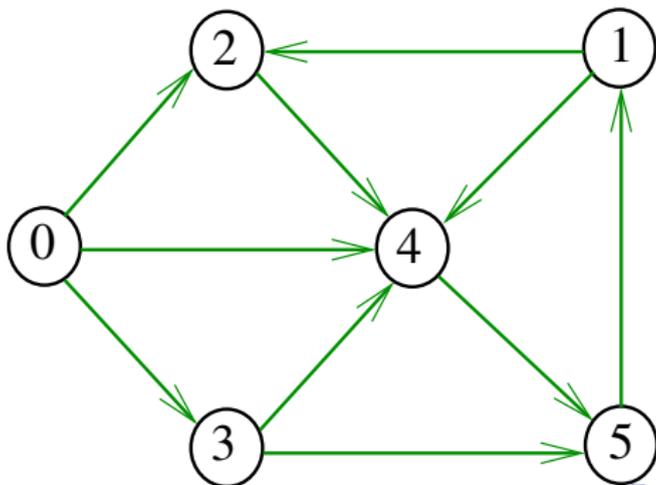


Calculando distâncias

Problema: dados um digrafo G e um vértice s , determinar a distância de s aos demais vértices do digrafo

Exemplo: para $s = 0$

v	0	1	2	3	4	5
$\text{dist}[v]$	0	3	1	1	1	2



Busca em largura

A **busca em largura** (= *breadth-first search search* = *BFS*) começa por um vértice, digamos **s**, especificado pelo usuário.

O algoritmo

visita s,

depois visita vértices à distância 1 de s,

depois visita vértices à distância 2 de s,

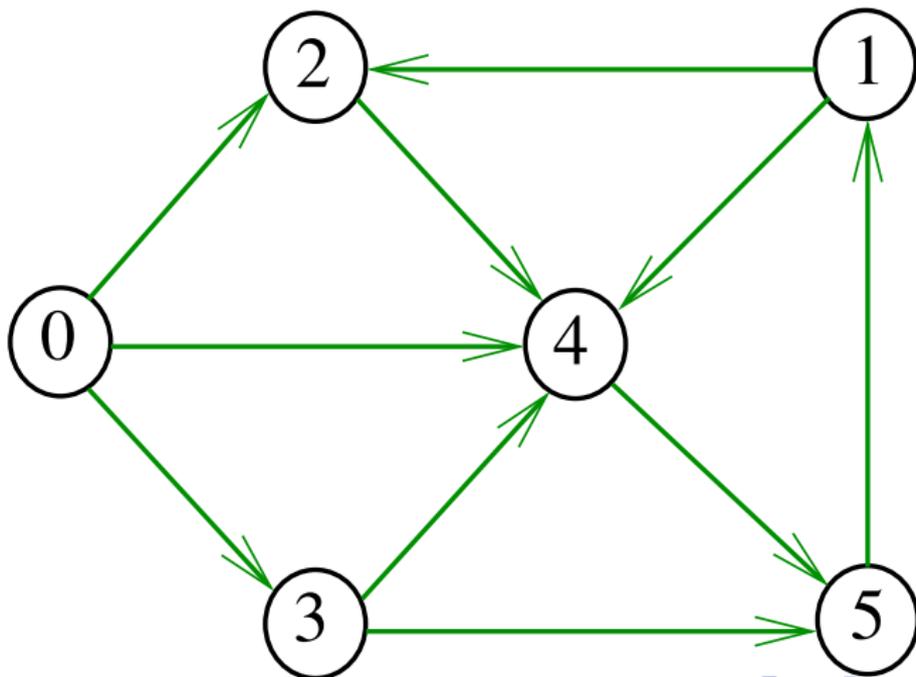
depois visita vértices à distância 3 de s,

e assim por diante

Simulação

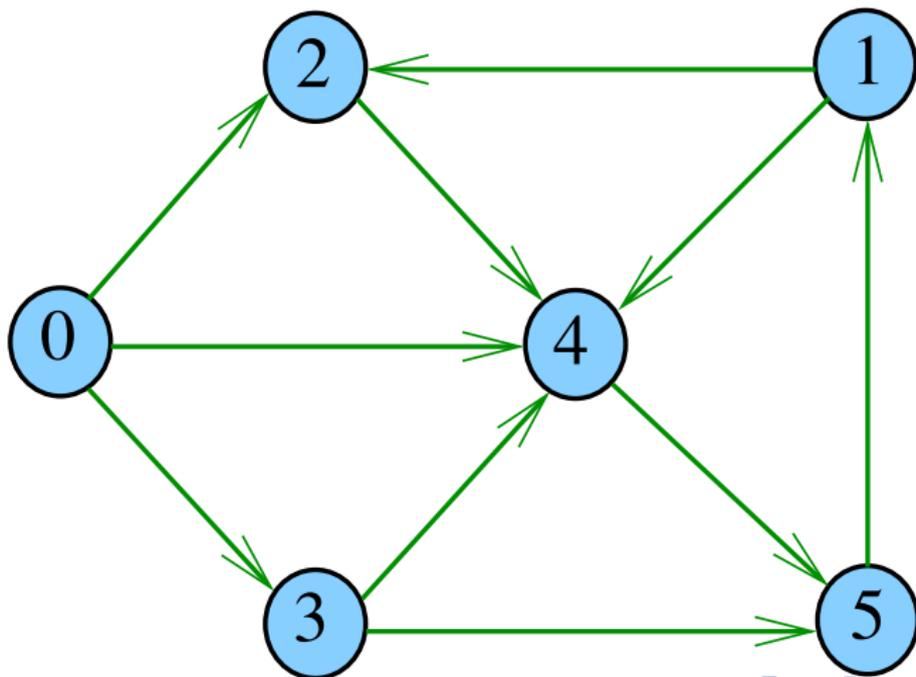
i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$						

v	0	1	2	3	4	5
$\text{dist}[v]$						



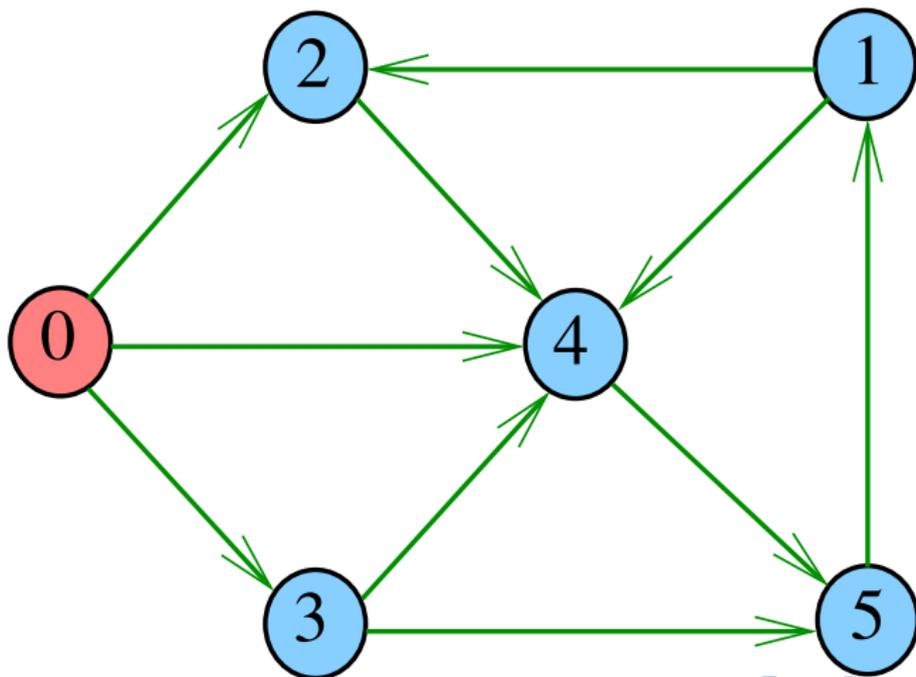
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$						
v	0	1	2	3	4	5
$\text{dist}[v]$	6	6	6	6	6	6



Simulação

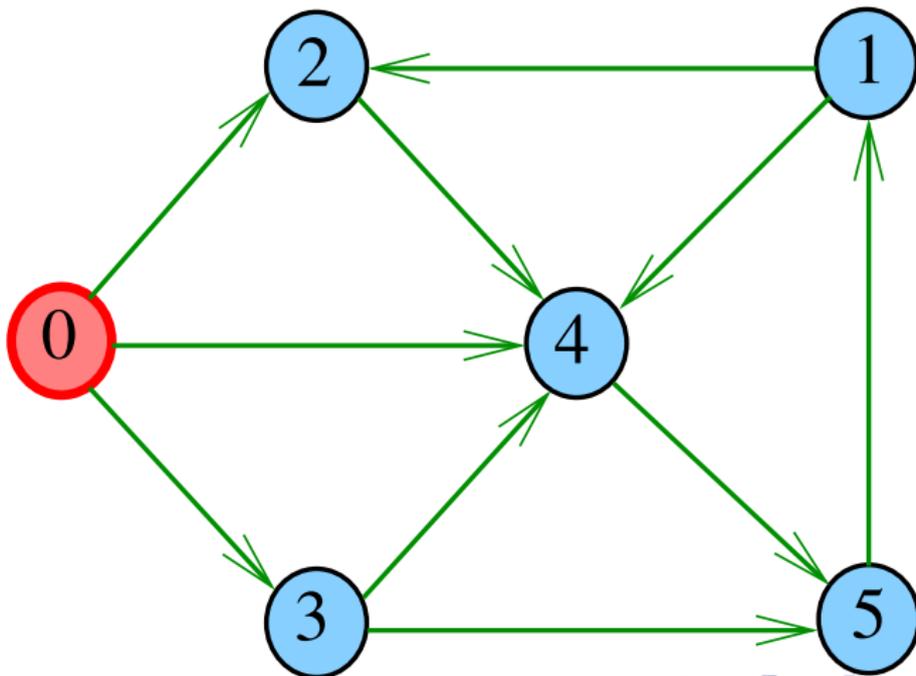
i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0					
v	0	1	2	3	4	5
$\text{dist}[v]$	6	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0					

