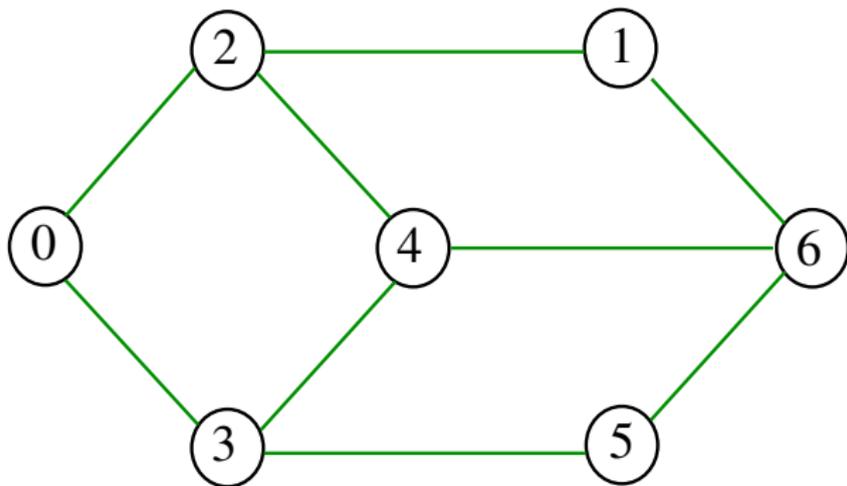


Grafos bipartidos e ciclos ímpares

S 18.5

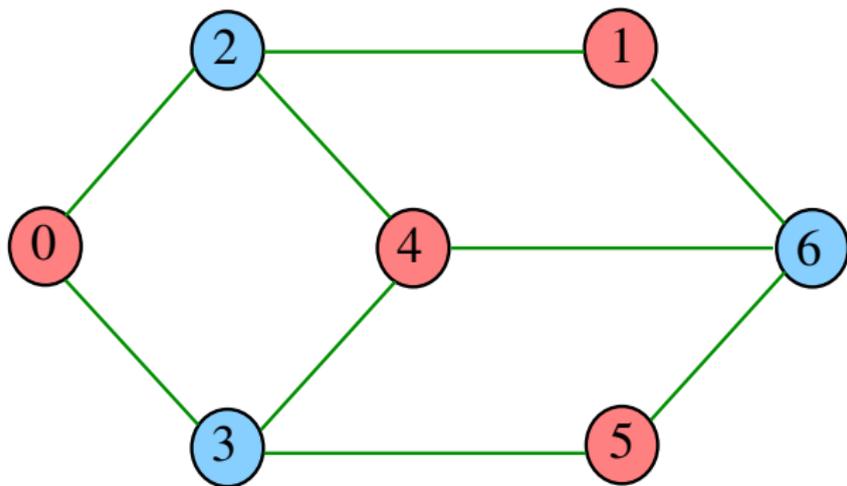
Bipartição

Um grafo é **bipartido** (= *bipartite*) se existe uma divisão do seu conjunto de vértices em duas partes (uma *bipartição*) tal que cada aresta tem uma ponta em uma das partes da bipartição e a outra ponta na outra parte. Exemplo:



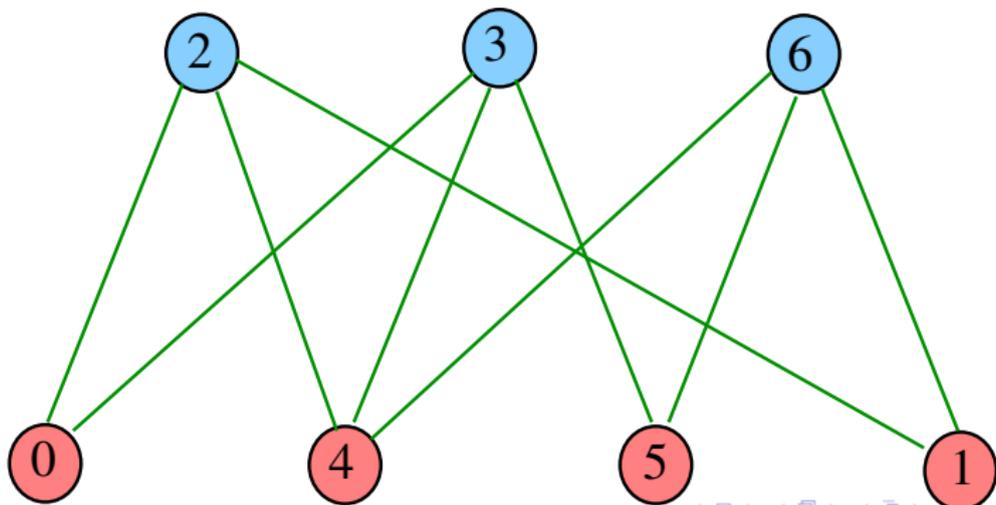
Bipartição

Um grafo é **bipartido** (= *bipartite*) se existe uma divisão do seu conjunto de vértices em duas partes (uma *bipartição*) tal que cada aresta tem uma ponta em uma das partes da bipartição e a outra ponta na outra parte. Exemplo:



Bipartição

Um grafo é **bipartido** (= *bipartite*) se existe uma divisão do seu conjunto de vértices em duas partes (uma *bipartição*) tal que cada aresta tem uma ponta em uma das partes da bipartição e a outra ponta na outra parte. Exemplo:



Florestas e bipartições

Teorema 1.

Toda floresta é um grafo bipartido.

Prova: Basta mostrar que toda árvore é.

Escolha um vértice v , e, para todo vértice w , faça:

$$\text{cor}[w] = \text{dist}(v, w) \bmod 2.$$

Se u e w são adjacentes, o caminho de v ao mais distante passa pelo mais próximo e usa a aresta. Assim, as distâncias a v diferem de 1, e eles têm cores diferentes.

Florestas e bipartições

Teorema 1.

Toda floresta é um grafo bipartido.

Prova: Basta mostrar que toda árvore é.

Escolha um vértice v , e, para todo vértice w , faça:

$$\text{cor}[w] = \text{dist}(v, w) \bmod 2.$$

Se u e w são adjacentes, o caminho de v ao mais distante passa pelo mais próximo e usa a aresta. Assim, as distâncias a v diferem de 1, e eles têm cores diferentes.

GRAPHtwoolor

Problema: Decidir se um grafo dado é bipartido.

Idéia: Colorir uma floresta maximal (por exemplo, usando DFS). Se der certo, deu; se não...

Quem sabe aparece um certificado de que não é bipartido.

GRAPHtwoolor

Problema: Decidir se um grafo dado é bipartido.

Idéia: Colorir uma floresta maximal (por exemplo, usando DFS). Se der certo, deu; se não...

Quem sabe aparece um certificado de que não é bipartido.

GRAPHtwoolor

Problema: Decidir se um grafo dado é bipartido.

Idéia: Colorir uma floresta maximal (por exemplo, usando DFS). Se der certo, deu; se não...

Quem sabe aparece um certificado de que não é bipartido.

GRAPHtwocolor

Problema: Decidir se um grafo dado é bipartido.

Idéia: Colorir uma floresta maximal (por exemplo, usando DFS). Se der certo, deu; se não...

Quem sabe aparece um certificado de que não é bipartido.

GRAPHtwocolor

Supomos que nossos grafos têm no máximo maxV vértices

```
int color[maxV];
```

A função devolve **1** se o grafo **G** é bipartido e devolve **0** em caso contrário

Se **G** é **bipartido**, a função atribui uma "cor" a cada vértice de **G** de tal forma que toda aresta tenha **pontas de cores diferentes**

As cores dos vértices, **0** e **1**, são registradas no vetor color indexado pelos vértices

```
int GRAPHtwocolor (Graph G);
```

