso b é

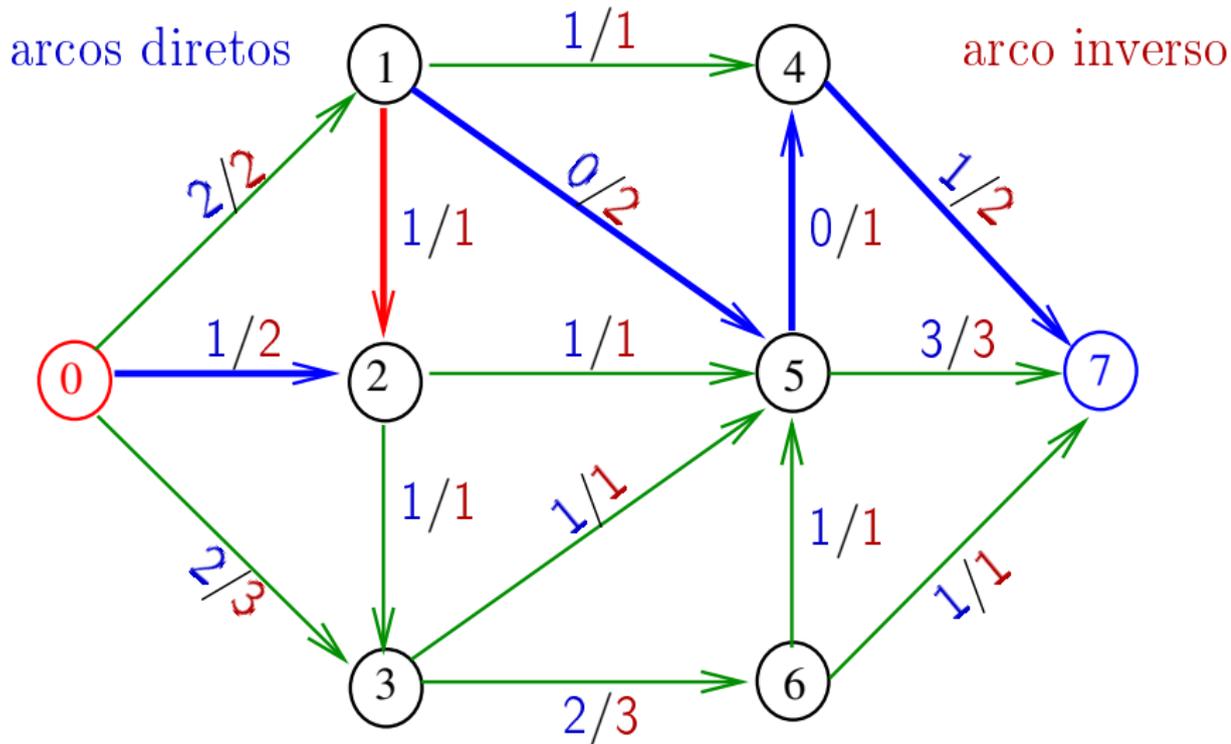
$$f(b).$$

A **capacidade residual de um caminho de aumento** é a menor das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- arco inverso 2-1 é 1;
- arco direto 1-5 é 2; e
- arco direto 4-7 é 1.