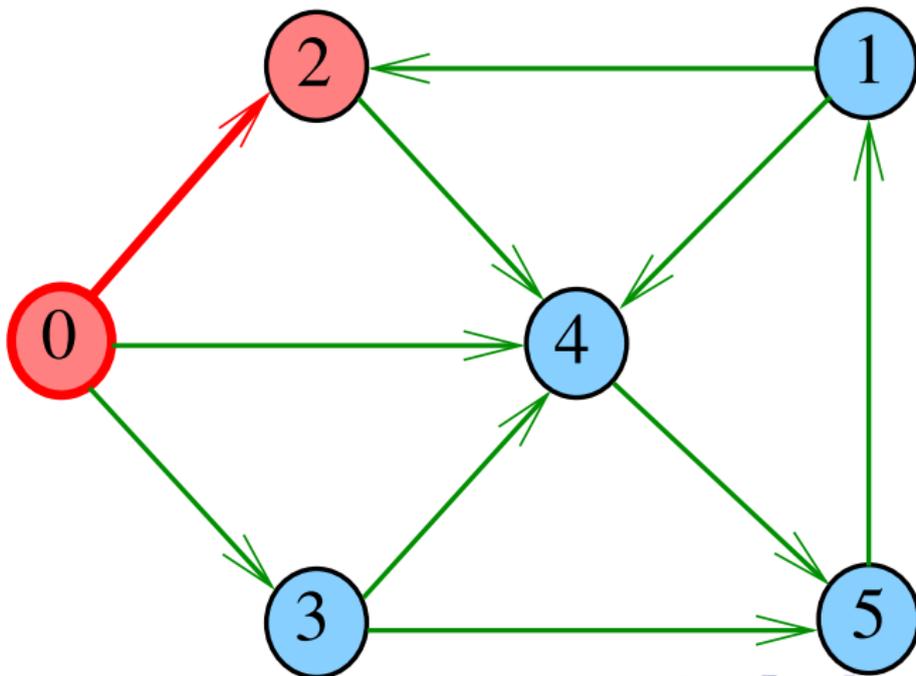
v	0	1	2	3	4	5
$\text{dist}[v]$	0	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2				

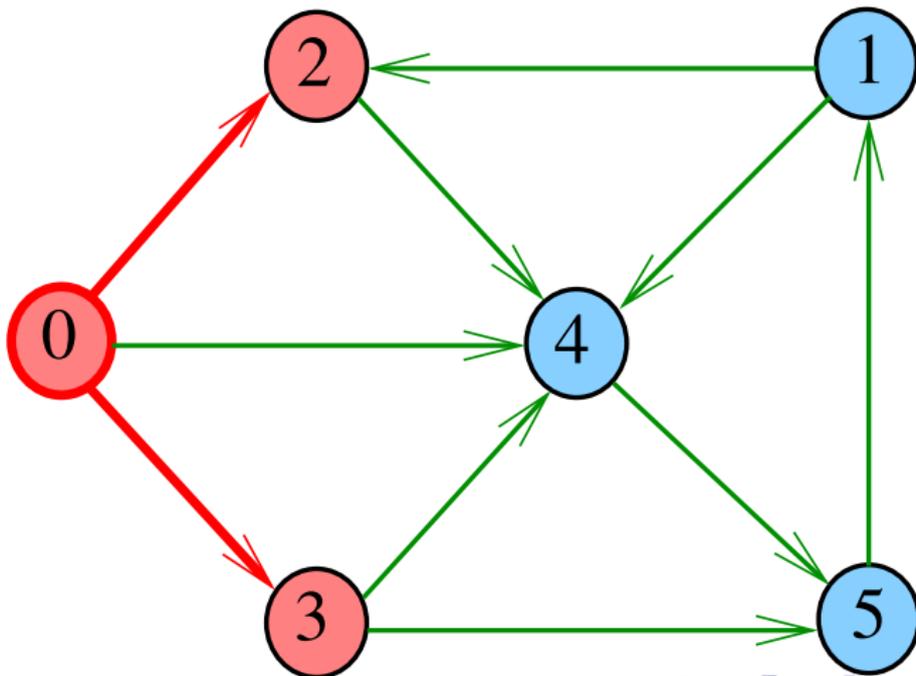
v	0	1	2	3	4	5
$\text{dist}[v]$	0	6	1	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3			

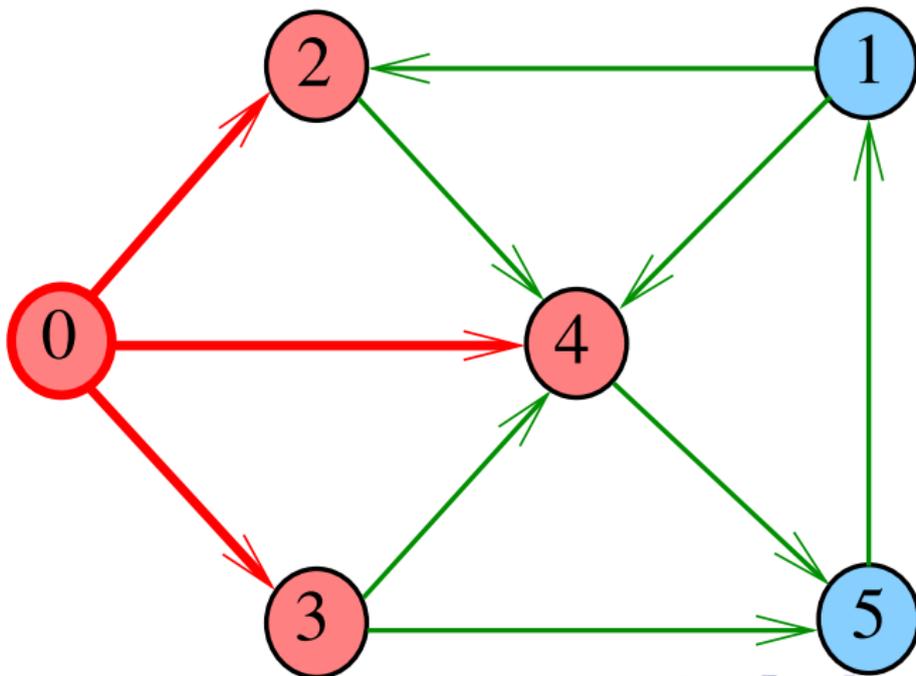
v	0	1	2	3	4	5
$dist[v]$	0	6	1	1	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4		

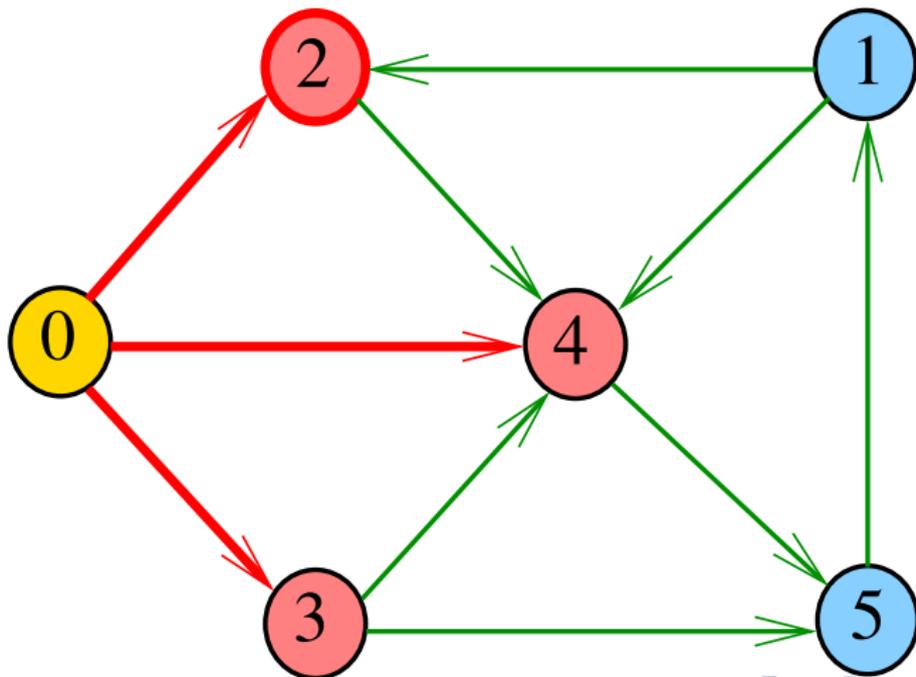
v	0	1	2	3	4	5
$dist[v]$	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4		