GRAPHtwocolor

```
int GRAPHtwocolor (Graph G) {  
    Vertex v ;  
1   for (v = 0; v < G->V; v++)  
2       color[v] = -1;  
3   for (v = 0; v < G->V; v++)  
4       if (color[v] == -1)  
5           if (dfsRclr(G, v, 0) == 0)  
6               return 0;  
7   return 1;  
}
```

dfsRclr

```
int dfsRclr(Graph G, Vertex v, int c){
    link p;
1   color[v] = c;
2   for (p = G->adj[v]; p; p = p->next) {
3       Vertex w = p->w;
4       if (color[w] == c || /*ciclo ímpar*/
5           color[w]==-1 && !dfsRclr(G,w,1-c))
6           return 0;
    }
7   return 1;
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `GRAPHtwocolor` para **vetor de listas de adjacência** é $O(V + A)$.

Conclusão

Para todo grafo G , vale uma e apenas uma das seguintes afirmações:

- G possui um ciclo ímpar
- G é bipartido

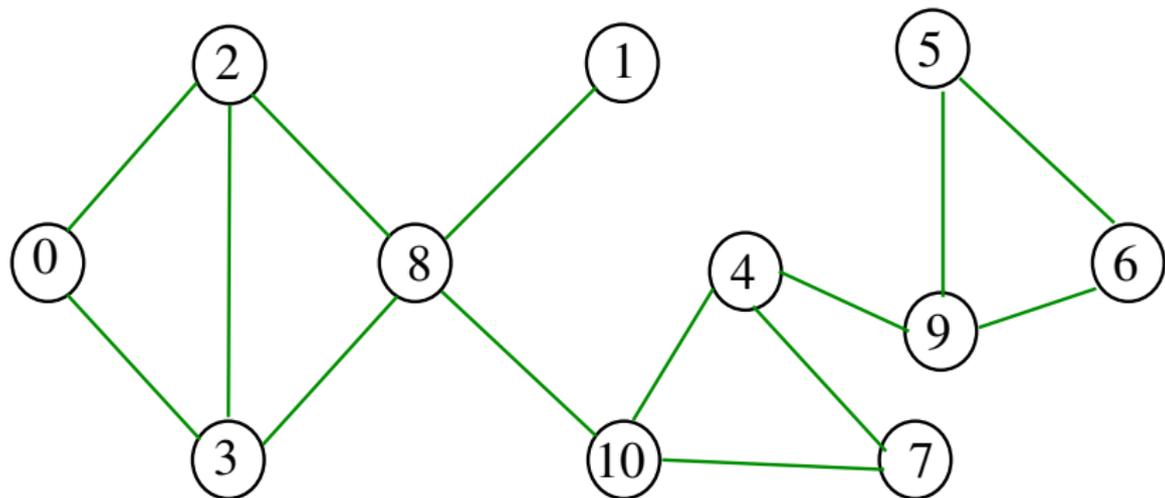
Pontes em grafos e aresta-biconexão

S 18.6

Pontes em grafos

Uma aresta de um grafo é uma **ponte** (= *bridge* = *separation edge*) se ela é a única aresta que atravessa algum corte do grafo.

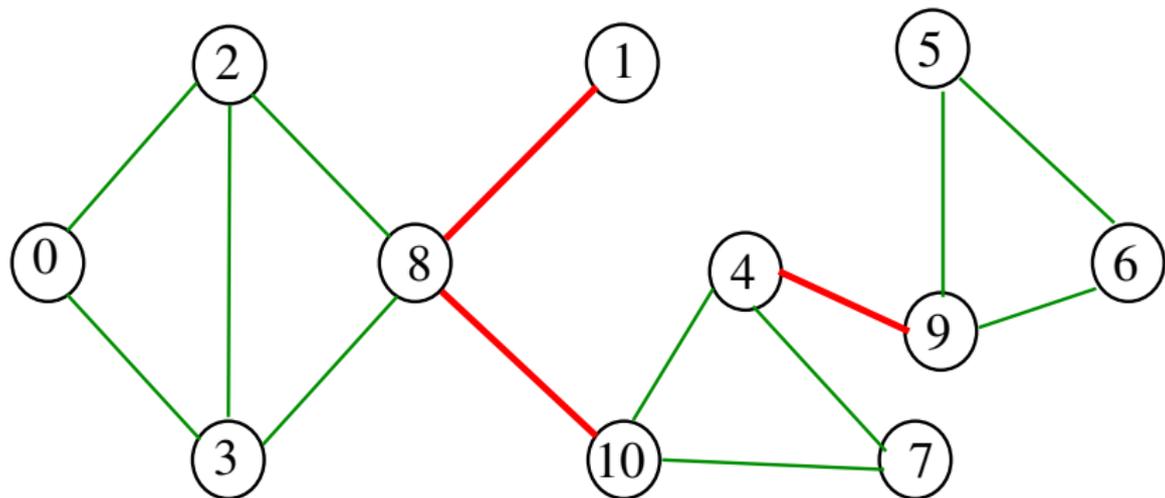
Exemplo:



Pontes em grafos

Uma aresta de um grafo é uma **ponte** (= *bridge* = *separation edge*) se ela é a única aresta que atravessa algum corte do grafo.

Exemplo: as arestas em **vermelho** são pontes



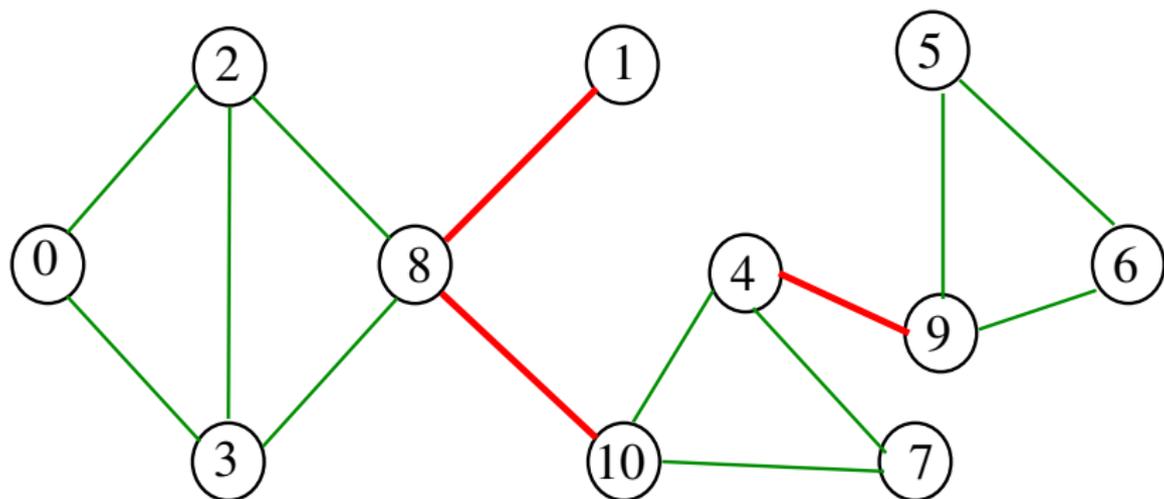
Pontes em grafos

Uma aresta é ponte se e só se não está em nenhum ciclo não trivial.

Procurando pontes

Problema: encontrar as pontes de um grafo dado

Exemplo: as arestas em **vermelho** são pontes



all_bridges1

Recebe um grafo G e calcula o número `bcnt` de pontes do grafo G e imprime todas as pontes.