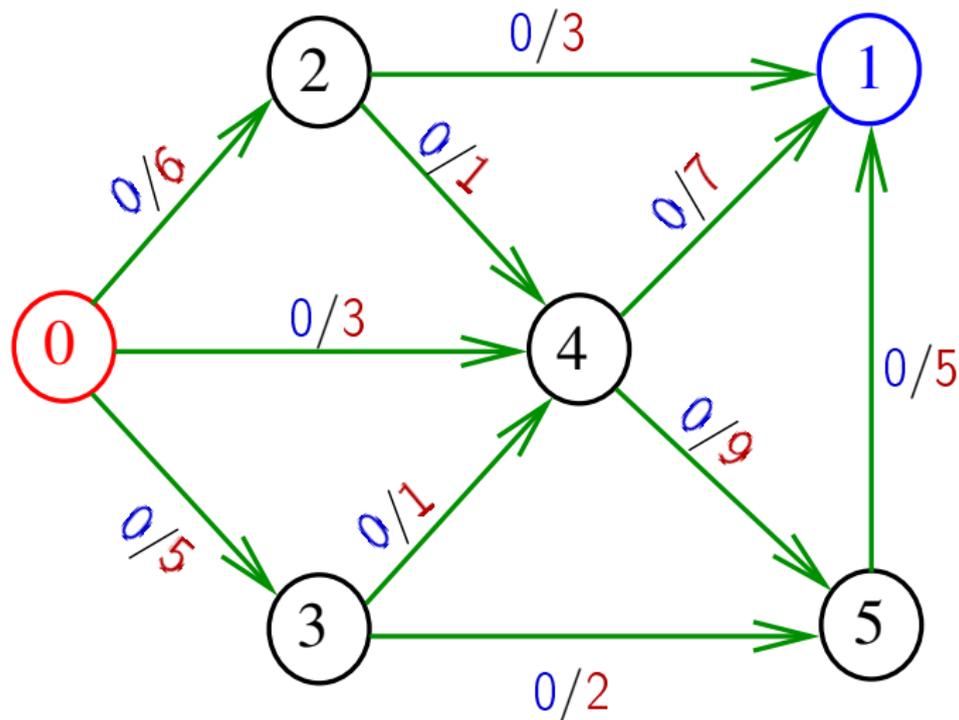
Exemplo



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 0$

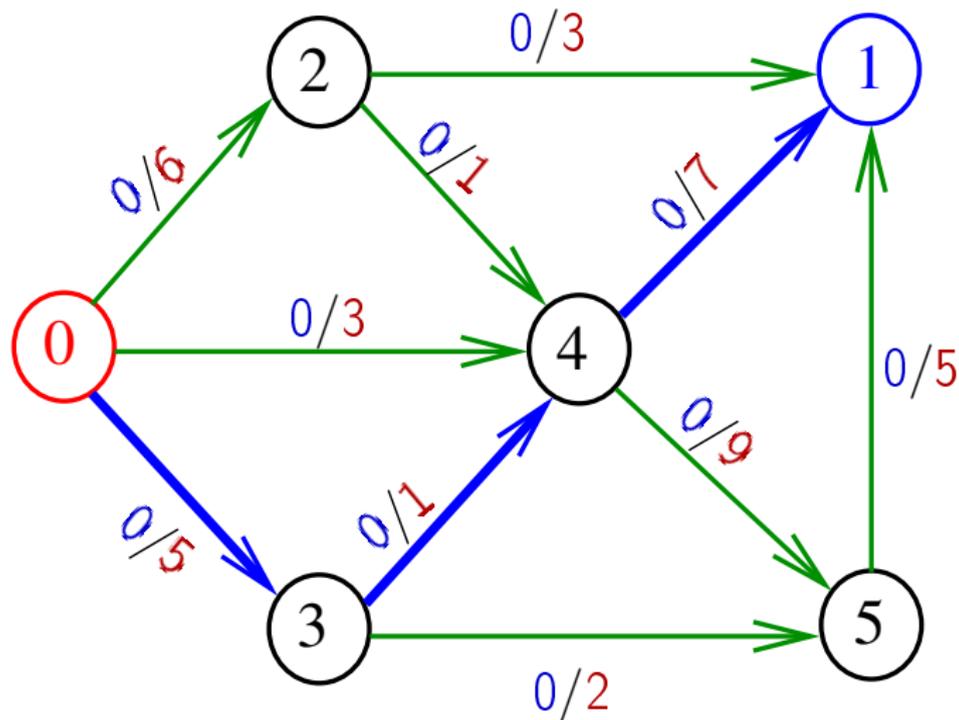
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 0$

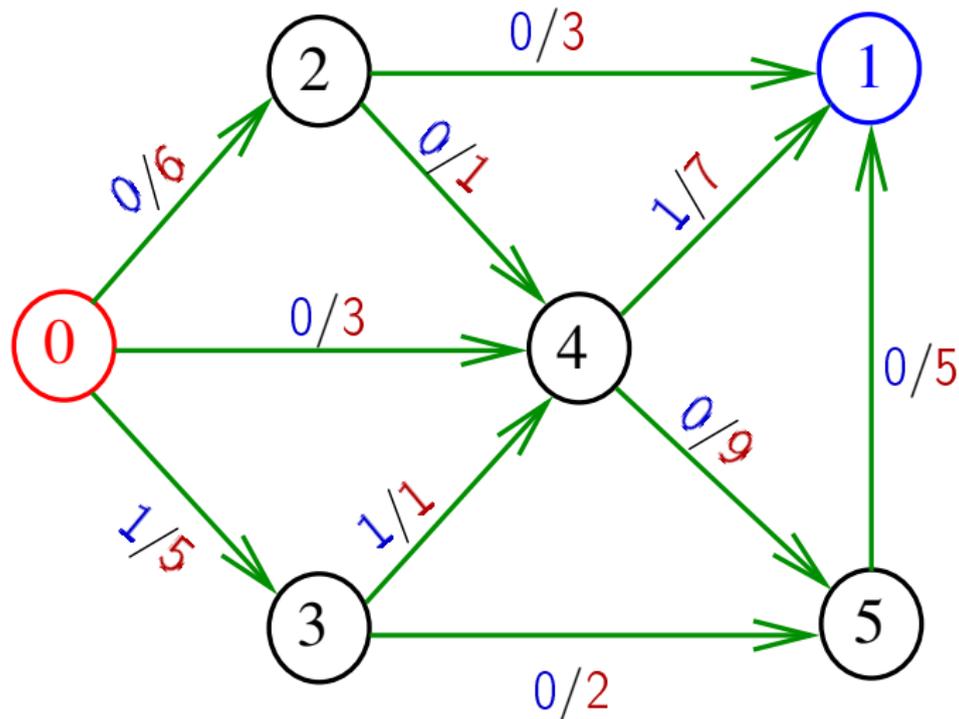
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 1$$

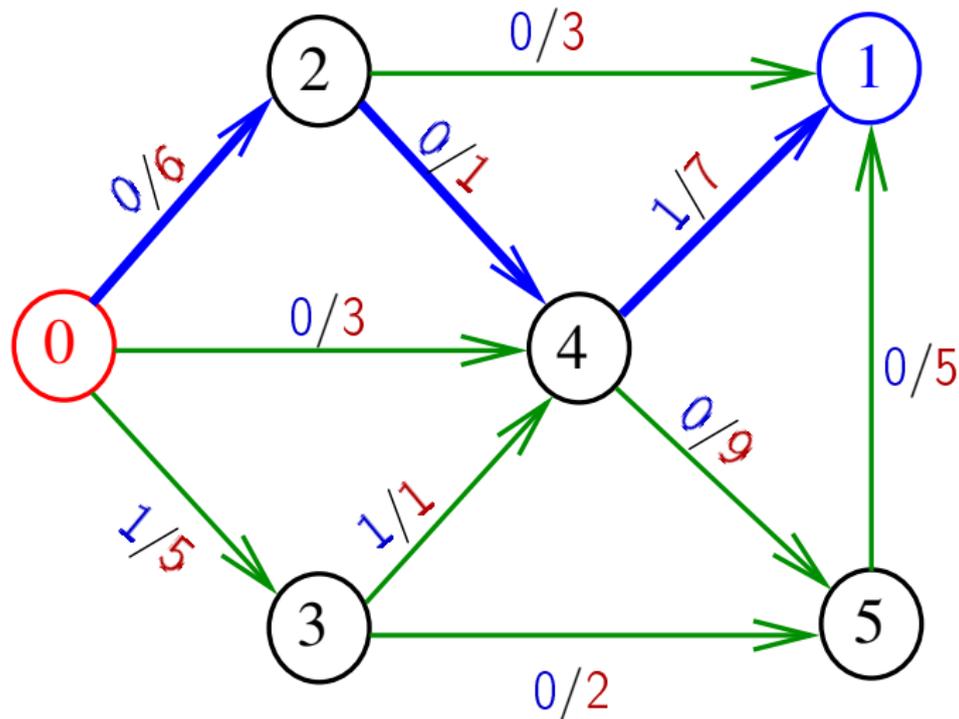
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 1$

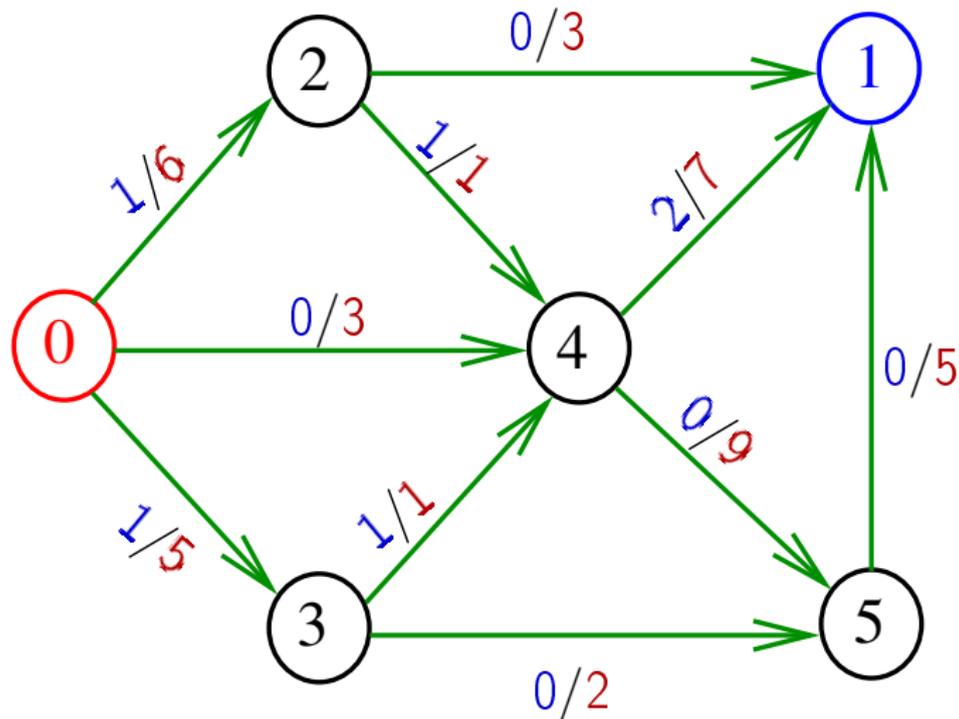
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 2$$

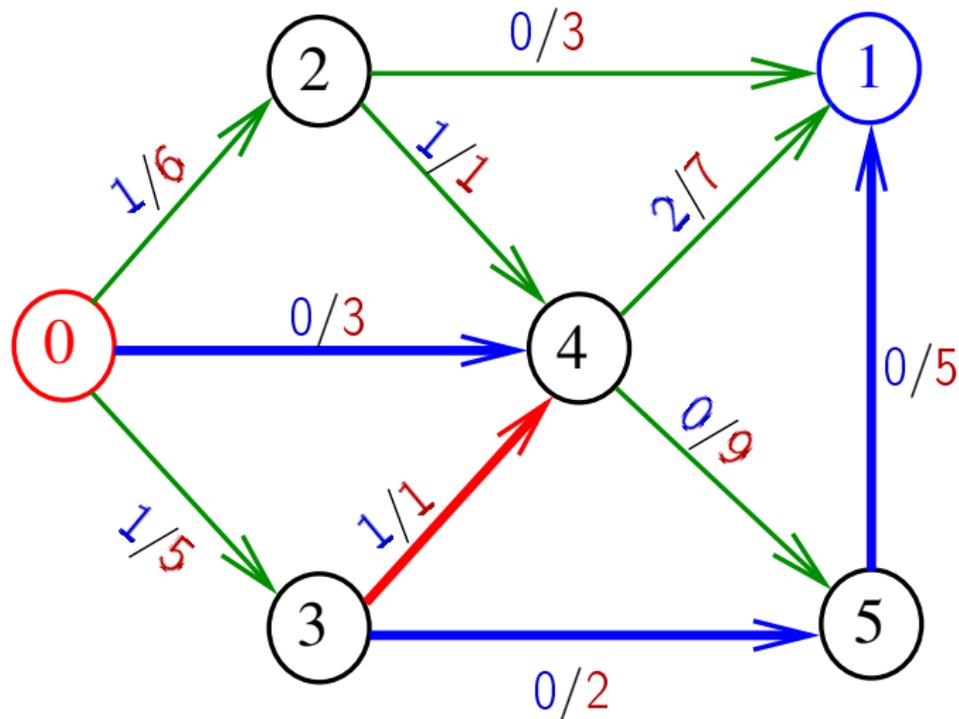
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 2$$

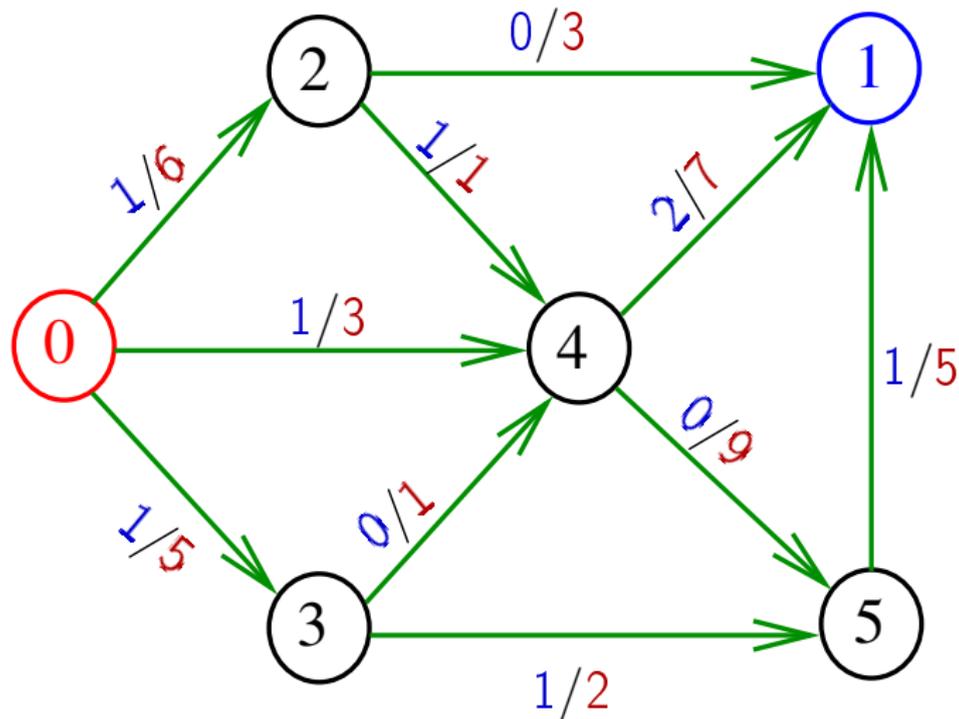
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 3$

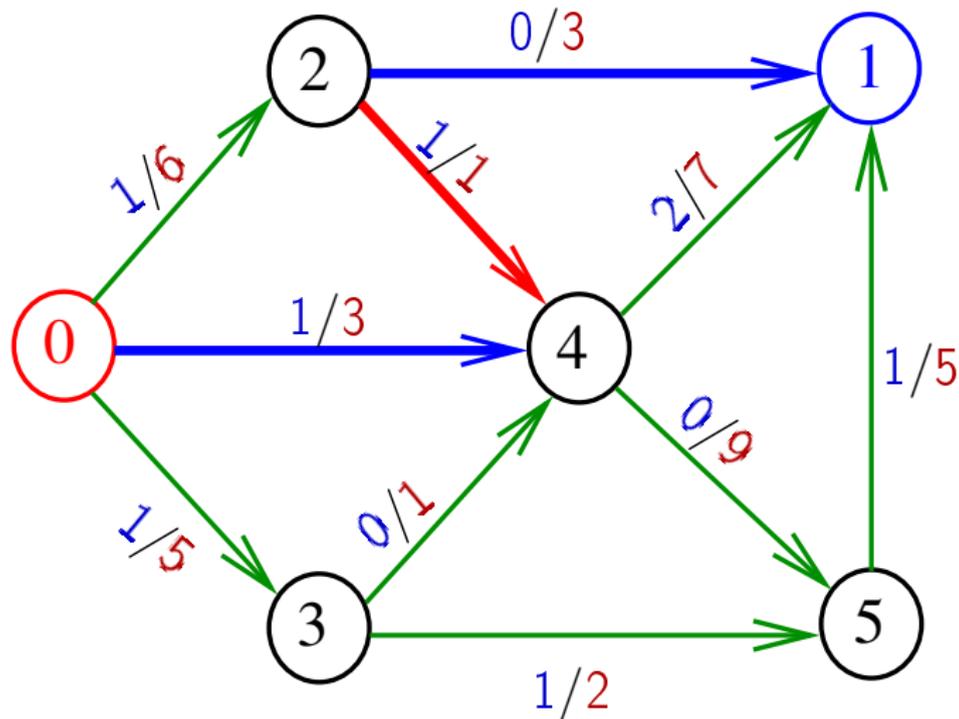
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 3$

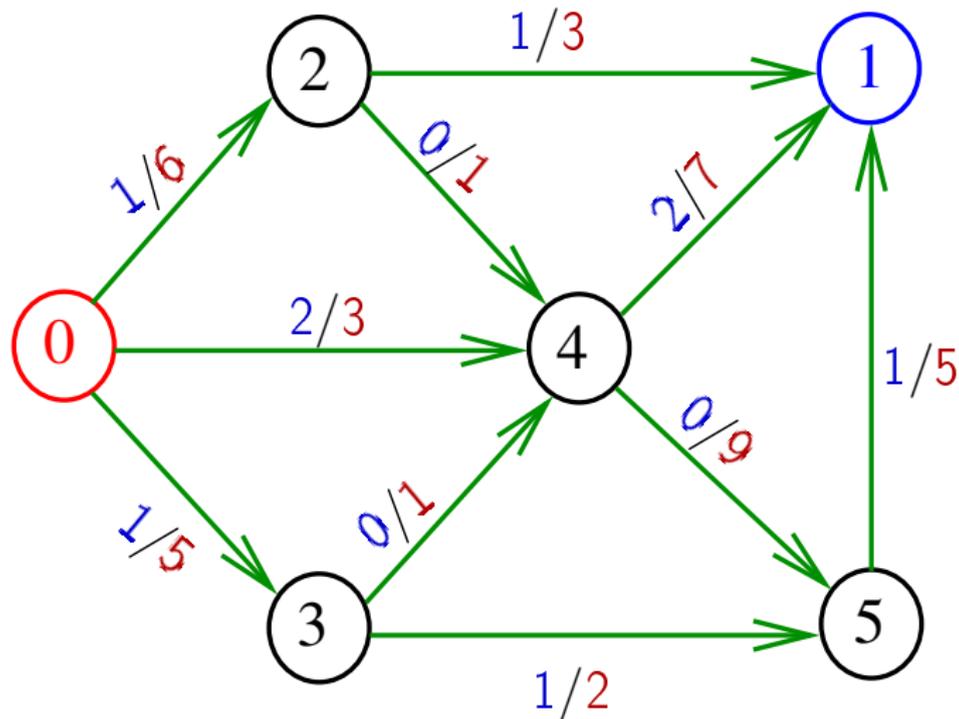
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 4$$

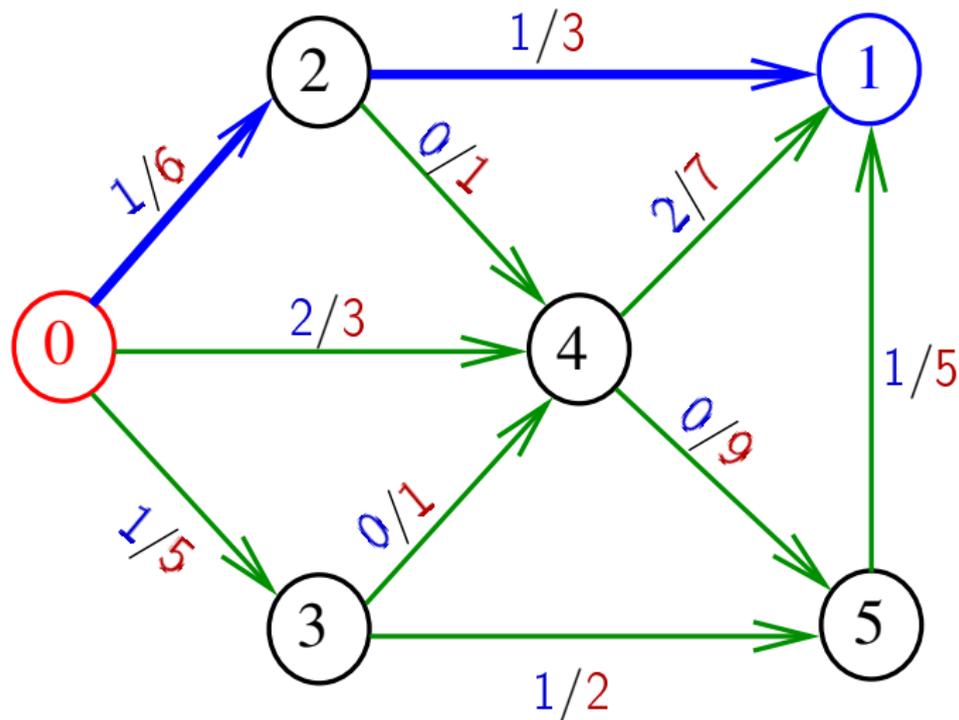
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 4$$

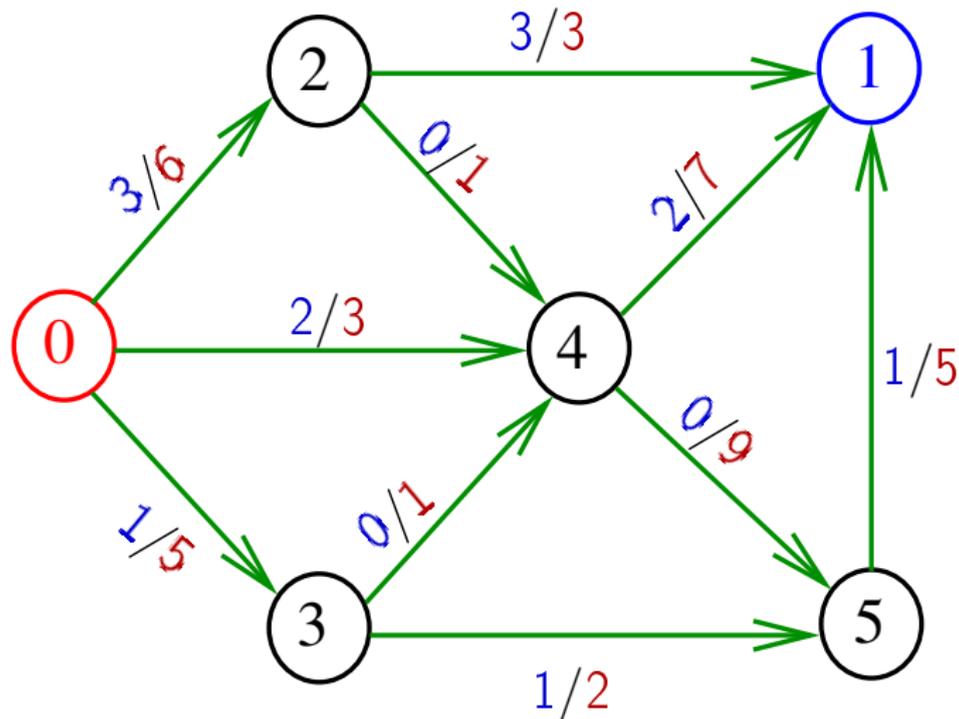
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 6$

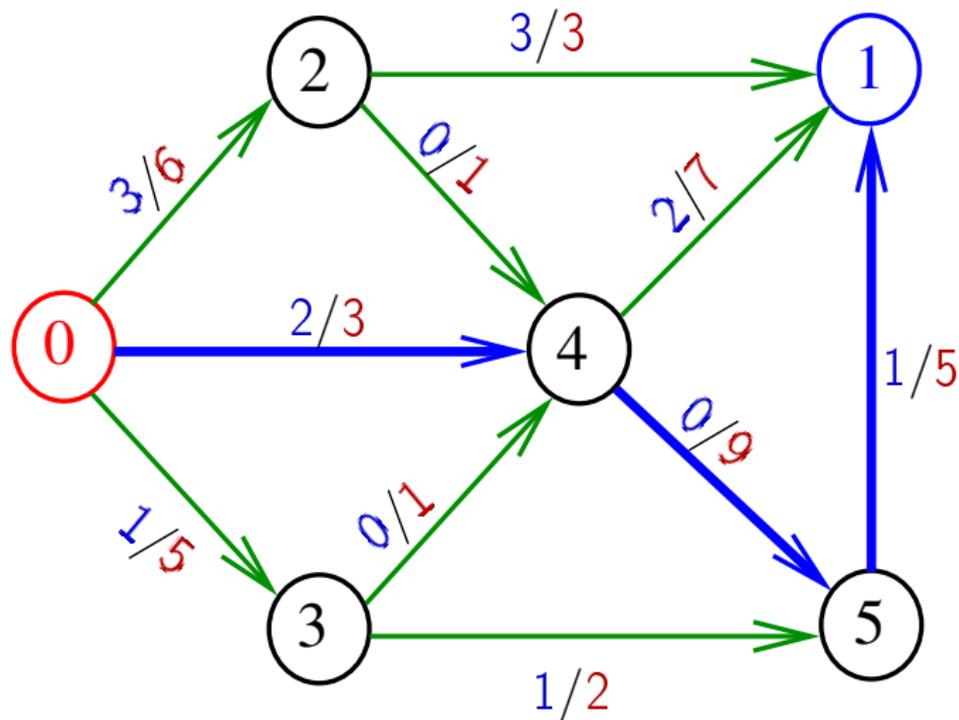
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 6$

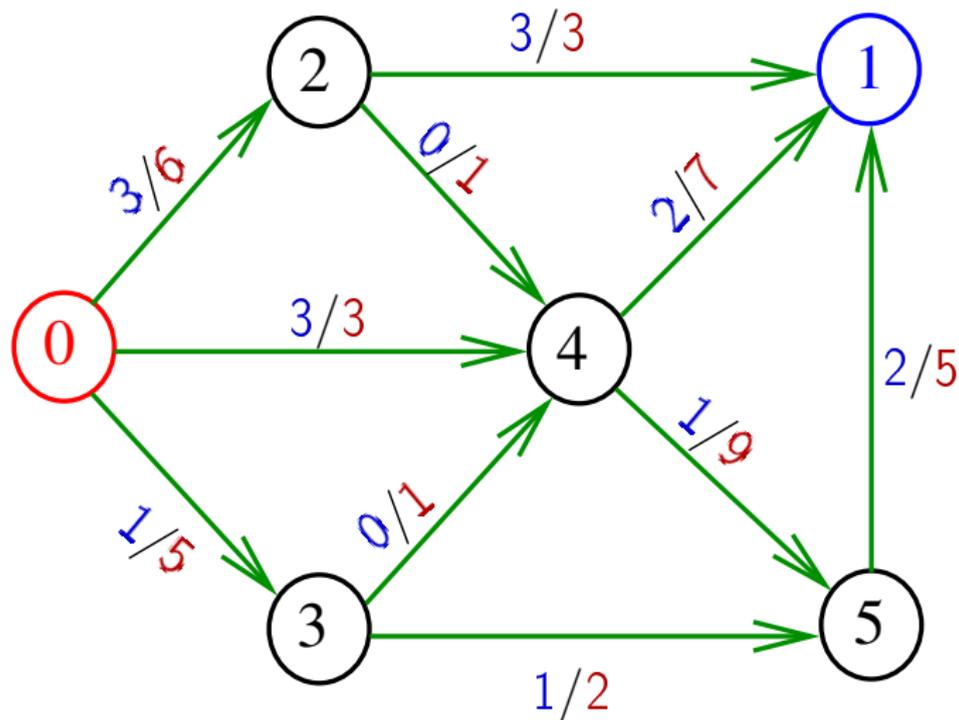
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 7$$

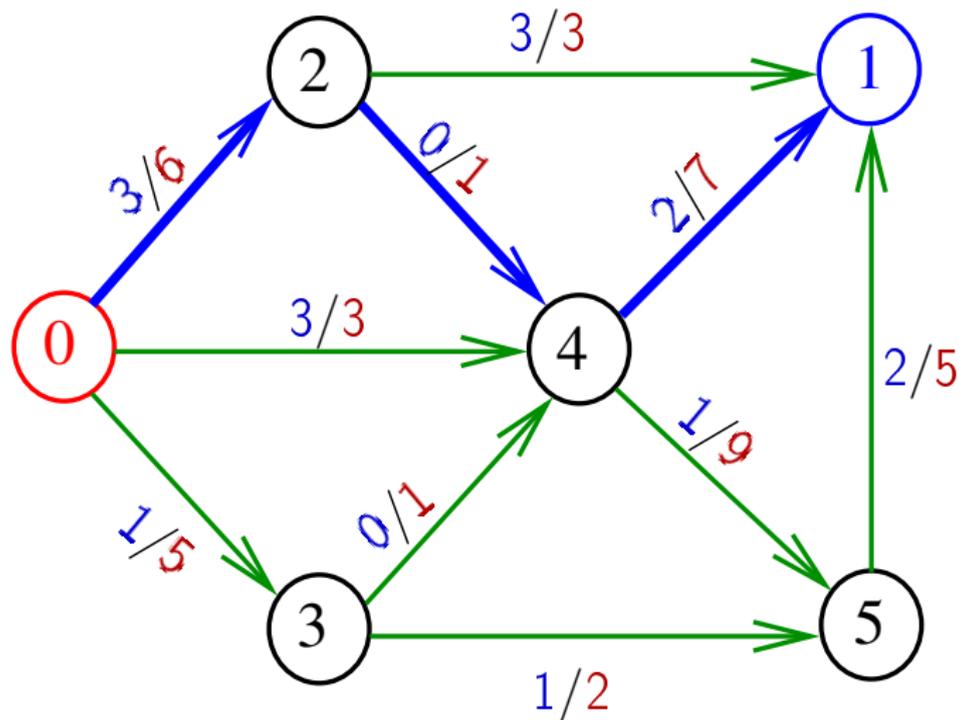
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 7$$

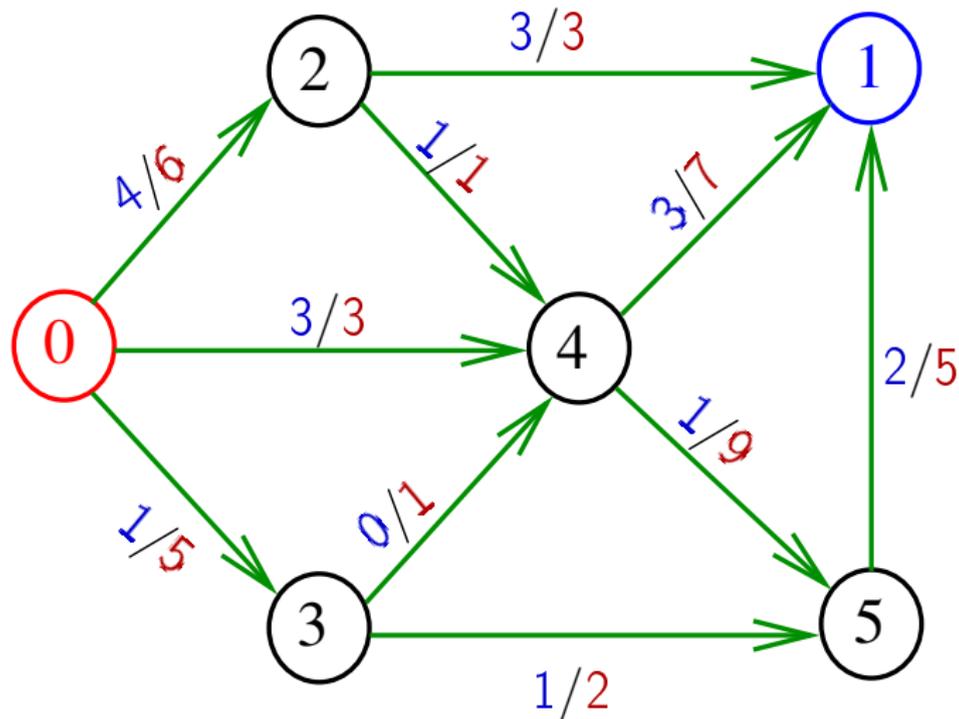
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 8$$

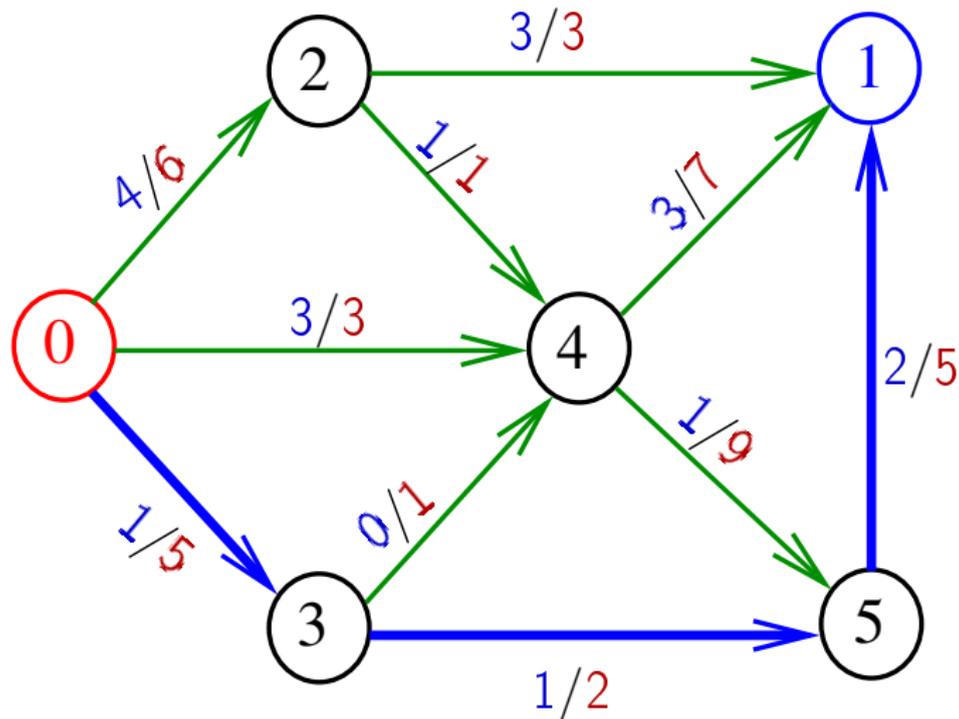
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 8$

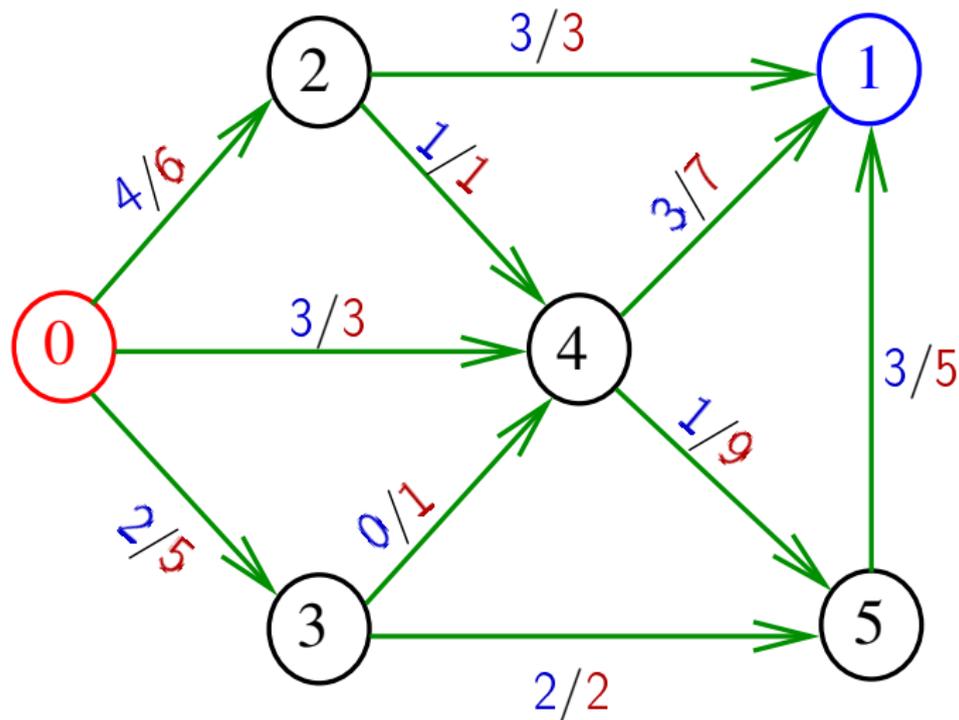
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 9$

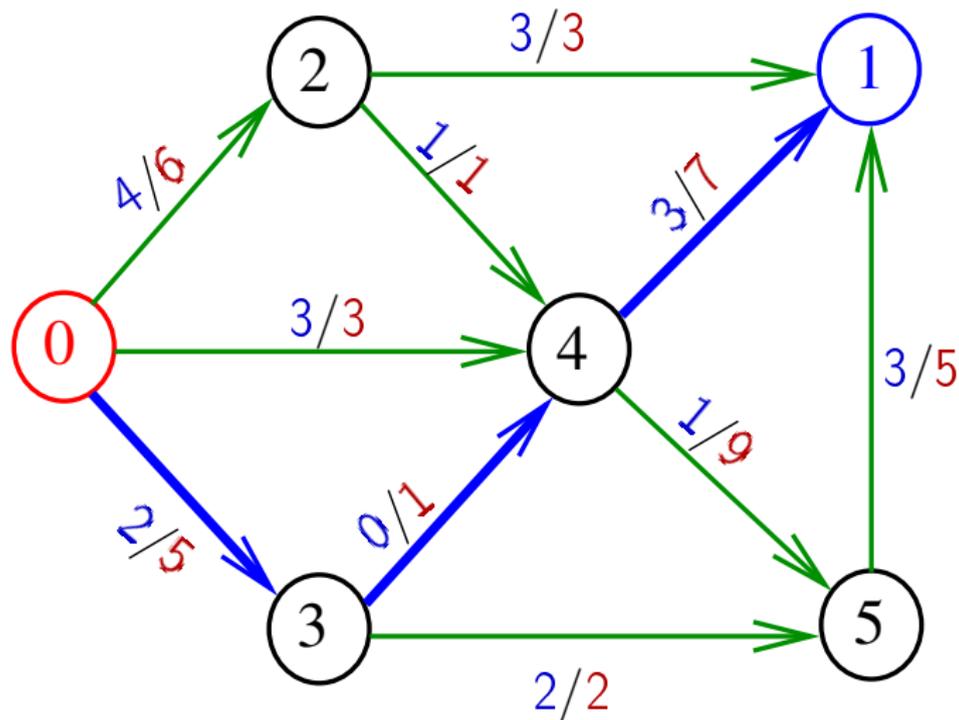
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 9$

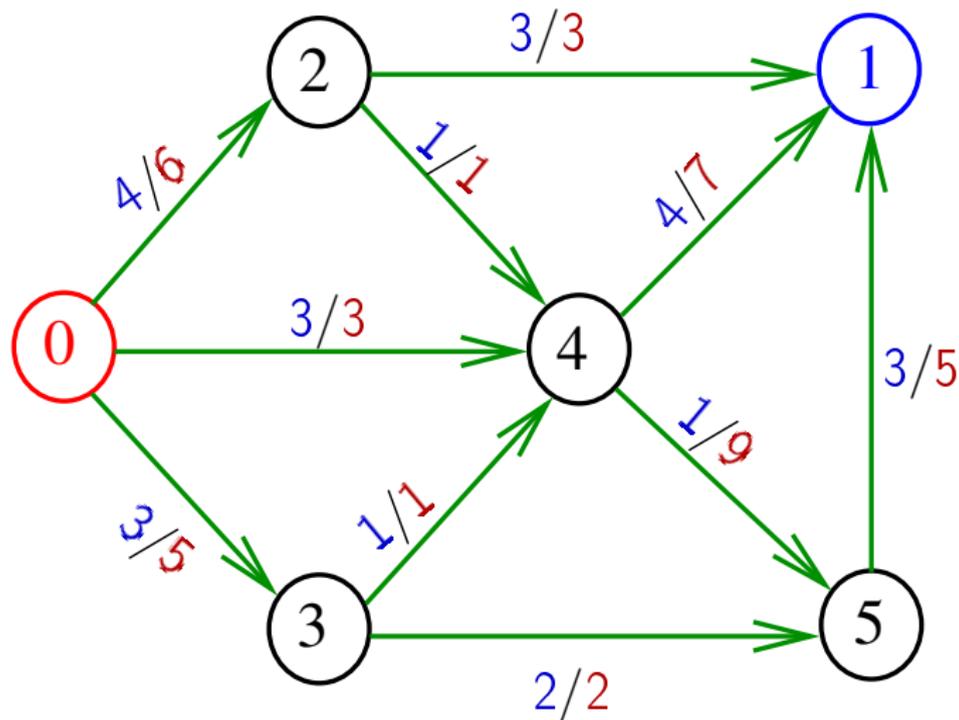
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 10$

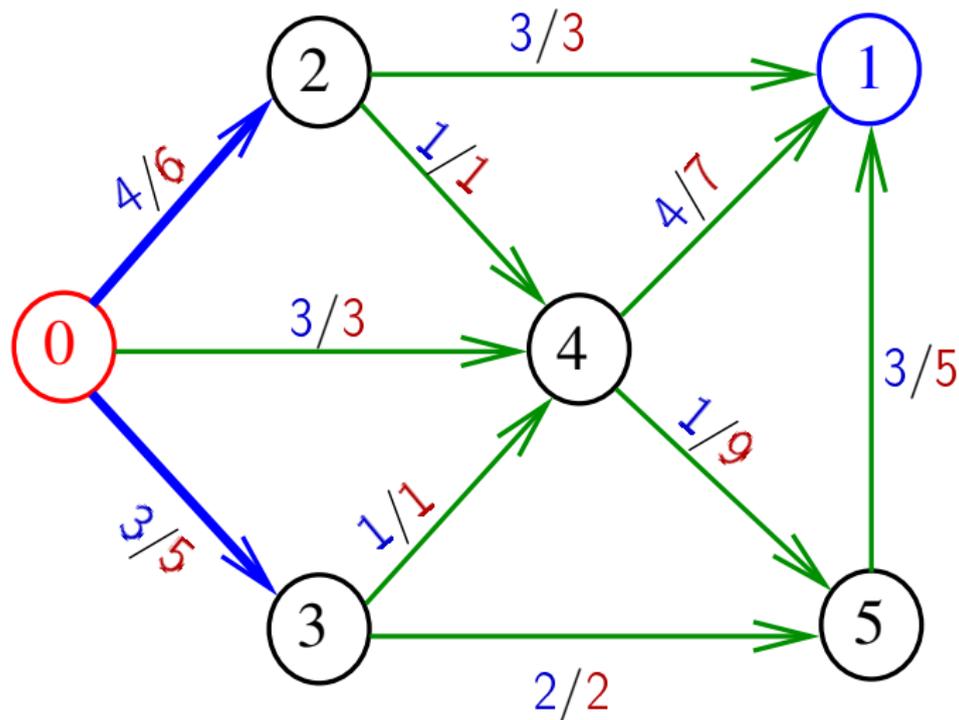
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 10$

$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo f que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração f é o fluxo nulo.

Cada iteração consiste em:

Caso 1: **não existe** um caminho de aumento
Devolva f e pare

Caso 2: **existe** uma caminho de aumento
Seja d a capacidade residual de um
caminho de aumento P
Seja f' o fluxo obtido ao enviarmos d
unidades de fluxo ao longo de P
Comece nova iteração com f' no papel