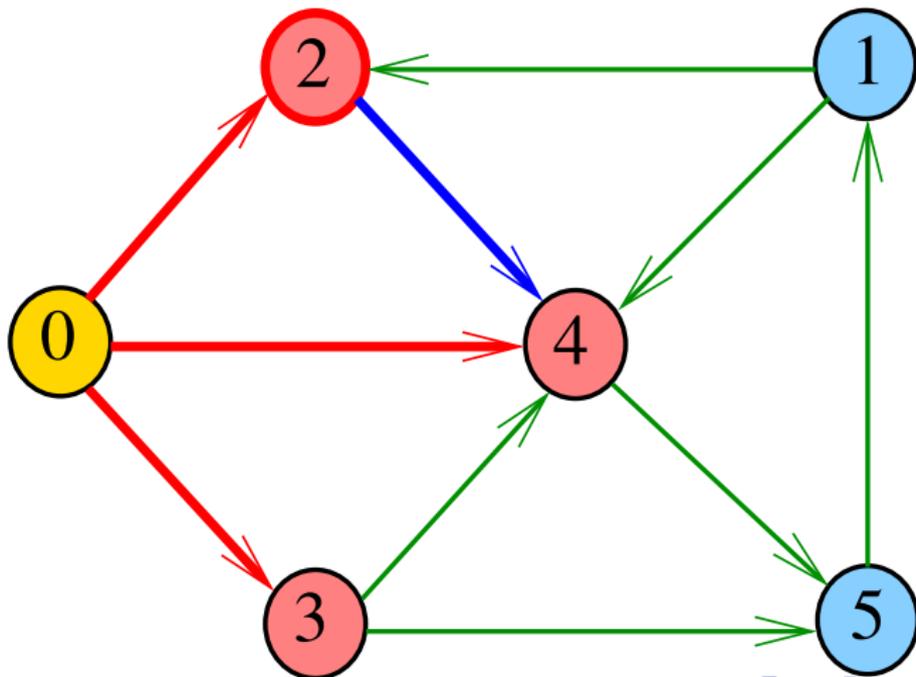
v	0	1	2	3	4	5
$dist[v]$	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4		

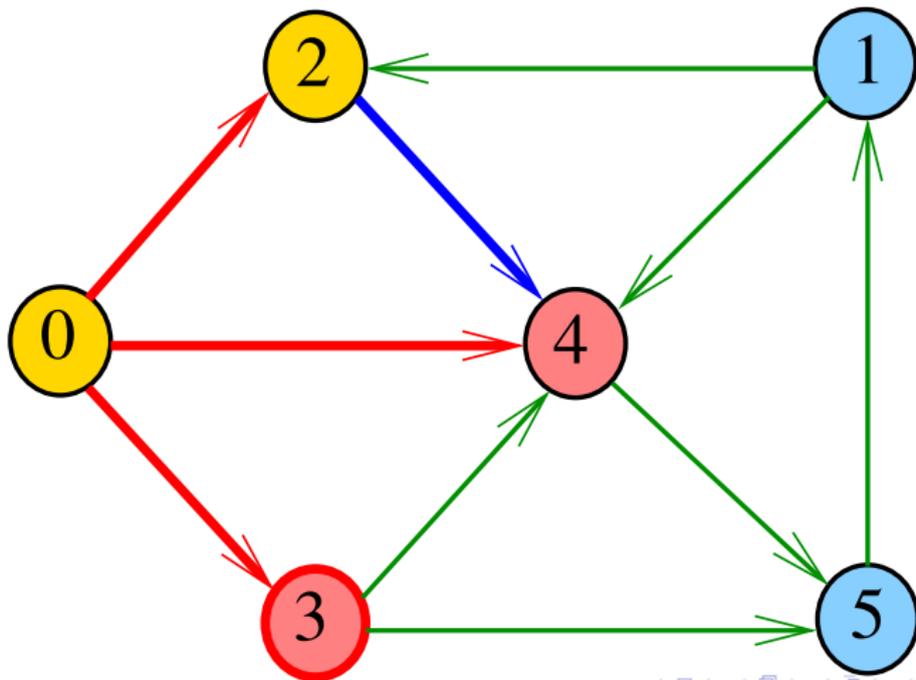
v	0	1	2	3	4	5
$dist[v]$	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4		

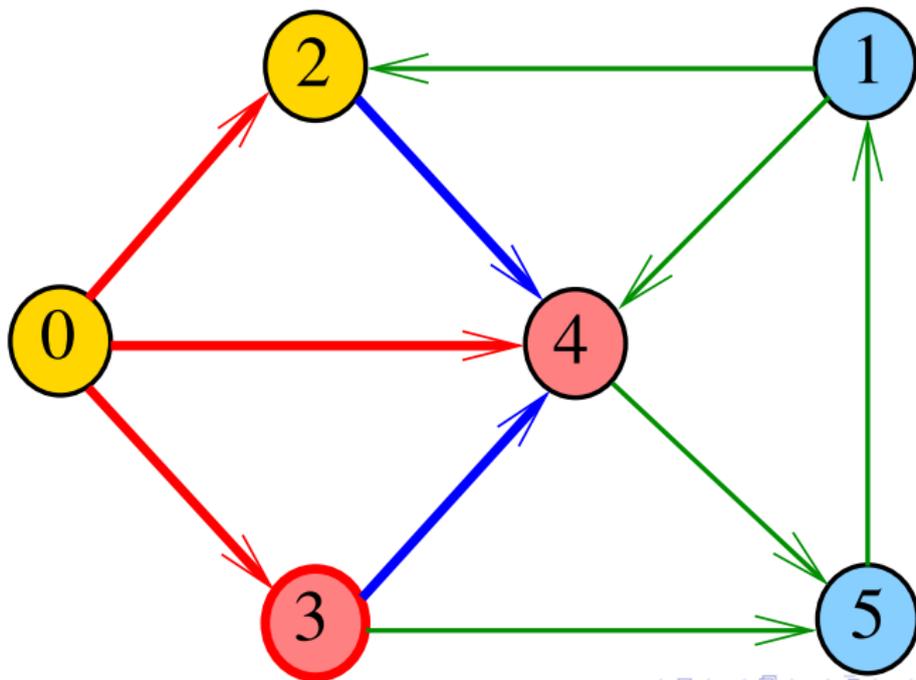
v	0	1	2	3	4	5
$dist[v]$	0	6	1	1	1	6



Simulação

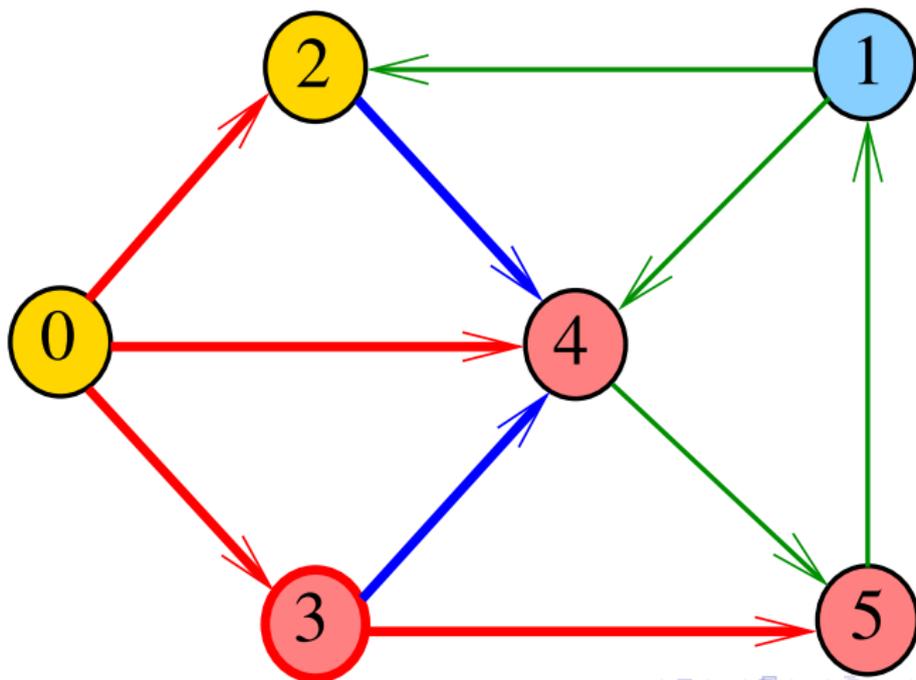
i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4		

v	0	1	2	3	4	5
$dist[v]$	0	6	1	1	1	6



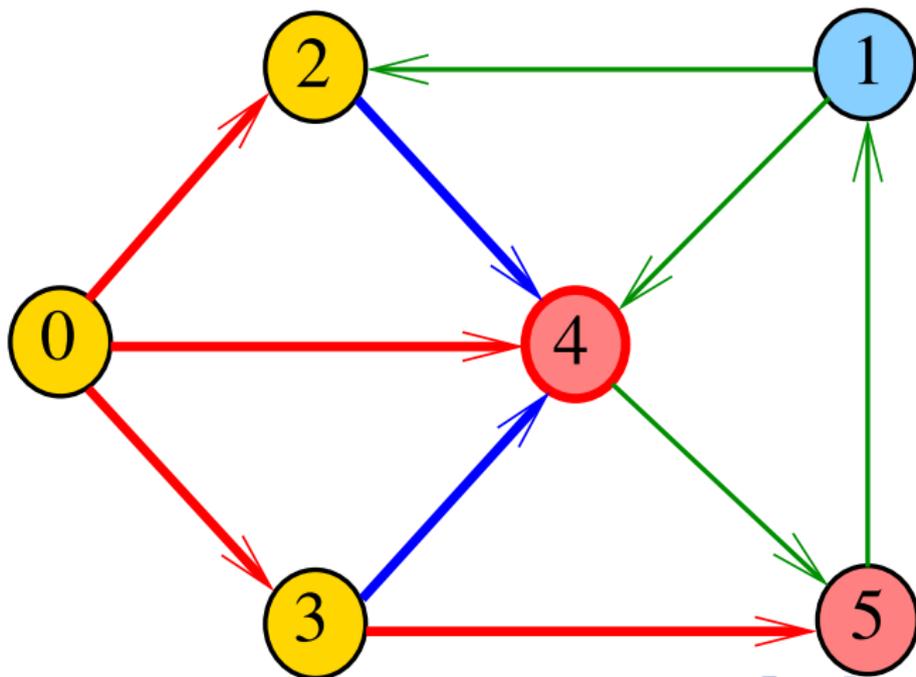
Simulação

i	0	1	2	3	4	5	v	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4	5		$\text{dist}[v]$	0	6	1	1	1	2