```
void all_bridges1 (Graph G);
```

Primeiro algoritmo

```
void all_bridges1 (Graph G) {
    Vertex v, w; link p;
1   for (v = 0; v < G->V; v++)
2       for(p = G->adj[v]; p; p = p->next){
3           w = p ->w;
4           if (v < w) { /* cada aresta uma vez */
5               GRAPHremoveA(G,w,v);
6               if( !DIGRAPHpath(G,w,v)) {
7                   bcnt++;
8                   output(v, w);
9               }
10              GRAPHinsertA(G,w,v);
11          }
12      }
13  }
14 }
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `all_bridges1` é $A/2$ vezes o consumo de tempo da função `DIGRAPHpath`.

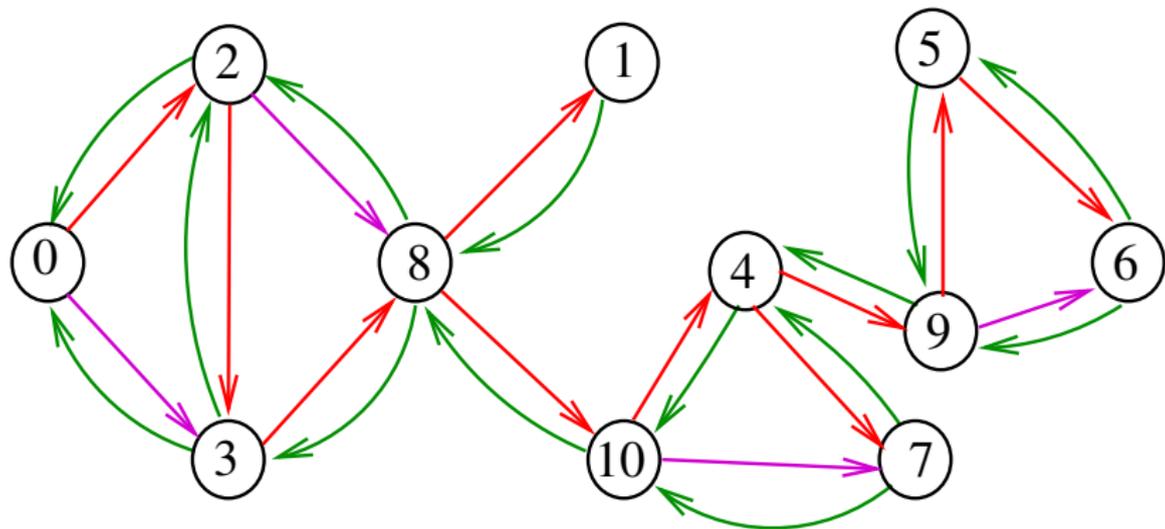
O consumo de tempo da função `all_bridges1` para **vetor de listas de adjacência** é $O(A(V + A))$.

O consumo de tempo da função `all_bridges1` para **matriz de adjacência** é $O(AV^2)$.

Pontes e busca em profundidade

Em uma floresta DFS, um dos dois arcos de cada ponte será um arco da **arborescência**

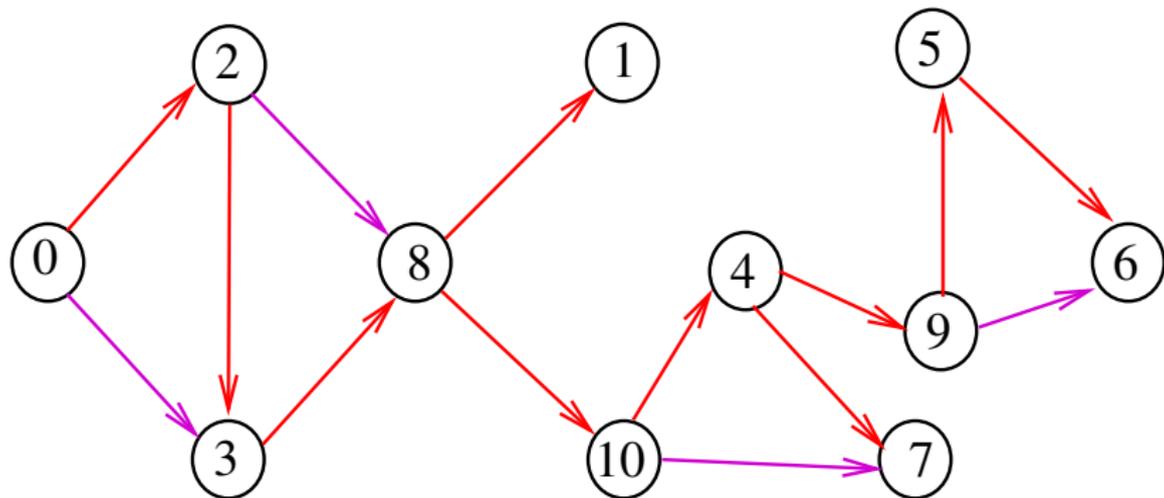
Exemplo: arcos em **vermelho** são da arborescência