Simulação

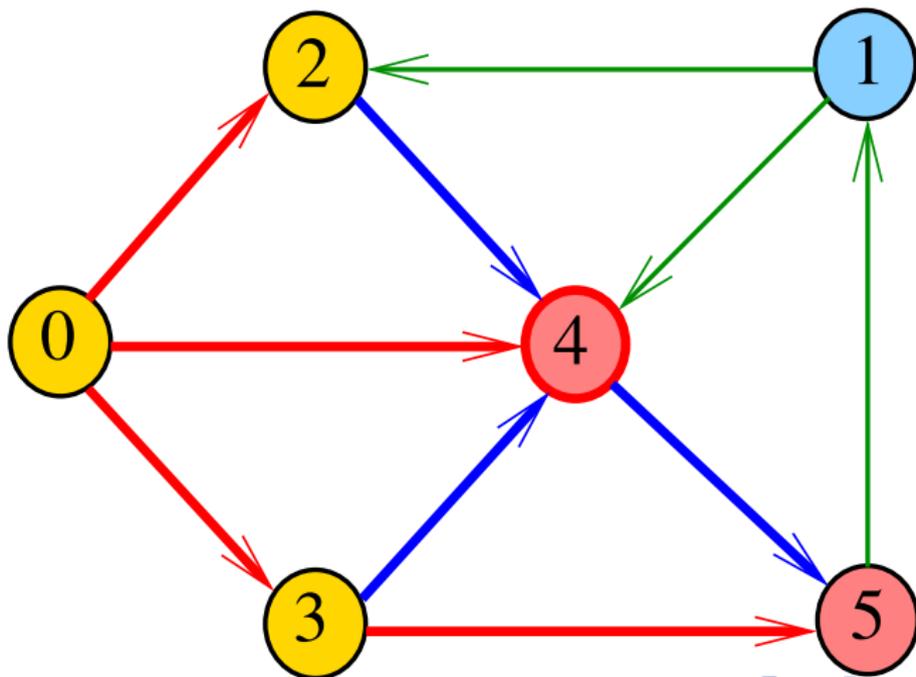
i	0	1	2	3	4	5	v	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4	5		$\text{dist}[v]$	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4	5	

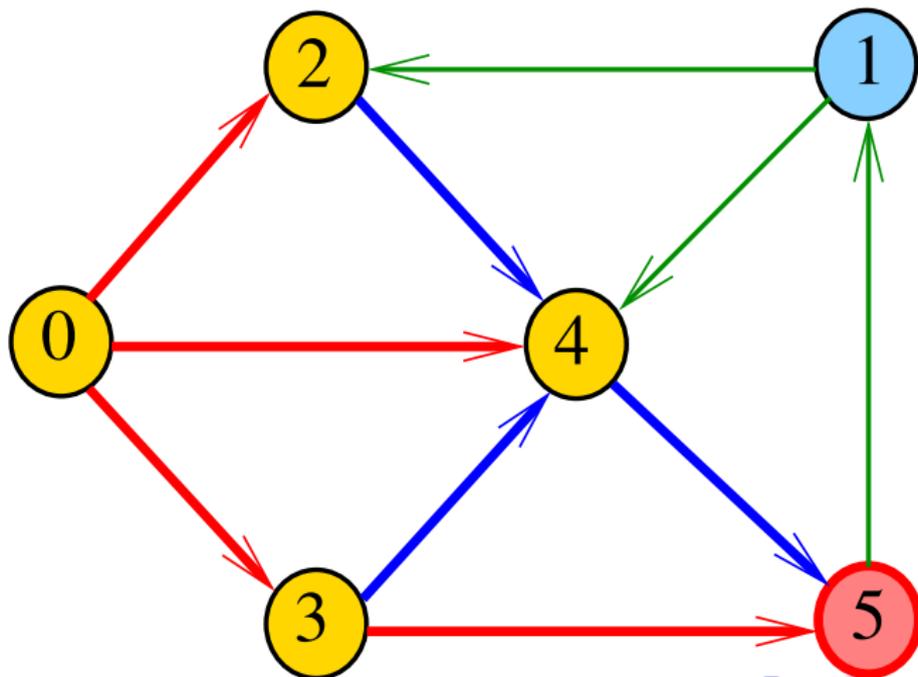
v	0	1	2	3	4	5
$\text{dist}[v]$	0	6	1	1	1	2



Simulação

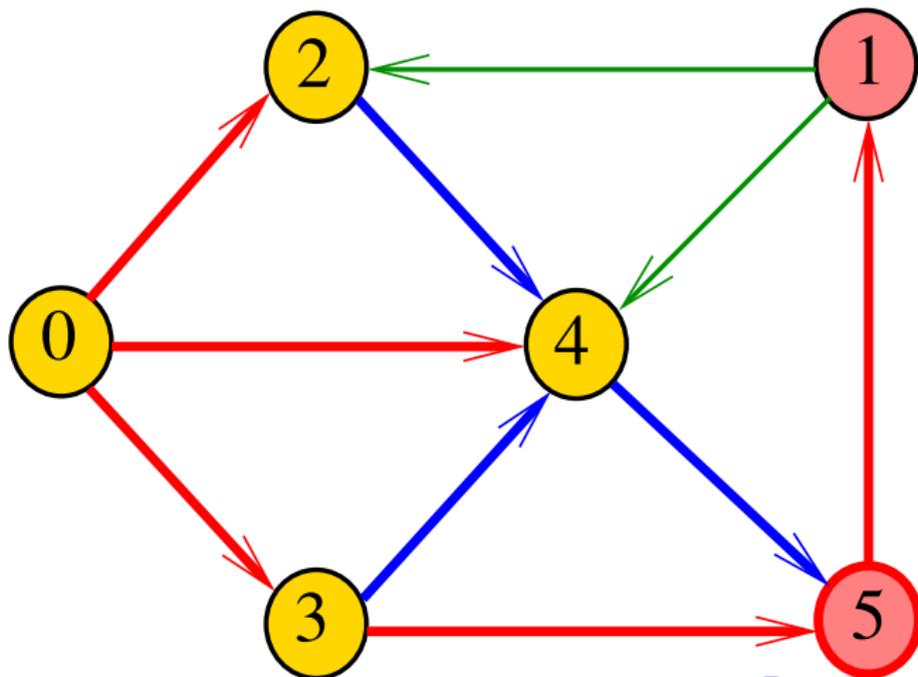
i	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4	5	

v	0	1	2	3	4	5
$\text{dist}[v]$	0	6	1	1	1	2



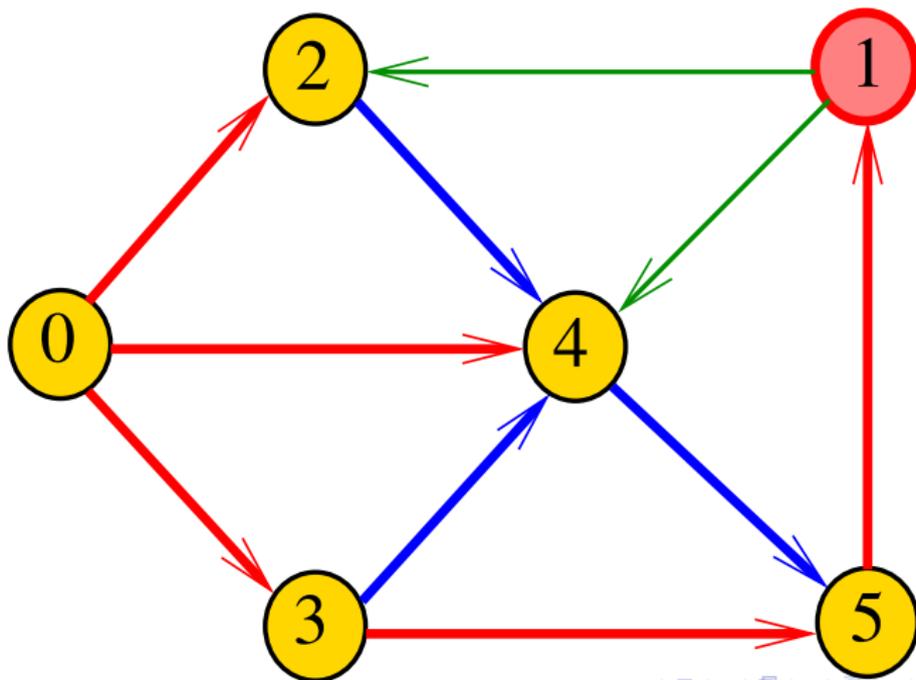
Simulação

i	0	1	2	3	4	5	v	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4	5	1	$\text{dist}[v]$	0	3	1	1	1	2