Pontes e busca em profundidade

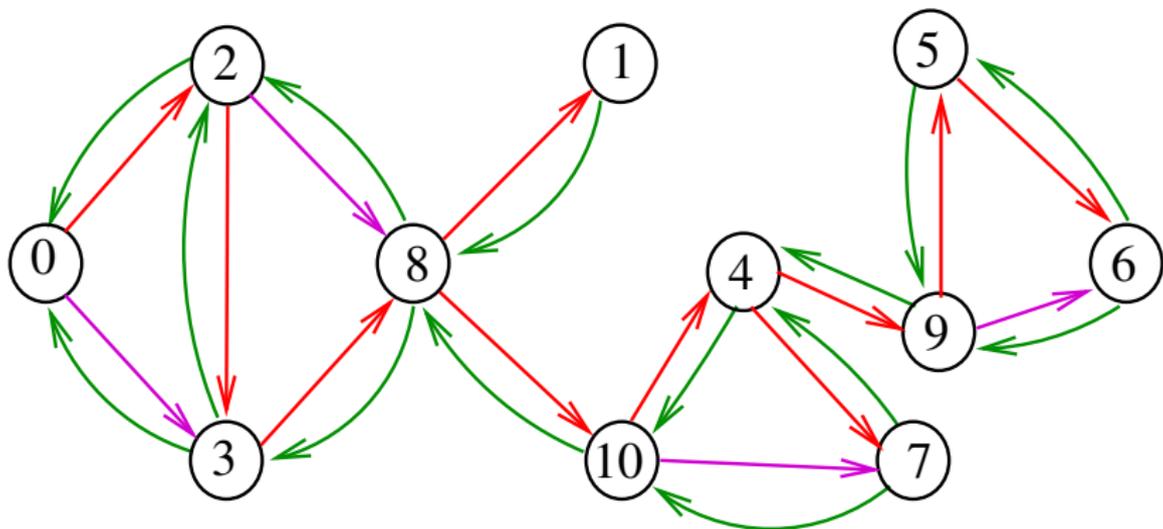
Em uma floresta DFS, um dos dois arcos de cada ponte será um arco da **arborescência**