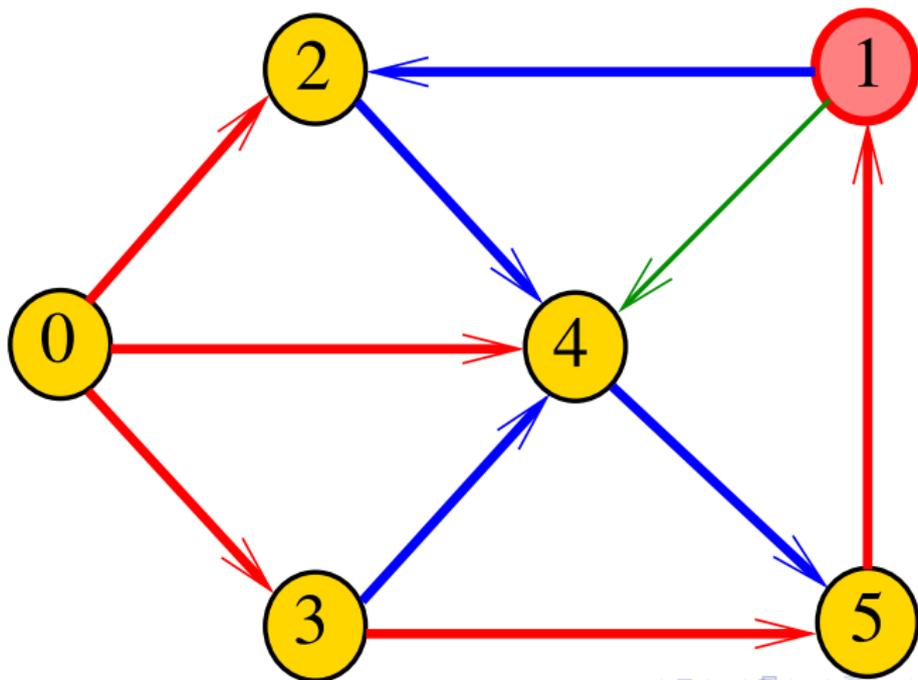
Simulação

i	0	1	2	3	4	5	v	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4	5	1	$\text{dist}[v]$	0	3	1	1	1	2



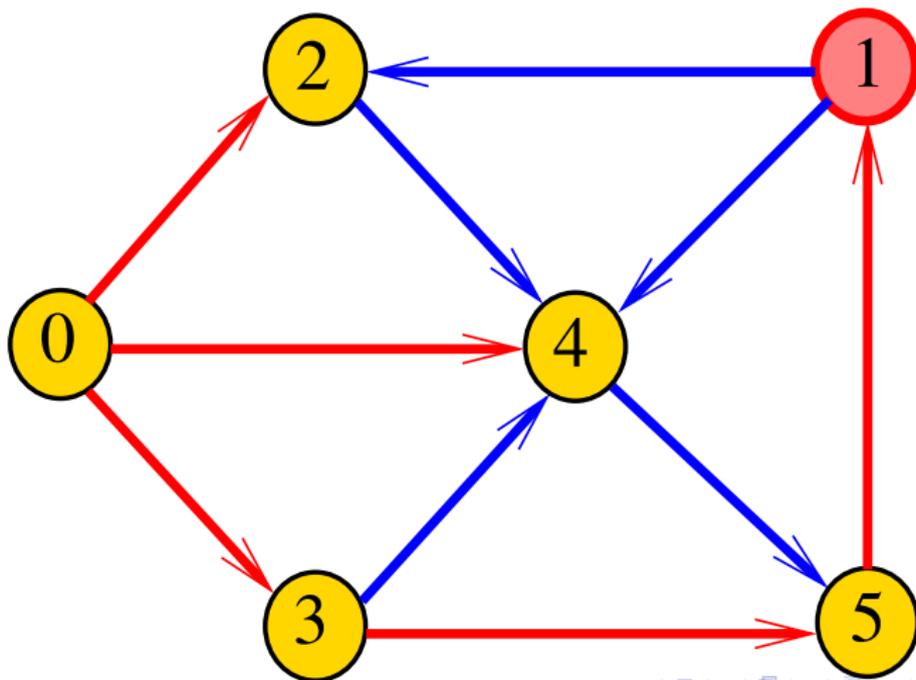
Simulação

i	0	1	2	3	4	5	v	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4	5	1	$\text{dist}[v]$	0	3	1	1	1	2



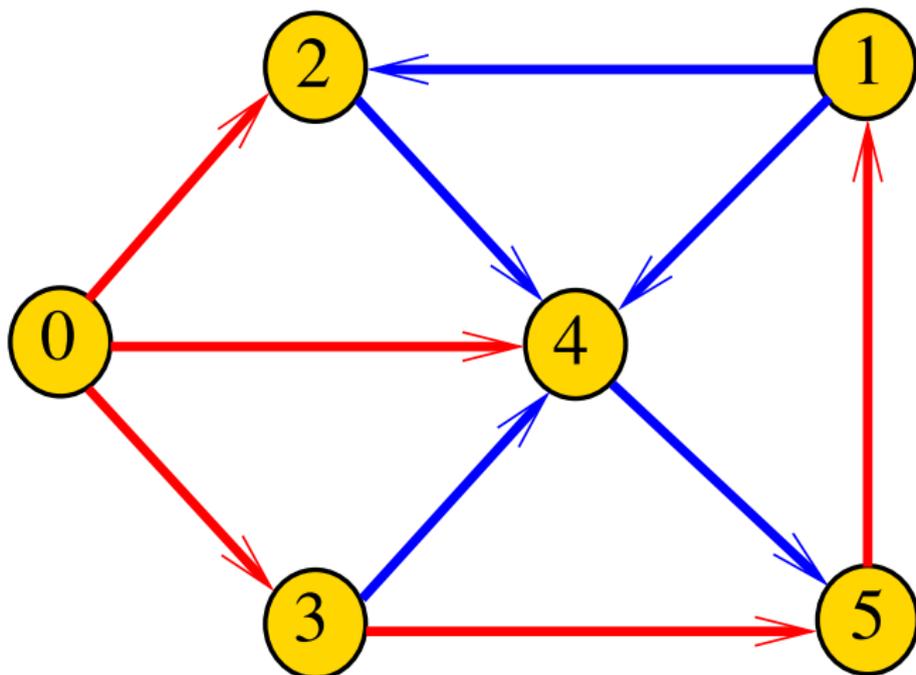
Simulação

i	0	1	2	3	4	5	v	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4	5	1	$\text{dist}[v]$	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5	v	0	1	2	3	4	5
$q[i]$	0	2	3	4	5	1	$\text{dist}[v]$	0	3	1	1	1	2



DIGRAPHdist

```
#define INFINITO G->V /* ou maxV */
static int dist[maxV];
static Vertex parnt[maxV];
void DIGRAPHdist (Digraph G, Vertex s) {
1  Vertex v, w ; link p ;
2  for (v = 0; v < G->V ; v++)
3      dist[v] = INFINITO;
4      parnt[v] = -1;
    }
5  QUEUEinit(G->V);
6  dist[s] = 0;
7  parnt[s] = s ;
```

DIGRAPHdist

```
8  QUEUEput(s);
9  while (!QUEUEempty()) {
10     v = QUEUEget();
11     for(p = G->adj[v]; p; p = p->next)
12         if (dist[w = p->w] == INFINITO){
13             dist[w] = dist[v] + 1;
14             parnt[w] = v ;
15             QUEUEput(w);
16         }
17     }
18     QUEUEfree();
19 }
```

1-Potenciais

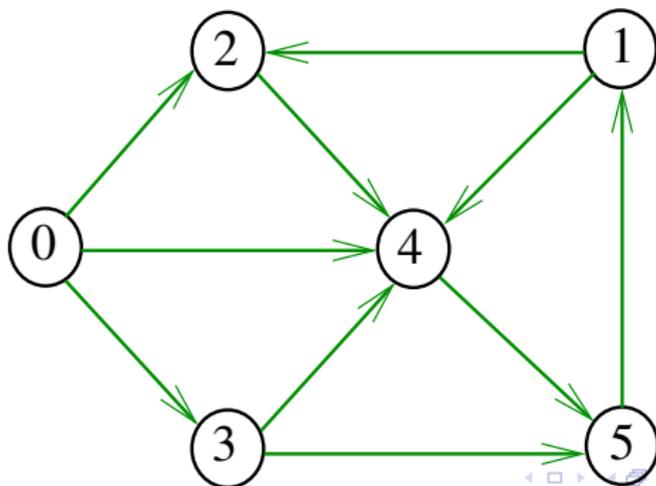
1-potenciais

Um **1-potencial** é um vetor y indexado pelos vértices do digrafo tal que

$$y[w] - y[v] \leq 1 \text{ para todo arco } v-w$$

Exemplo:

v	0	1	2	3	4	5
$y[v]$	1	1	1	1	1	1



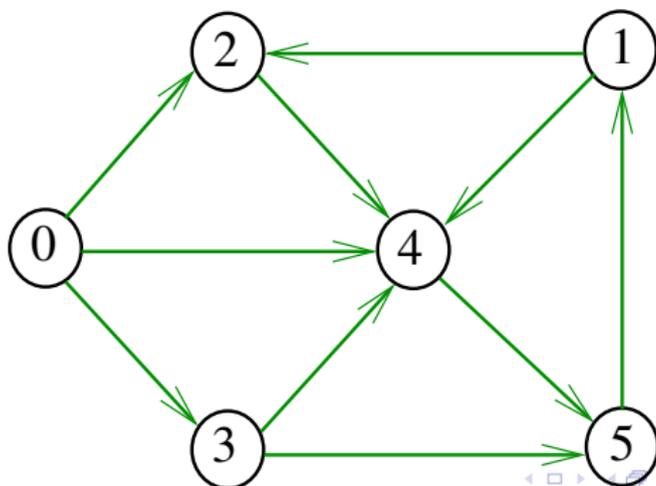
1-potenciais

Um **1-potencial** é um vetor y indexado pelos vértices do digrafo tal que

$$y[w] - y[v] \leq 1 \text{ para todo arco } v-w$$

Exemplo:

v	0	1	2	3	4	5
$y[v]$	1	2	2	1	1	2



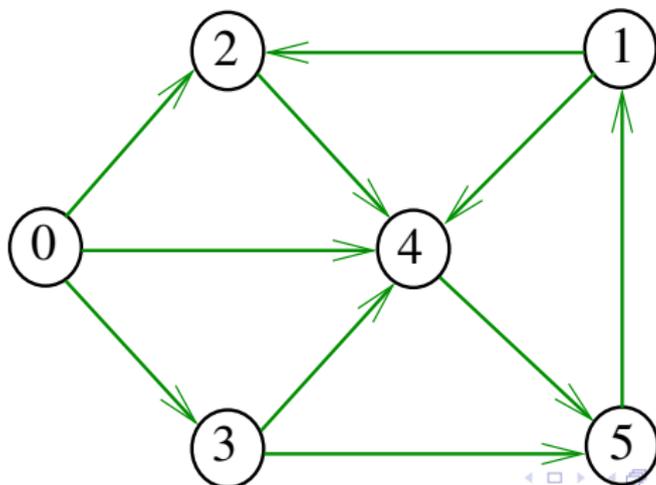
Propriedade dos 1-potenciais

Lema da dualidade. Se y é um 1-potencial e P é um caminho de s a t , então

$$y[t] - y[s] \leq |P|$$

Exemplo:

v	0	1	2	3	4	5
$y[v]$	6	6	6	7	7	7



Consequência

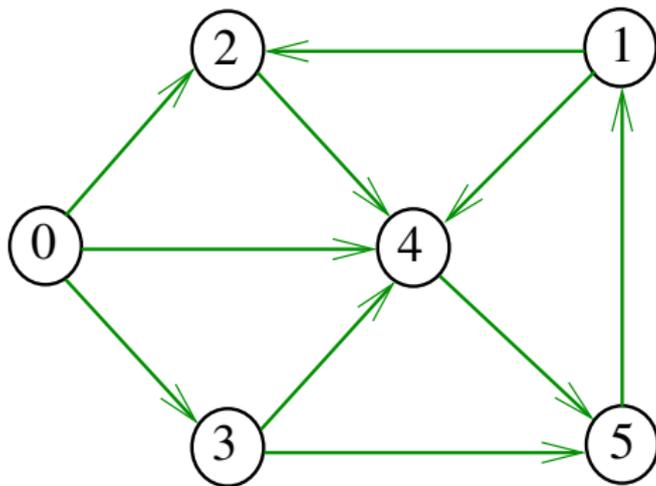
Se P é um caminho de s a t e y é um 1-potencial tais que

$$|P| = y[t] - y[s],$$

então P é um caminho **mínimo** e y é um 1-potencial tal que $y[t] - y[s]$ é **máximo**

Exemplo

v	0	1	2	3	4	5
$y[v]$	0	3	1	1	1	2



Invariantes

Abaixo está escrito y no papel de dist
Na linha 9 da função DIGRAPHdist valem as
seguintes invariantes:

- (i0) para cada arco $v-w$ na arborescência BFS tem-se que $y[w] - y[v] = 1$;
- (i1) $\text{parnt}[s] = s$ e $y[s] = 0$;
- (i2) para cada vértice v ,
 $y[v] \neq G \rightarrow V \Leftrightarrow \text{parnt}[v] \neq -1$;
- (i3) para cada vértice v , se $\text{parnt}[v] \neq -1$ então existe um caminho de s a v na arborescência BFS.

Invariantes (continuação)

Abaixo está escrito `y` no papel de `dist`
Na linha 9 da função `DIGRAPHdist` vale a seguinte
relação invariante:

(i4) para cada arco `v-w` se

$$y[w] - y[v] > 1$$

então `v` está na fila.

Correção de DIGRAPHdist

Início da última iteração:

- y é um 1-potencial, por (i4)
- se $y[t] \neq G \rightarrow V$, então $\text{parnt}[t] \neq -1$ [(i2)].
Logo, de (i3), segue que existe um s - t -caminho P na arborescência BFS. (i0) e (i1) implicam que

$$|P| = y[t] - y[s] = y[t].$$

Da propriedade dos 1-potenciais, concluímos que P é um s - t -caminho de comprimento mínimo

- se $y[t] = G \rightarrow V$, então (i1) implica que $y[t] - y[s] = G \rightarrow V$ e da propriedade dos 1-potenciais concluímos que não existe caminho de s a t no grafo

Conclusão: o algoritmo faz o que promete. 

Teorema da dualidade

Da propriedade dos 1-potenciais (lema da dualidade) e da correção de DIGRAPHdist concluimos o seguinte:

Se s e t são vértices de um digrafo e t está ao alcance de s então

$$\begin{aligned} & \min\{|P| : P \text{ é um } s \text{ } t\text{-caminho}\} \\ & = \max\{y[t] - y[s] : y \text{ é um 1-potencial}\}. \end{aligned}$$

Custos nos arcos

S 20.1

Digrafos com custos nos arcos

Muitas aplicações associam um número a cada arco de um digrafo

Diremos que esse número é o custo da arco

Vamos supor que esses números são do tipo **double**

```
typedef struct {  
    Vertex v;  
    Vertex w;  
    double cst;  
} Arc;
```

ARC

A função **ARC** recebe dois vértices **v** e **w** e um valor **cst** e devolve um arco com ponta inicial **v** e ponta final **w** e custo **cst**

```
Arc ARC (Vertex v , Vertex w , double cst)
```

```
{
```

```
1     Arc e;
```

```
2     e.v = v ;    e.w = w ;
```

```
3     e.cst = cst;
```

```
4     return e;
```

```
}
```

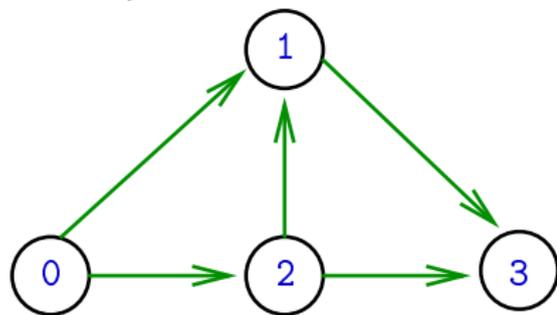
Matriz de adjacência

Matriz de adjacência indica a presença ausência e custo dos arcos:

se $v-w$ é um arco, $adj[v][w]$ é seu custo

se $v-w$ não é arco, $adj[v][w] = \text{maxCST}$

Exemplo:



	0	1	2	3
0	*	.3	2	*
1	*	*	*	.42
2	*	1	*	.12
3	*	*	*	*

* indica maxCST

Estrutura digraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo
adj é um ponteiro para a matriz de adjacência
V contém o número de vértices
A contém o número de arcos do digrafo.

```
struct digraph {  
    int V ;  
    int A ;  
    double **adj;  
};
```