Exemplo: arcos em **vermelho** são da arborescência



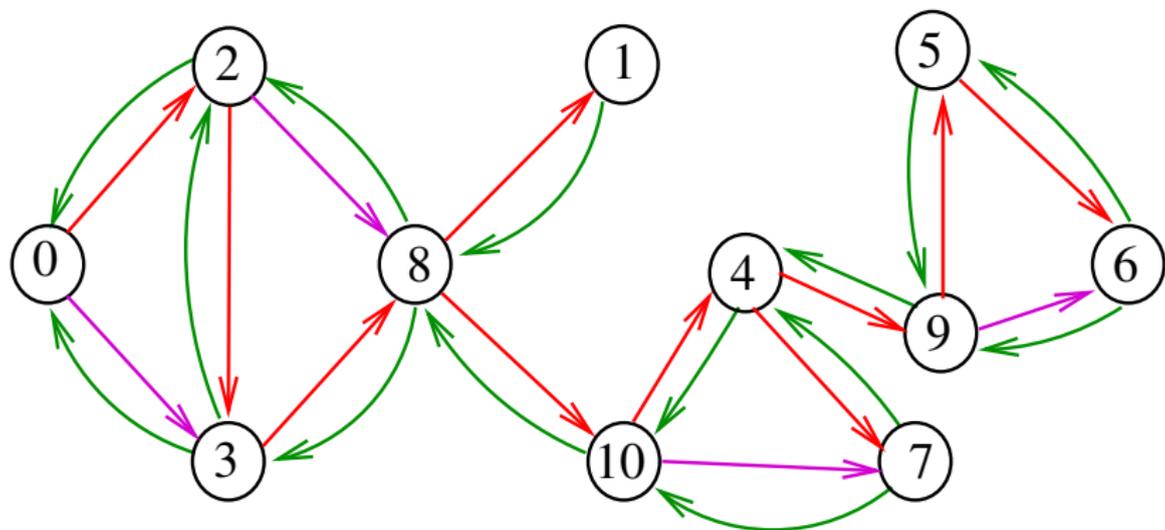
Propriedade

Um arco $v-w$ da floresta DFS faz parte (juntamente com $w-v$) de uma ponte se e somente se não existe arco de retorno que ligue um descendente de w a um ancestral de v



Numeração em ordem de descoberta (pré-ordem)

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{pre}[v]$	0	4	1	2	6	8	9	10	3	7	5



Observações

Para todo vértice v ,

$$\text{low}[v] \leq \text{pre}[v]$$

Para todo arco $v-w$ do grafo

- se $v-w$ é um arco de **arborescência** então

$$\text{low}[v] \leq \text{low}[w];$$

- se $v-w$ é uma arco de **retorno**, então

$$\text{low}[v] \leq \text{pre}[w].$$

Observações

Para todo vértice v ,

$$\text{low}[v] \leq \text{pre}[v]$$

Para todo arco $v-w$ do grafo

- se $v-w$ é um arco de **arborescência** então

$$\text{low}[v] \leq \text{low}[w];$$

- se $v-w$ é uma arco de **retorno**, então

$$\text{low}[v] \leq \text{pre}[w].$$

Cálculo de $\text{low}[v]$

Para todo vértice v ,

$\text{low}[v]$ é o mínimo de

- $\text{pre}[w]$, $v-w$ é um arco de **retorno**
- $\text{low}[w]$,

Cálculo de $\text{low}[v]$

Para todo vértice v ,

$\text{low}[v]$ é o mínimo de

- $\text{pre}[w]$, $v-w$ é um arco de **retorno**
- $\text{low}[w]$, w é descendente de v

Cálculo de $\text{low}[v]$

Para todo vértice v ,

$\text{low}[v]$ é o mínimo de

- $\text{pre}[w]$, $v-w$ é um arco de **retorno**
- $\text{low}[w]$, $v-w$ está na arborescência da DFS

Algoritmo das pontes

Em qualquer floresta de busca em profundidade de um grafo, um arco de **arborescência** $v-w$ faz parte de uma ponte se e somente se $low[w] == pre[w]$

```
static int cnt, pre[maxV], bcnt, low[maxV];  
static int parnt[maxV];
```

A função abaixo calcula o número `bcnt` de pontes do grafo G e imprime todas as pontes

```
void all_bridges (Graph G);
```

all_bridges

```
void all_bridges (Graph G) {  
    Vertex v;  
1   cnt = bcnt = 0;  
2   for (v = 0; v < G->V; v++)  
3       pre[v] = -1;  
4   for (v = 0; v < G->V; v++)  
5       if (pre[v] == -1) {  
6           parnt[v] = v;  
7           bridgeR(G, v);  
        }  
}
```

bridgeR

```
void bridgeR (Graph G, Vertex v) {
link p; Vertex u;
1  pre[v] = cnt++;
2  low[v] = pre[v];
3  for (p = G->adj[v]; p; p = p->next)
4      if (pre[u = p->w] == -1) {
5          parnt[u] = v;
6          bridgeR(G, u);
7          if (low[v] > low[u]) low[v] = low[u];
9          else if (low[u] == pre[u]) {
10             bcnt++;
11             output(v, w);
           }
       }
12     else if (u != parnt[v] && low[v] > pre[u])
13         low[v] = pre[u];
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `all_bridges` é $O(V + A)$.