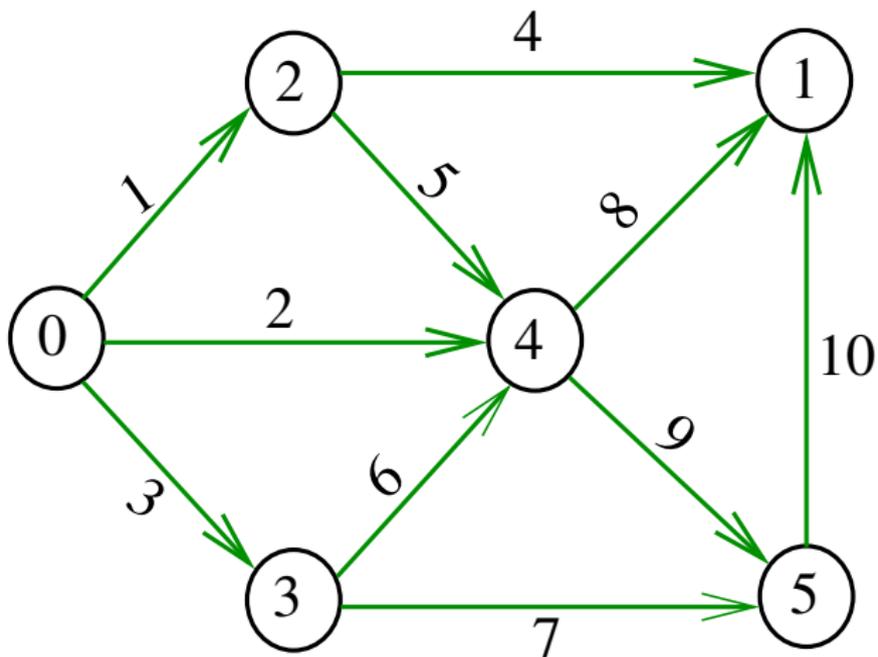
Estrutura Digraph

Um objeto do tipo `Digraph` contém o endereço de um `digraph`

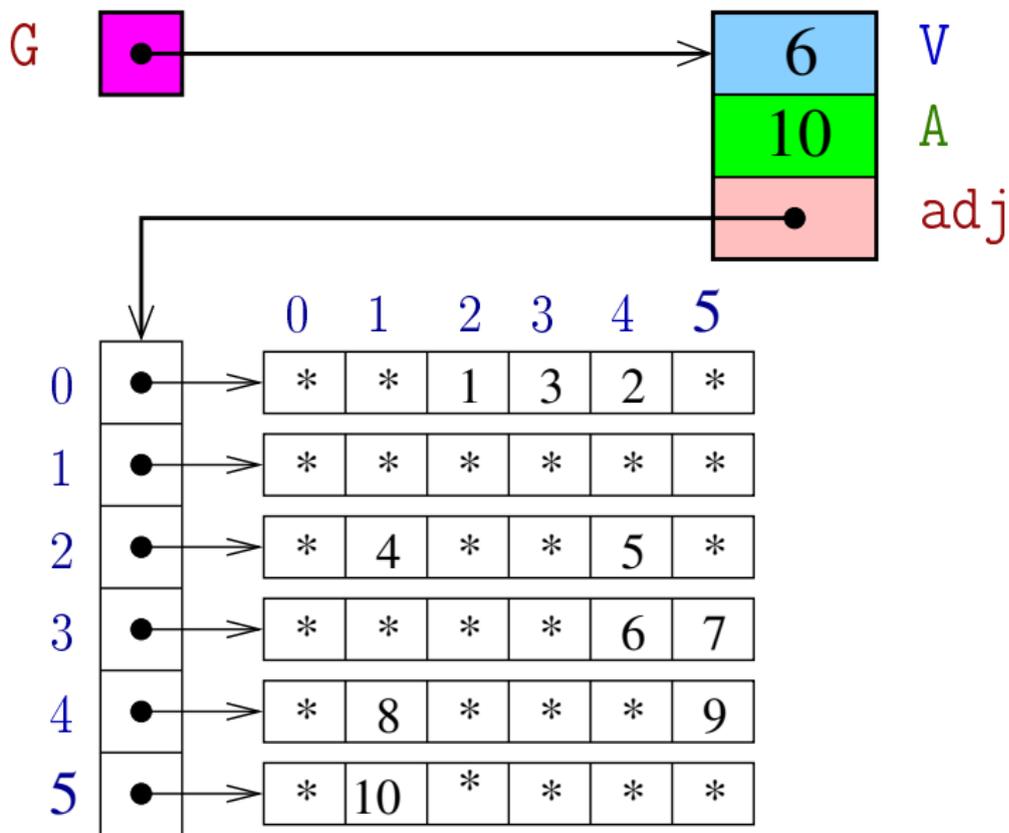
```
typedef struct digraph *Digraph;
```

Digrafo

Digraph G



Estruturas de dados



Com vetor de listas de adjacência

A lista de adjacência de um vértice v é composta por nós do tipo `node`

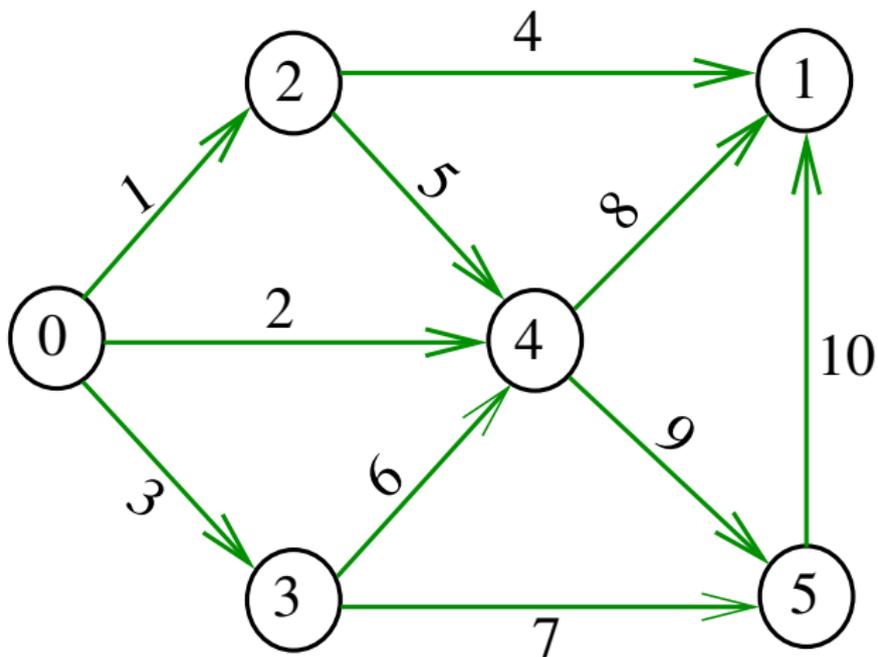
Um `link` é um ponteiro para um `node`

Cada nó da lista contém um vizinho w de v , o **custo** do arco $v-w$ e o endereço do nó seguinte da lista

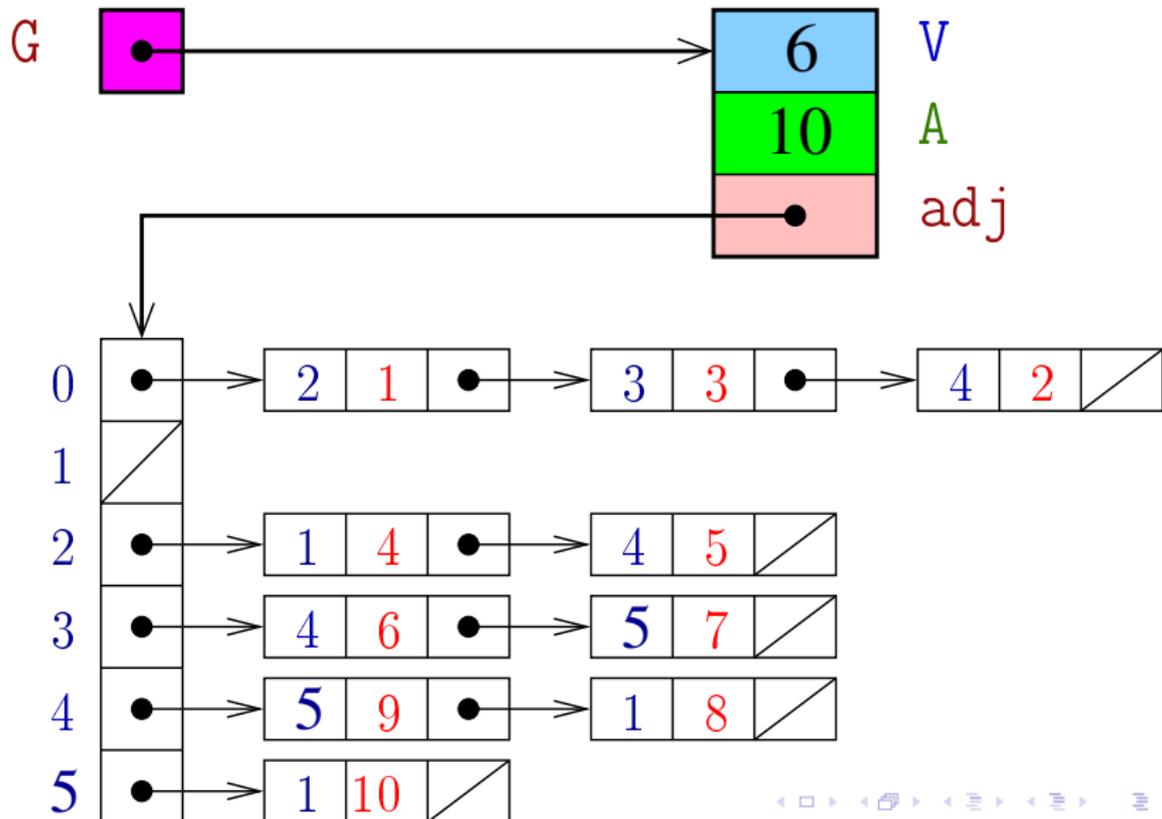
```
typedef struct node *link;
struct node {
    Vertex w ;
    double cst;
    link next;
};
```

Digrafo

Digraph G



Estruturas de dados



Estrutura digraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo
 V contém o número de vértices
 A contém o número de arcos do digrafo
 adj é um ponteiro para vetor de listas de
adjacência

```
struct digraph {  
    int V ;  
    int A ;  
    link *adj ;  
};
```

Estrutura Digraph

Um objeto do tipo `Digraph` contém o endereço de um `digraph`

```
typedef struct digraph *Digraph;
```

Construtor de nós

`NEW` recebe um vértice `w`, um custo `cst` e o endereço `next` de um nó e devolve o endereço `x` de um novo nó com `x->w=w`, e `x->cst=cst` e `x->next=next`

```
link NEW (Vertex w , double cst, link next)
{
    link x = malloc(sizeof *x);
    x->w = w ;
    x->cst = cst;
    x->next = next;
    return x;
}
```

DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices $0, \dots, V-1$ e nenhum arco

```
Digraph DIGRAPHinit (int V) {  
0     Vertex v ;  
1     Digraph G = malloc(sizeof *G);  
2     G->V = V ;  
3     G->A = 0;  
4     G->adj = malloc(V * sizeof(link));  
5     for (v = 0; v < V ; v++)  
6         G->adj[v] = NULL;  
7     return G;  
}
```

DIGRAPHinsertA

Inserir um arco $v-w$ de custo cst no digrafo G .

Se $v == w$ ou o digrafo já tem arco $v-w$; não faz nada

void

```
DIGRAPHinsertA(Digraph G, Vertex v, Vertex w,  
               double cst) {
```

```
    link p ;
```

```
    if (v == w) return ;
```

```
    for (p = G->adj[v]; p ; p = p->next)
```

```
        if (p->w == w) return ;
```

```
    G->adj[v] = NEW(w, cst, G->adj[v]);
```

```
    G->A++;
```

```
}
```

Caminhos de custo mínimo

S 21.0 e 21.1

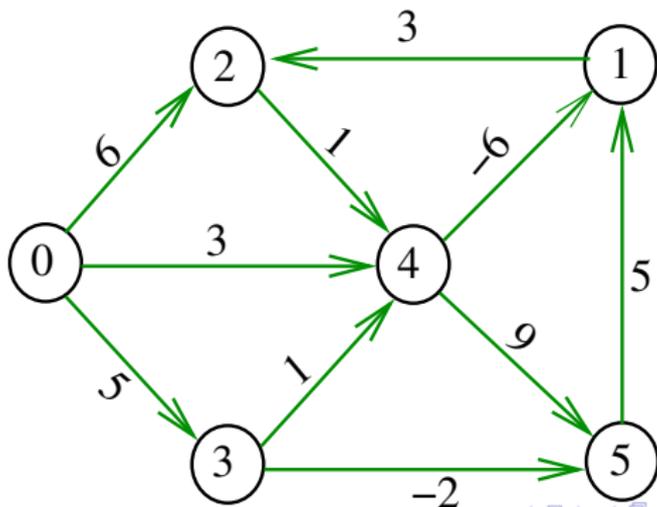
Custo de um caminho

Custo de um caminho é soma dos custos de seus arcos

Custo do caminho 0-2-4-5 é 16.

Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-5 é 14.

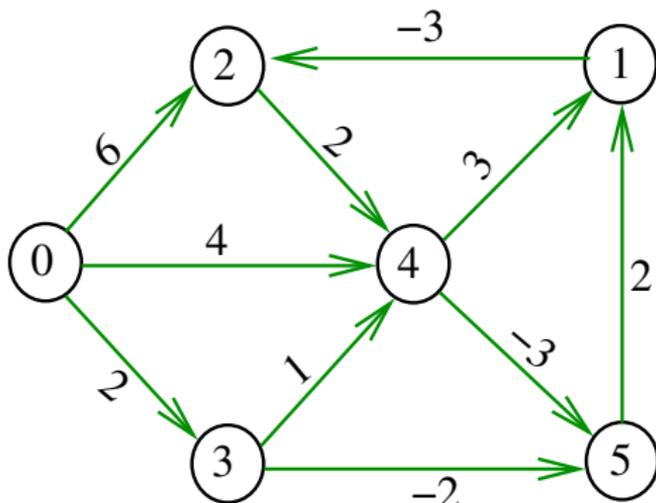
Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-1-2-4-5 é 12.



Caminho mínimo

Um caminho P tem **custo mínimo** se o custo de P é menor ou igual ao custo de todo caminho com a mesma origem e término

O caminho 0-3-4-5-1-2 é mínimo, tem custo -1



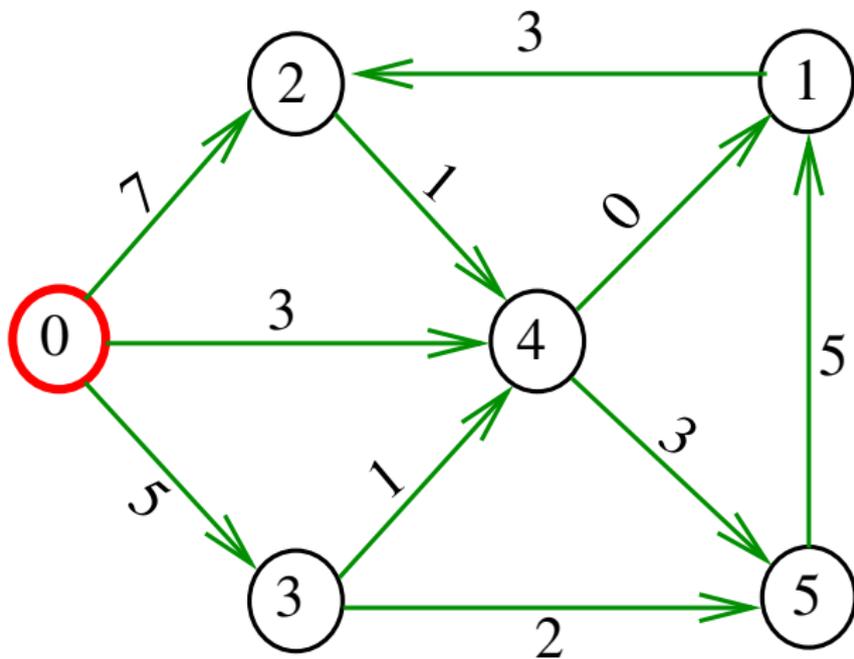
Problema

Problema dos Caminhos Mínimos com Origem Fixa
(*Single-source Shortest Paths Problem*):

Dado um vértice s de um digrafo com custos **não-negativos** nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s , um **caminho mínimo simples** de s a t .

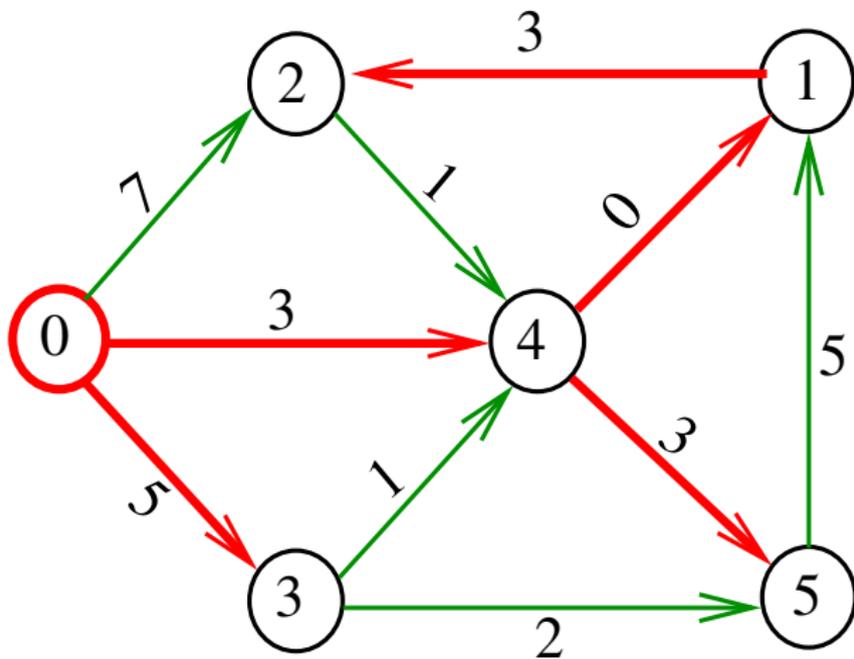
Exemplo

Entra:



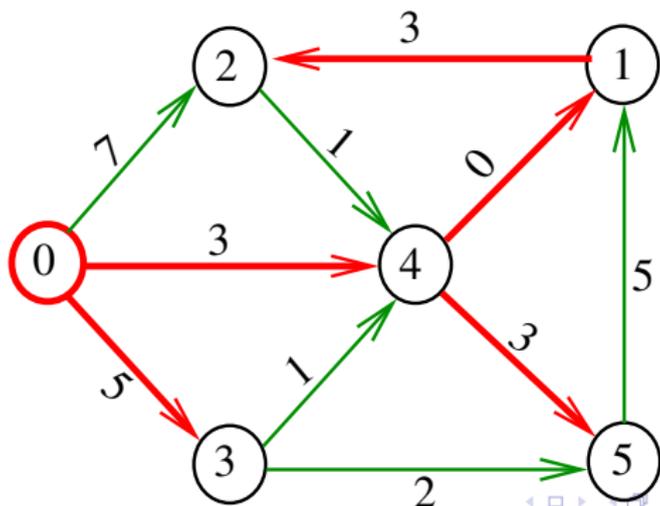
Exemplo

Sai:



Arborescência de caminhos mínimos

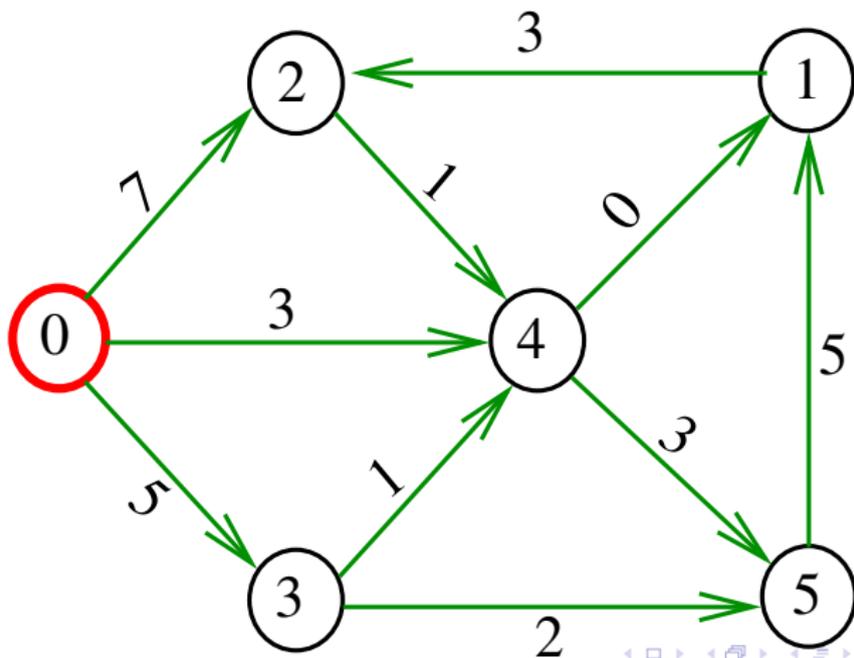
Uma arborescência com raiz s é de **caminhos mínimos** (= *shortest-paths tree* = *SPT*) se para todo vértice t que pode ser alcançado a partir de s , o único caminho de s a t na arborescência é um caminho mínimo



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice **s** de um digrafo com custos **não-negativos** nos arcos, encontrar uma SPT com raiz **s**

Entra:



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice **s** de um digrafo com custos **não-negativos** nos arcos, encontrar uma SPT com raiz **s**

Sai:

