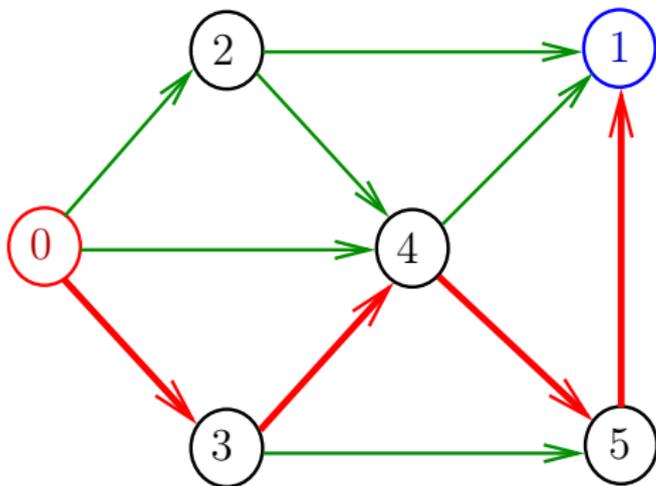


Na última aula...

Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo G e dois vértices s e t decidir se existe um caminho de s a t

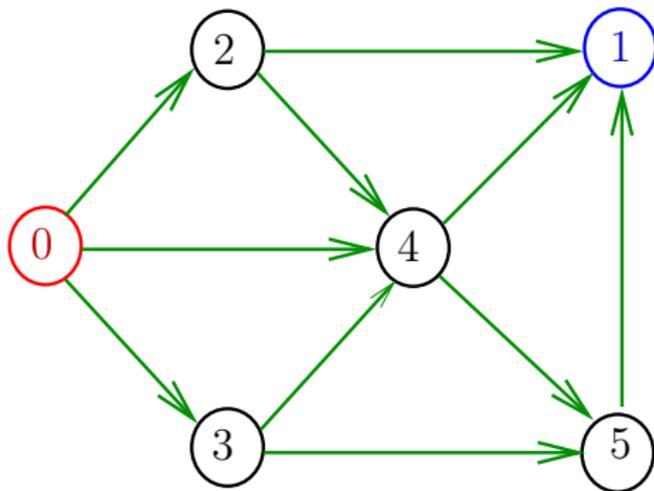
Exemplo: para $s = 0$ e $t = 1$ a resposta é **SIM**



Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo G e dois vértices s e t decidir se existe um caminho de s a t

Exemplo: para $s = 5$ e $t = 4$ a resposta é **NÃO**



Certificados

Como é possível 'verificar' a resposta?

Como é possível 'verificar' que **existe** caminho?

Como é possível 'verificar' que **não existe** caminho?

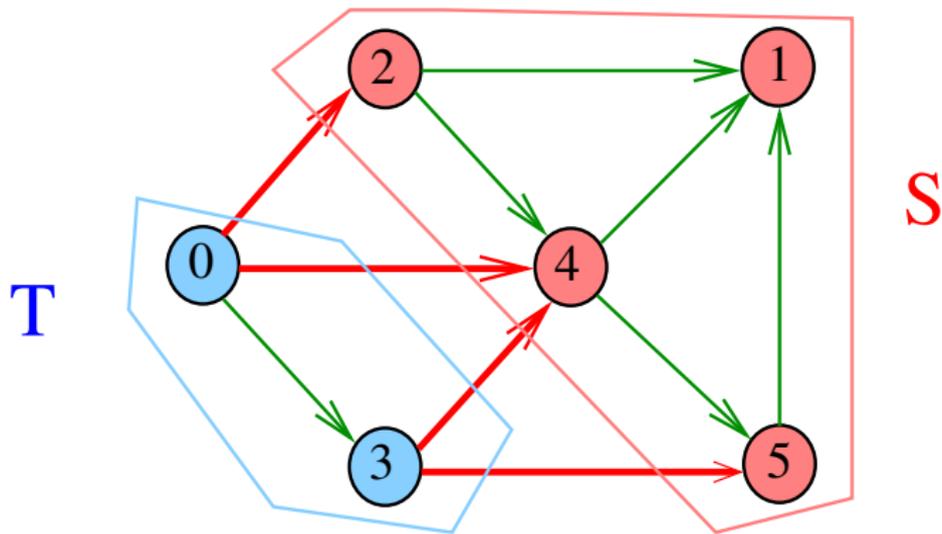
Veremos questões deste tipo freqüentemente

Certificado de inexistência

Para demonstrarmos que **não existe** um caminho de **s** a **t** basta exibirmos um **st**-corte (S, T) em que *todo arco* no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S

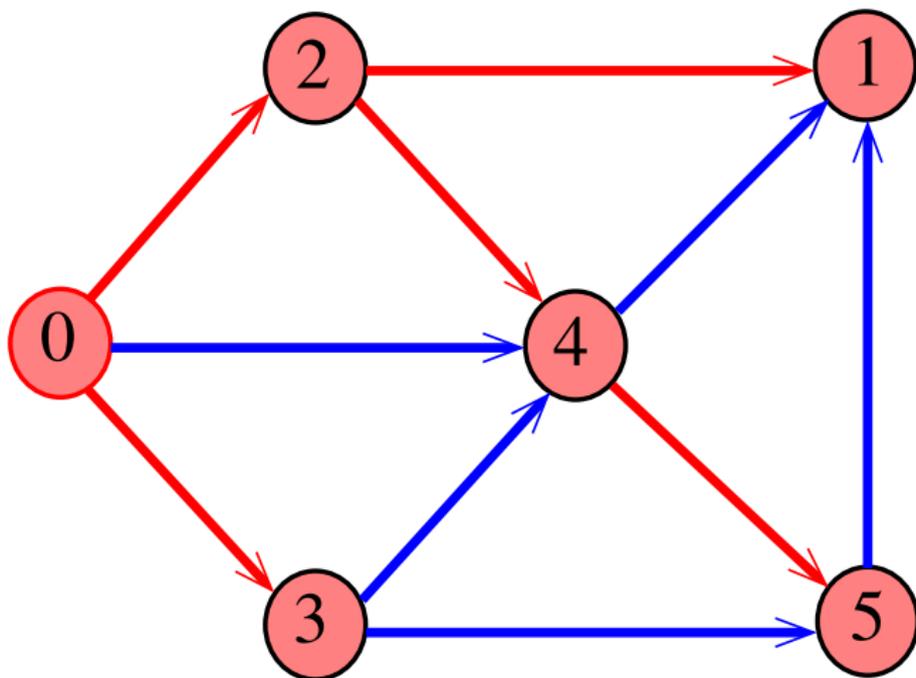
Certificado de inexistência

Exemplo: certificado de que não há caminho de 2 a 3



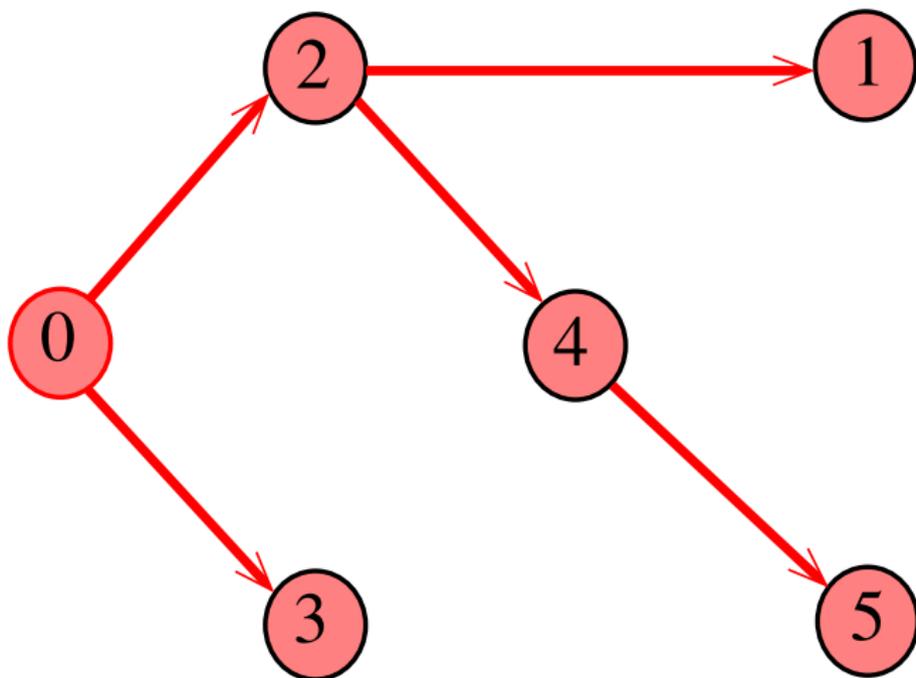
Arborescências

Exemplo: a raiz da arborescência é 0



Arborescências

Exemplo: a raiz da arborescência é 0

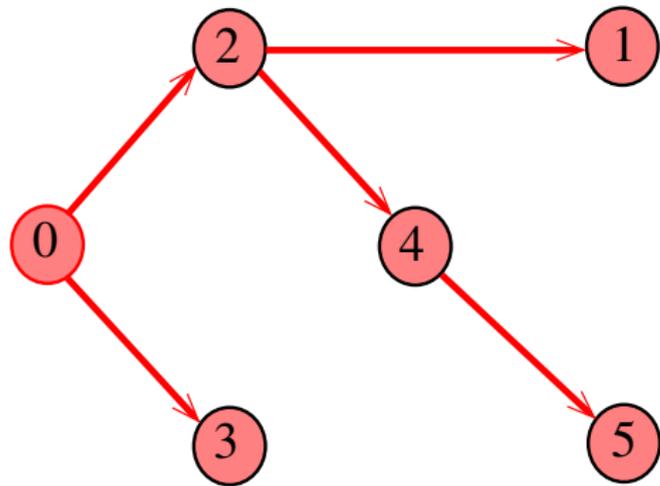


Arborescências no computador

Um arborência pode ser representada através de um

vetor de pais: $\text{parnt}[w]$ é o pai de w

Se r é a raiz, então $\text{parnt}[r]=r$



vértice	parnt
0	0
1	2
2	0
3	0
4	2
5	4

Teorema

Para quaisquer vértices s e t de um digrafo, vale uma e apenas uma das seguintes afirmações:

- existe um caminho de s a t
- existe st -corte (S, T) em que todo arco no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S .

Hoje

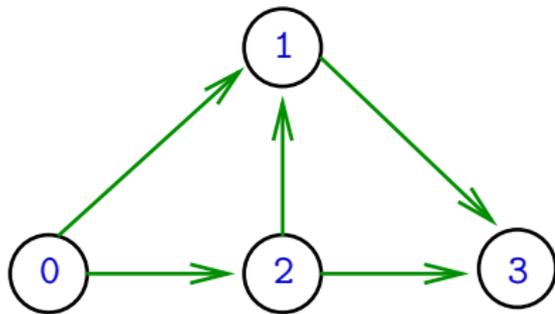
Vetor de listas de adjacência

S 17.4

Vetor de listas de adjacência de digrafos

Na representação de um digrafo através de **listas de adjacência** tem-se, para cada vértice v , uma lista dos vértices que são vizinhos v .

Exemplo:



0: 1, 2
1: 3
2: 1, 3
3:

Consumo de espaço: $\Theta(V + A)$

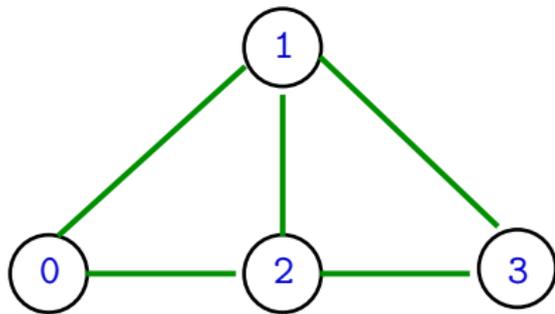
(linear)

Manipulação eficiente

Vetor de lista de adjacência de grafos

Na representação de um grafo através de **listas de adjacência** tem-se, para cada vértice v , uma lista dos vértices que são pontas de arestas incidentes a v

Exemplo:



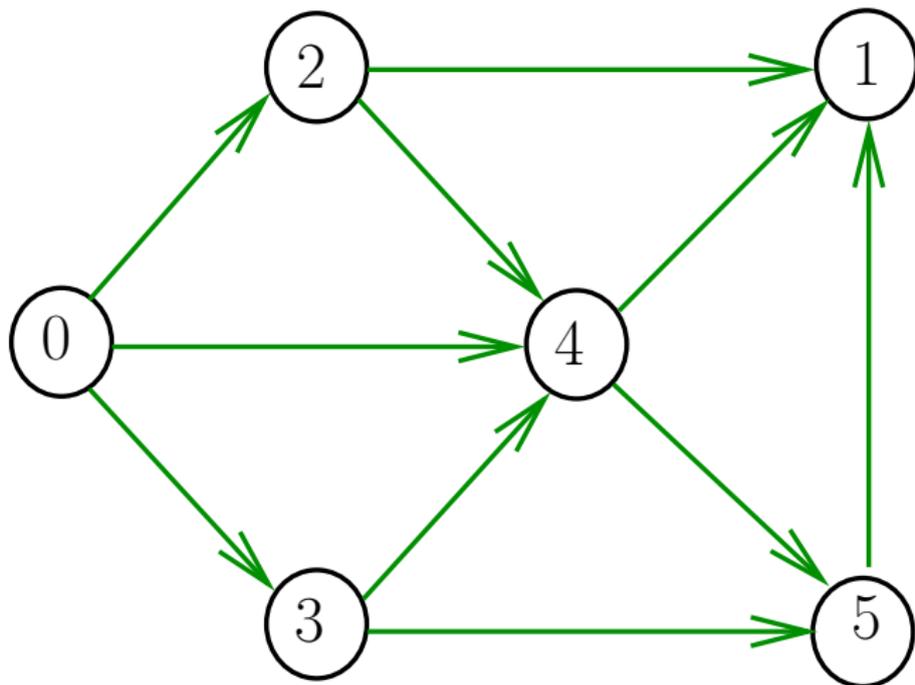
0: 1, 2
1: 3, 0, 2
2: 1, 3, 0
3: 1, 2

Consumo de espaço: $\Theta(V + A)$ (linear)

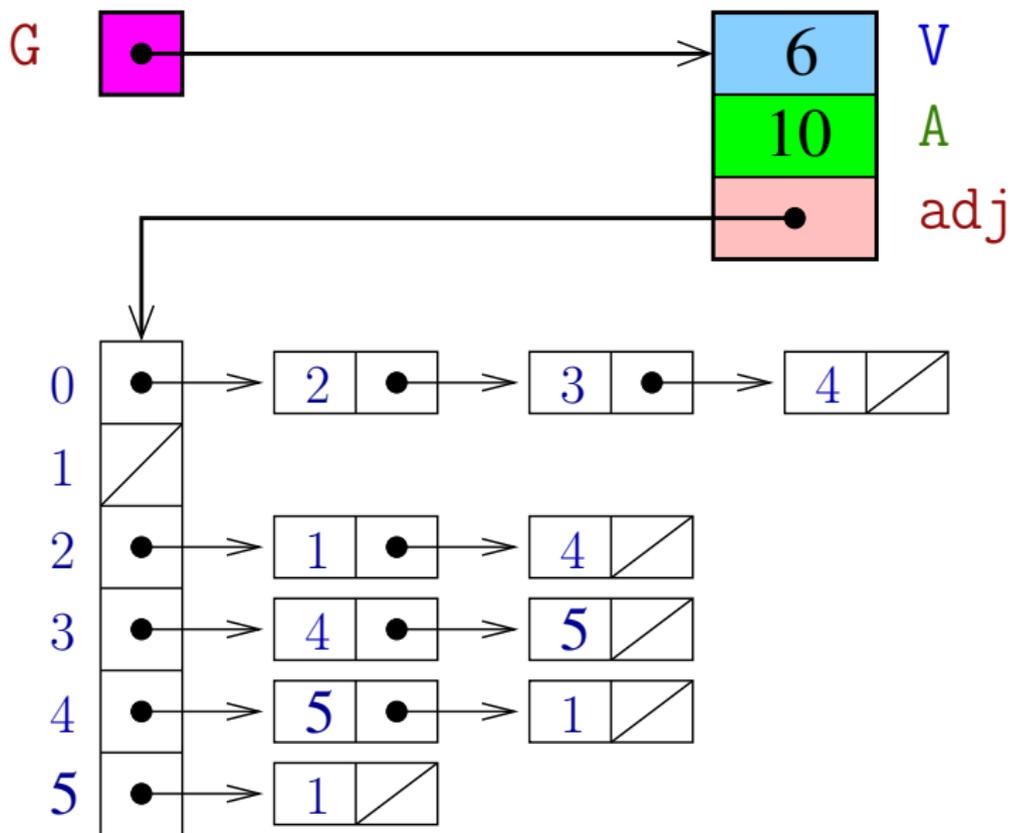
Manipulação eficiente

Digrafo

Digraph G



Estruturas de dados



Estrutura digraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo
V contém o número de vértices
A contém o número de arcos do digrafo
adj é um ponteiro para vetor de listas de
adjacência

```
struct digraph {  
    int V;  
    int A;  
    link *adj;  
};
```

Estrutura Digraph

Um objeto do tipo `Digraph` contém o endereço de um `digraph`

```
typedef struct digraph *Digraph;
```

Estrutura `node`

A lista de adjacência de um vértice `v` é composta por nós do tipo `node`

Um `link` é um ponteiro para um `node`

Cada nó da lista contém um vizinho `w` de `v` e o endereço do nó seguinte da lista

```
typedef struct node *link;
struct node {
    Vertex w;
    link next;
};
```

NEW

NEW recebe um vértice **w** e o endereço **next** de um nó e devolve (o endereço de) um novo nó **x** com

x.w = w e **x.next = next**

```
link NEW (Vertex w, link next) {  
    link p = malloc(sizeof *p);  
    p->w = w;  
    p->next = next;  
    return p;  
}
```

NEW

NEW recebe um vértice **w** e o endereço **next** de um nó e devolve (o endereço de) um novo nó **x** com

x.w = w e **x.next = next**

```
link NEW (Vertex w, link next) {  
    link p = malloc(sizeof *p);  
    p->w = w;  
    p->next = next;  
    return p;  
}
```

Estrutura `graph` e `Graph`

Essa mesma estrutura será usada para representar grafos

```
#define graph digraph
```

```
#define Graph Digraph
```

O número de arestas de um grafo G é

$$(G \rightarrow A) / 2$$

DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices $0, \dots, V-1$ e nenhum arco

```
Digraph DIGRAPHinit (int V) {  
0     Vertex v;  
1     Digraph G = malloc(sizeof *G);  
2     G->V = V;  
3     G->A = 0;  
4     G->adj = malloc(V * sizeof(link));  
5     for (v = 0; v < V; v++)  
6         G->adj[v] = NULL;  
7     return G;  
}
```

DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices $0, \dots, V-1$ e nenhum arco

```
Digraph DIGRAPHinit (int V) {  
0     Vertex v;  
1     Digraph G = malloc(sizeof *G);  
2     G->V = V;  
3     G->A = 0;  
4     G->adj = malloc(V * sizeof(link));  
5     for (v = 0; v < V; v++)  
6         G->adj[v] = NULL;  
7     return G;  
}
```

DIGRAPHinsertA

Insere um arco $v-w$ no digrafo G .

A responsabilidade de evitar laços e arcos paralelos é do cliente/usuário.

void

```
DIGRAPHinsertA (Digraph G, Vertex v, Vertex w)
{
    G->adj[v] = NEW(w, G->adj[v]);
    G->A++;
}
```

DIGRAPHinsertA

Inserir um arco $v-w$ no digrafo G .

Se $v == w$ ou o digrafo já tem arco $v-w$; não faz nada

void

DIGRAPHinsertA (Digraph G , Vertex v , Vertex w)

```
{  
    link p;  
    if (v == w) return;  
    for (p = G->adj[v]; p != NULL; p = p->next)  
        if (p->w == w) return;  
    G->adj[v] = NEW(w, G->adj[v]);  
    G->A++;  
}
```

DIGRAPHinsertA

Insere um arco $v-w$ no digrafo G .

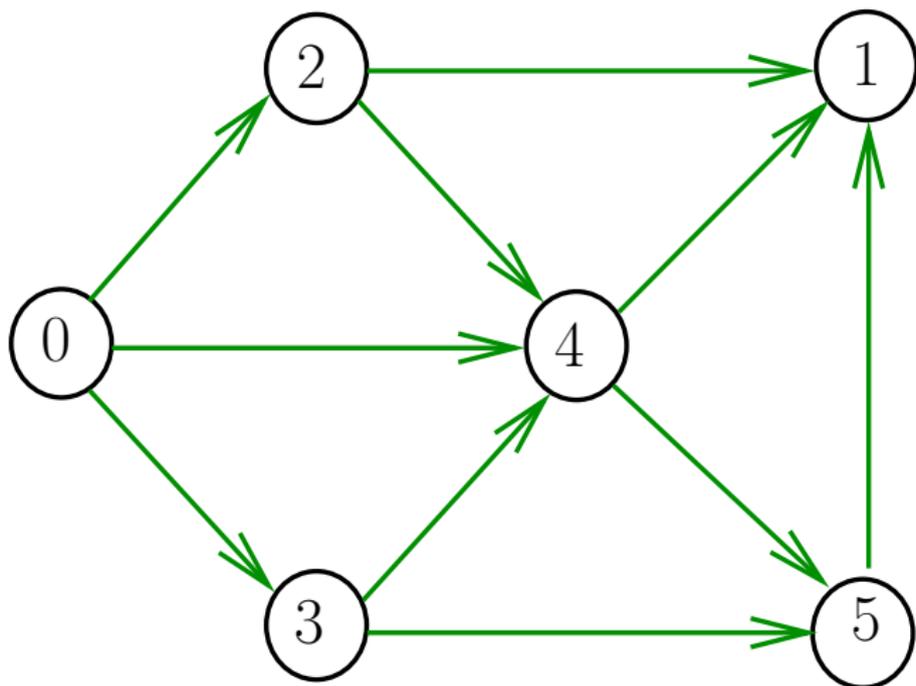
Se $v == w$ ou o digrafo já tem arco $v-w$; não faz nada

void

DIGRAPHinsertA (Digraph G , Vertex v , Vertex w)

```
{  
    link p;  
    if (v == w) return;  
    for (p = G->adj[v]; p != NULL; p = p->next)  
        if (p->w == w) return;  
    G->adj[v] = NEW(w, G->adj[v]);  
    G->A++;  
}
```

DIGRAPHshow



```
0:  2  3  4
1:
2:  1  4
3:  4  5
4:  1  5
5:  1
```

DIGRAPHshow

```
void DIGRAPHshow (Digraph G) {  
    Vertex v;  
    link p;  
1   for (v = 0; v < G->V; v++) {  
2       printf("%2d:", v);  
3       for (p=G->adj[v];p!= NULL;p=p->next)  
4           printf("%2d", p->w);  
5       printf("\n");  
    }  
}
```

DIGRAPHshow

```
void DIGRAPHshow (Digraph G) {  
    Vertex v;  
    link p;  
1   for (v = 0; v < G->V; v++) {  
2       printf("%2d:", v);  
3       for (p=G->adj[v];p!= NULL;p=p->next)  
4           printf("%2d", p->w);  
5       printf("\n");  
    }  
}
```

E para desenhar?

O pacote **Graphviz** (disponível para Linux e outros) tem programas que leem uma descrição de um grafo ou digrafo e desenharam, com vários algoritmos alternativos.

Não é tópico deste curso, mas algoritmos para desenhar grafos são objeto de pesquisa atual.

Consumo de tempo

linha	número de execuções da linha	
1	$= V + 1$	$= \Theta(V)$
2	$= V$	$= \Theta(V)$
3	$= V + A$	$= \Theta(V + A)$
4	$= A$	$= \Theta(A)$
5	$= V$	$= \Theta(V)$
total	$3\Theta(V) + \Theta(V + A) + \Theta(A)$	$= \Theta(V + A)$

Conclusão

O consumo de tempo da função `DigraphShow` para **vetor de listas de adjacência** é $\Theta(V + A)$.

O consumo de tempo da função `DigraphShow` para **matriz adjacência** é $\Theta(V^2)$.

Funções básicas para grafos

```
#define GRAPHinit DIGRAPHinit  
#define GRAPHshow DIGRAPHshow
```

Função que insere uma aresta $v-w$ no grafo G

void

```
GRAPHinsertE (Graph G, Vertex v, Vertex w)  
{  
    DIGRAPHinsertA(G, v, w);  
    DIGRAPHinsertA(G, w, v);  
}
```

Exercício. Escrever a função `GRAPHremoveE`

Funções básicas para grafos

```
#define GRAPHinit DIGRAPHinit  
#define GRAPHshow DIGRAPHshow
```

Função que insere uma aresta $v-w$ no grafo G

void

```
GRAPHinsertE (Graph G, Vertex v, Vertex w)  
{  
    DIGRAPHinsertA(G, v, w);  
    DIGRAPHinsertA(G, w, v);  
}
```

Exercício. Escrever a função **GRAPHremoveE**

Busca DFS

S 18.1 e 18.2

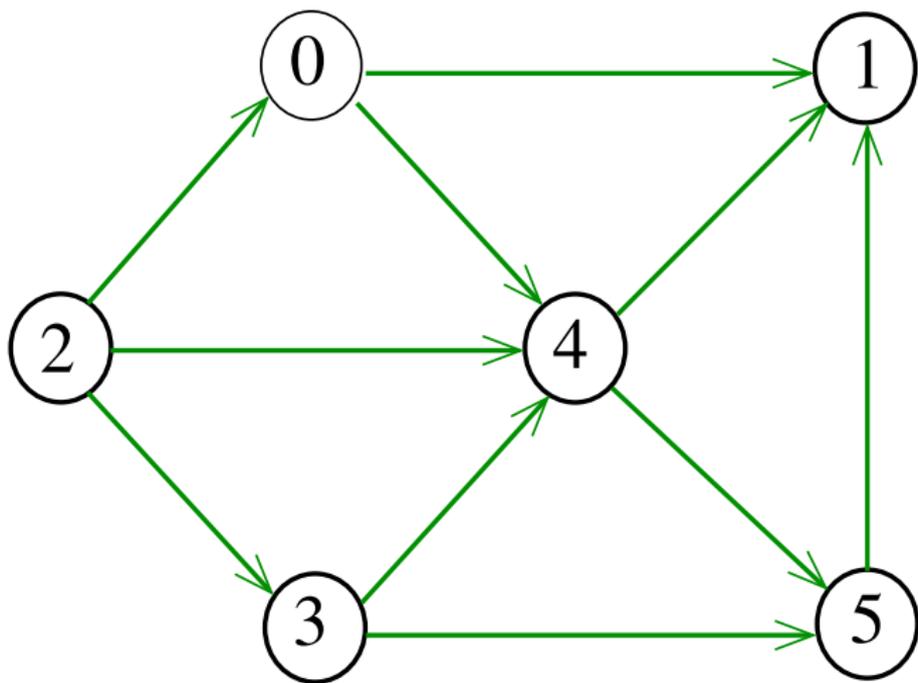
Busca ou varredura

Um algoritmo de **busca** (ou **varredura**) examina, sistematicamente, todos os vértices e todos os arcos de um digrafo.

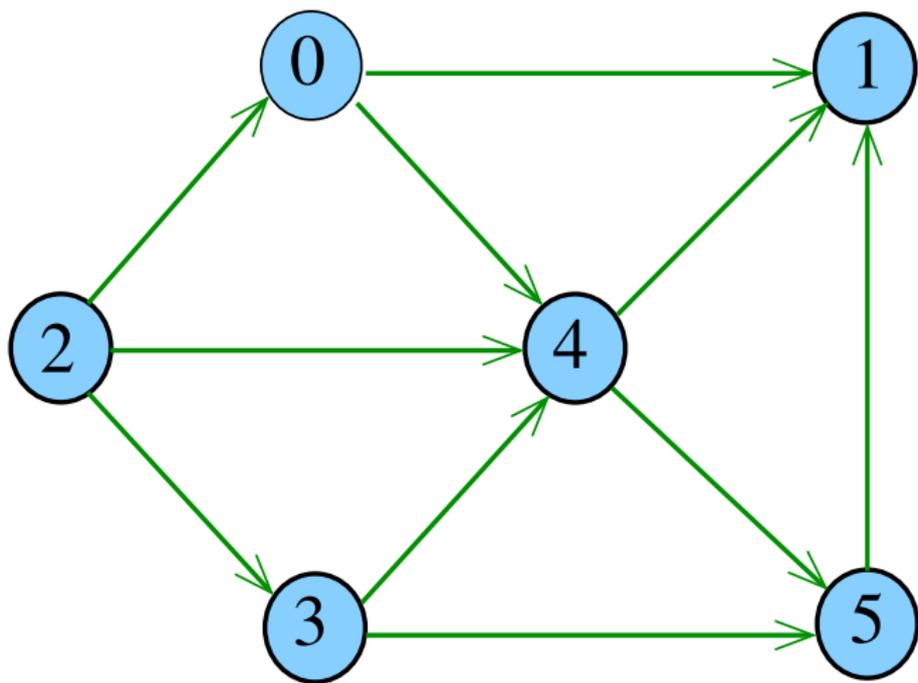
Cada arco é examinado **uma só vez**.

Depois de visitar sua ponta inicial o algoritmo percorre o arco e visita sua ponta final.

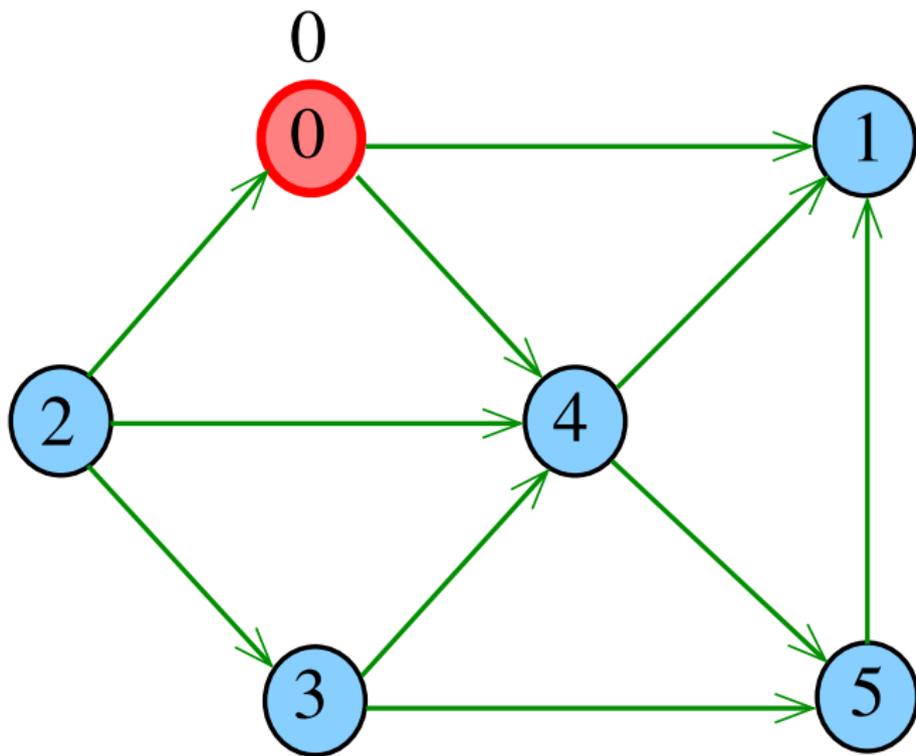
DIGRAPHdfs(**G**)



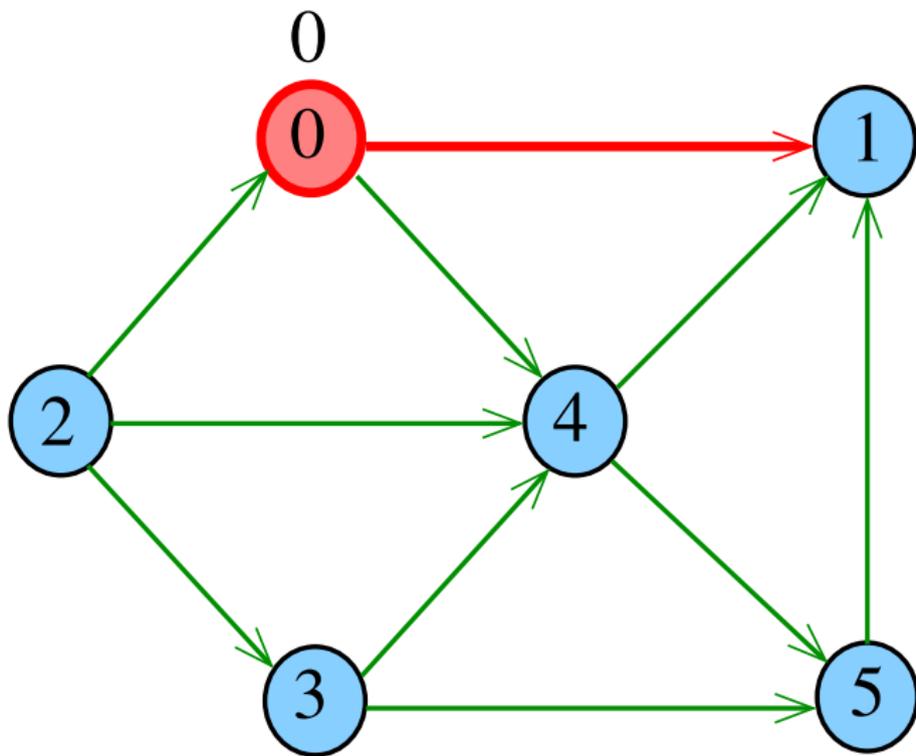
DIGRAPHdfs(**G**)



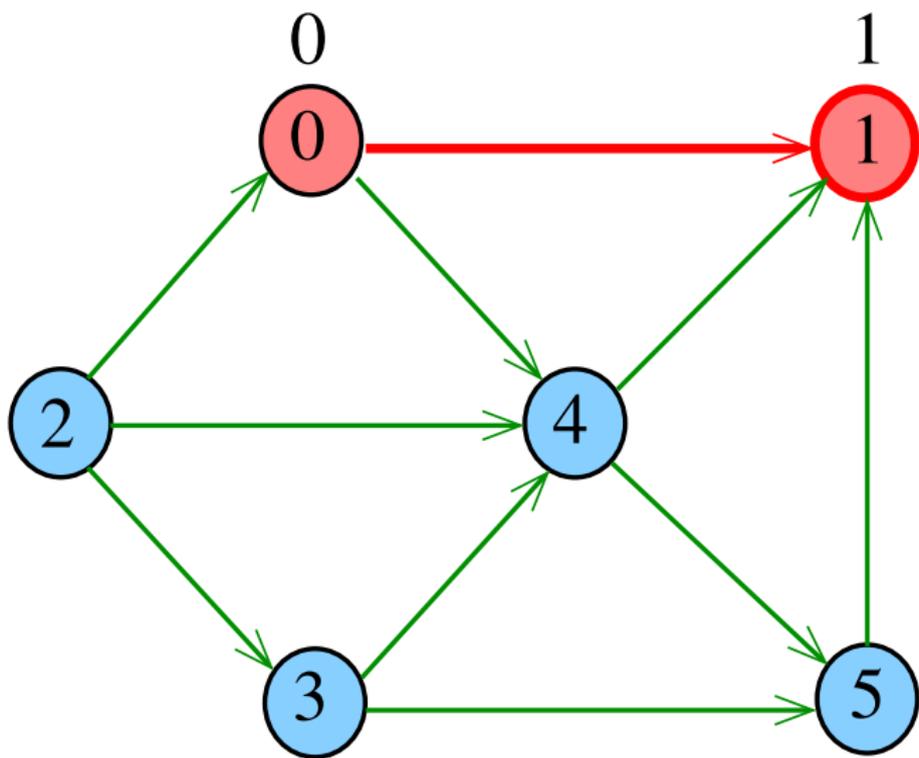
dfsR(G,0)



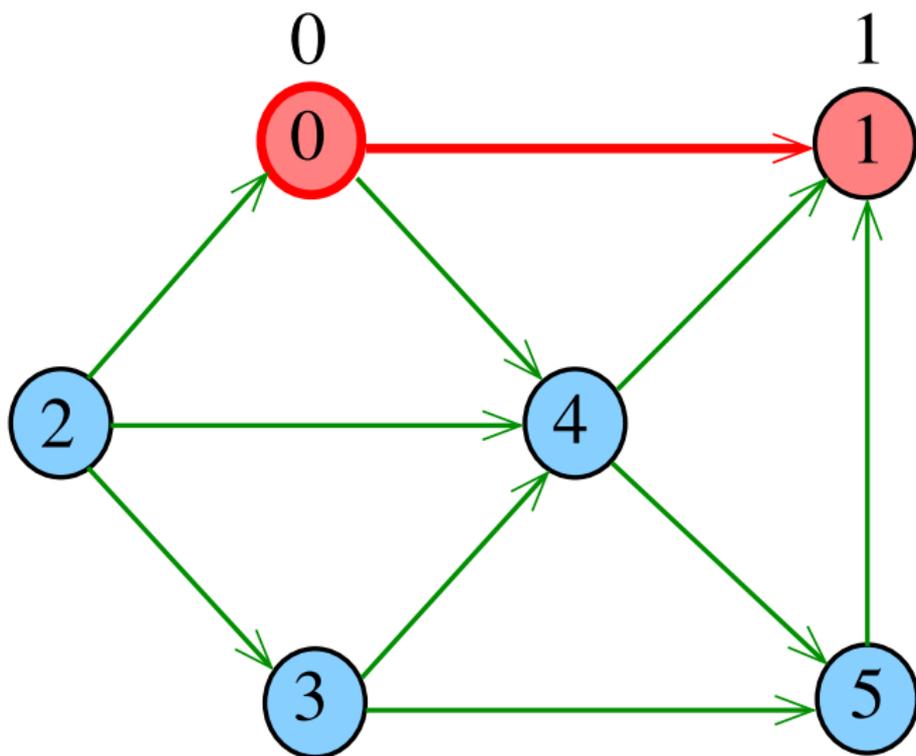
dfsR(G,0)



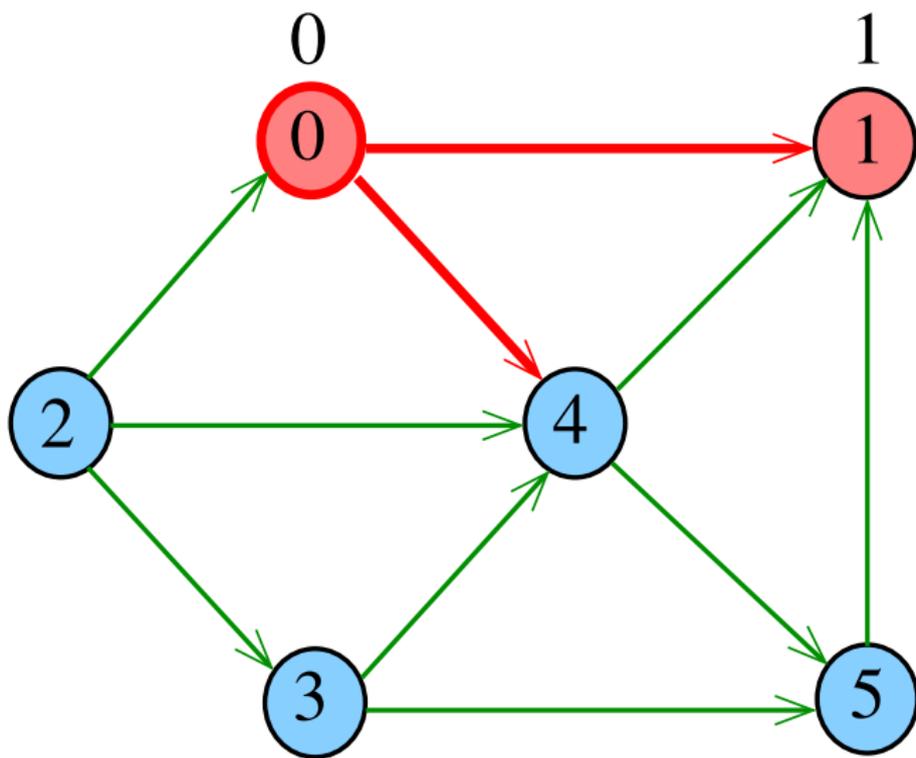
dfsR(G,1)



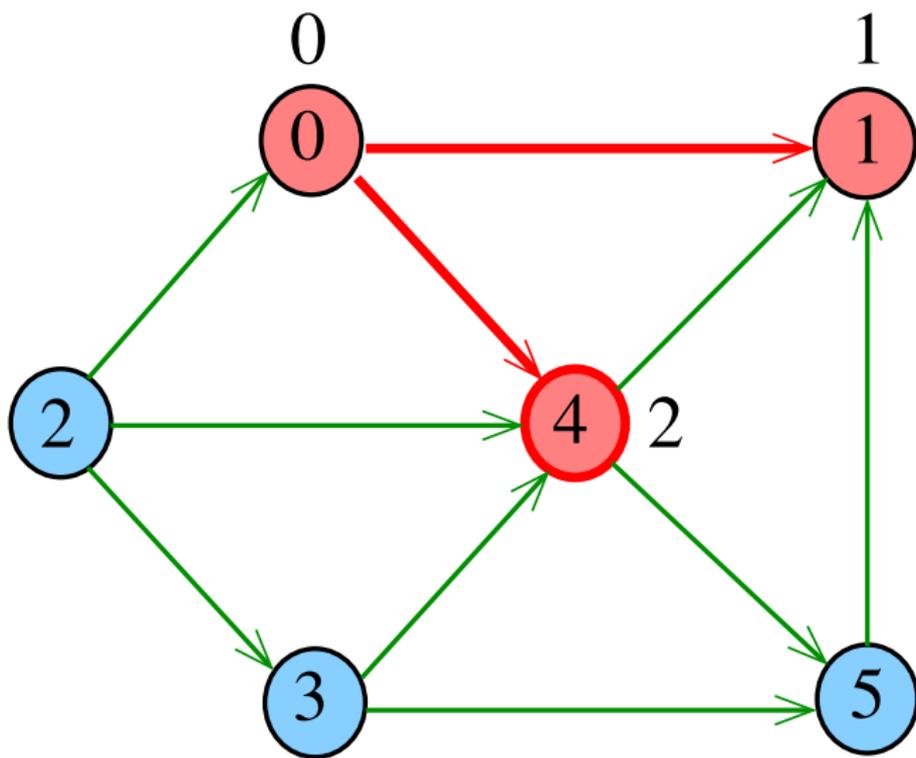
dfsR(G,0)



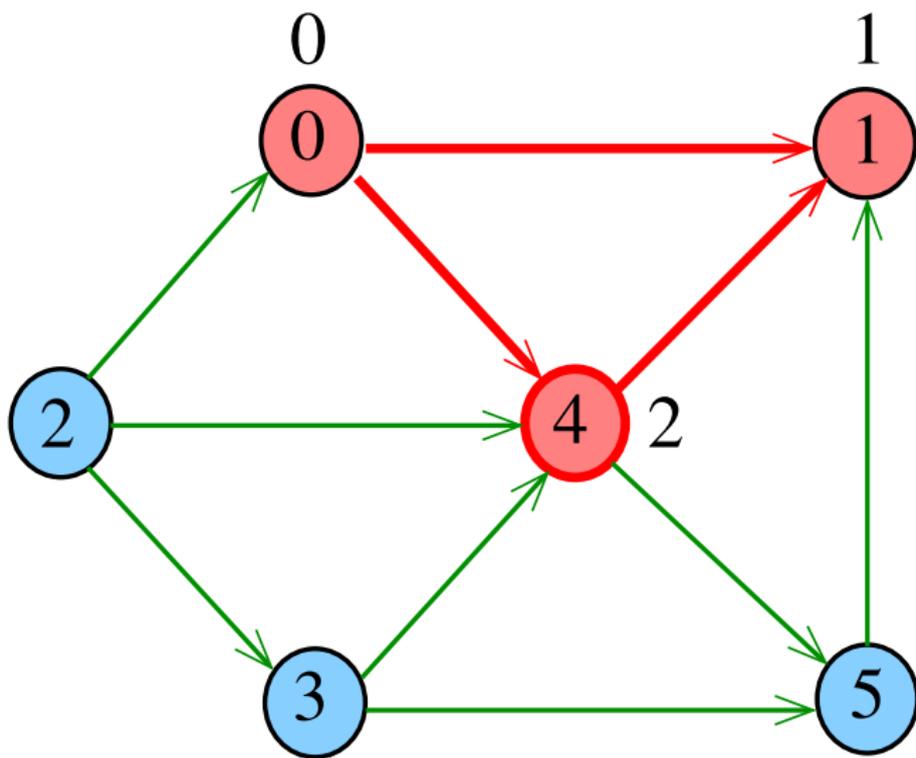
dfsR(G,0)



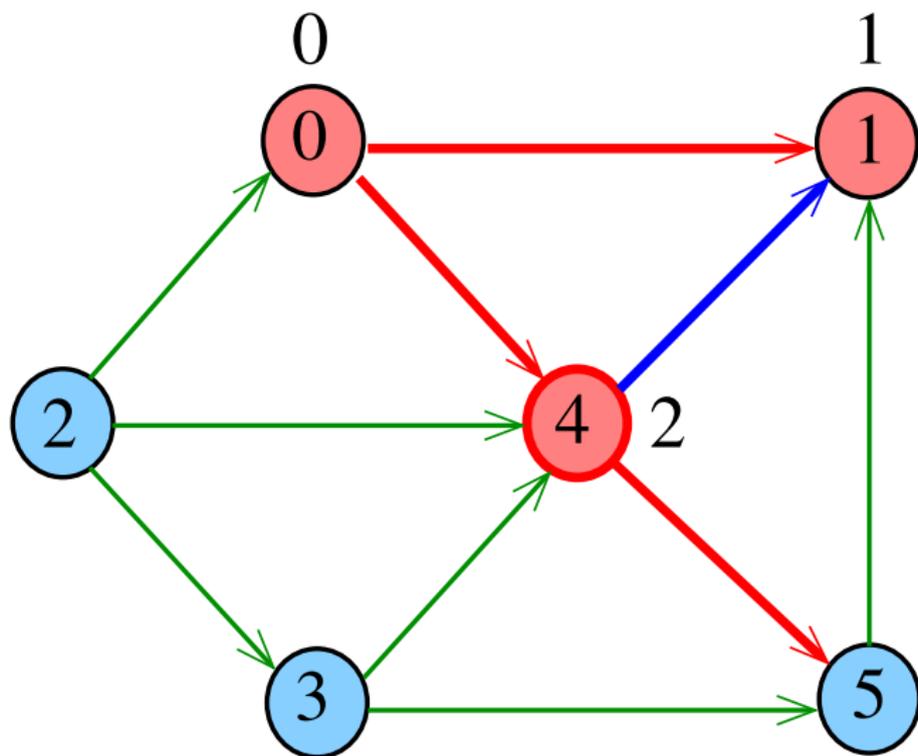
dfsR(G,4)



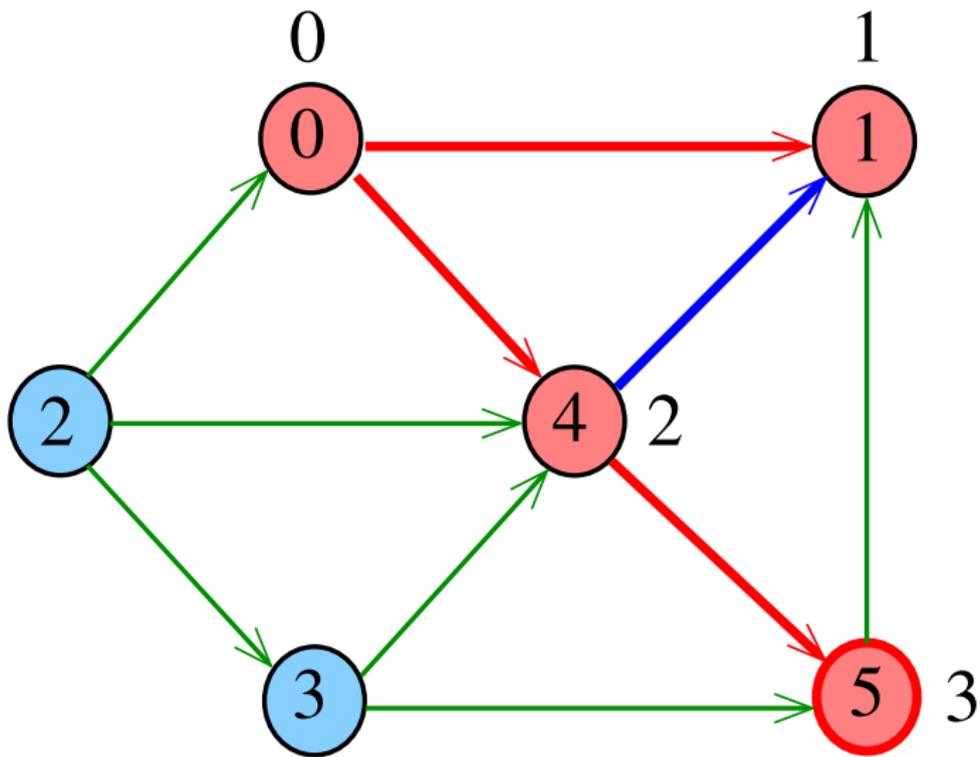
dfsR(G,4)



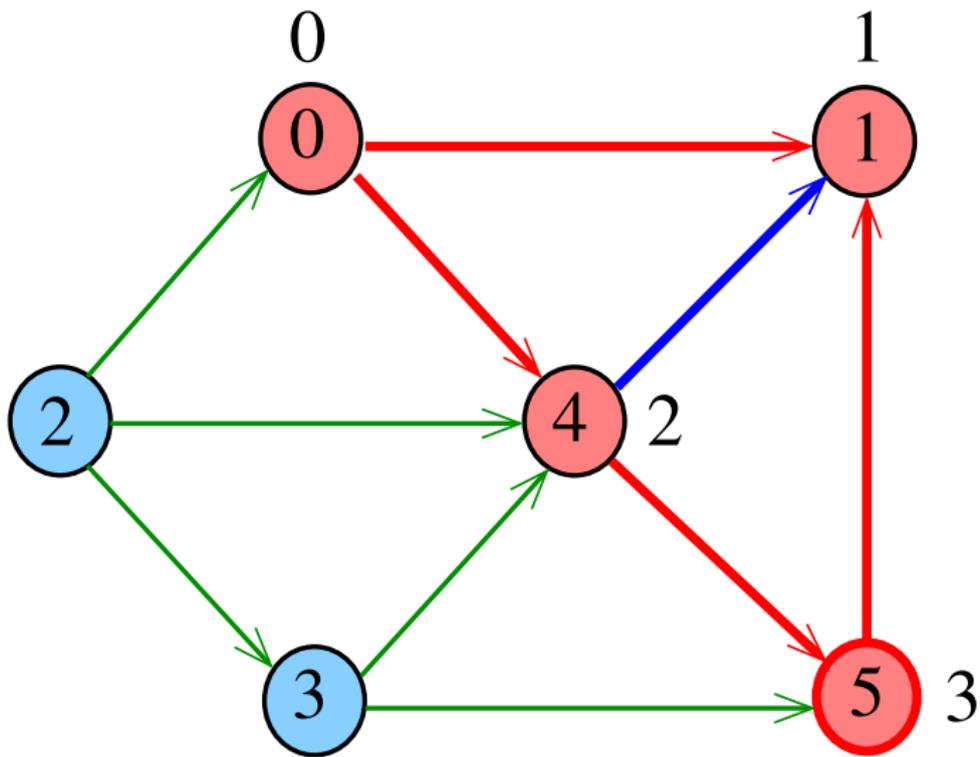
dfsR(G,4)



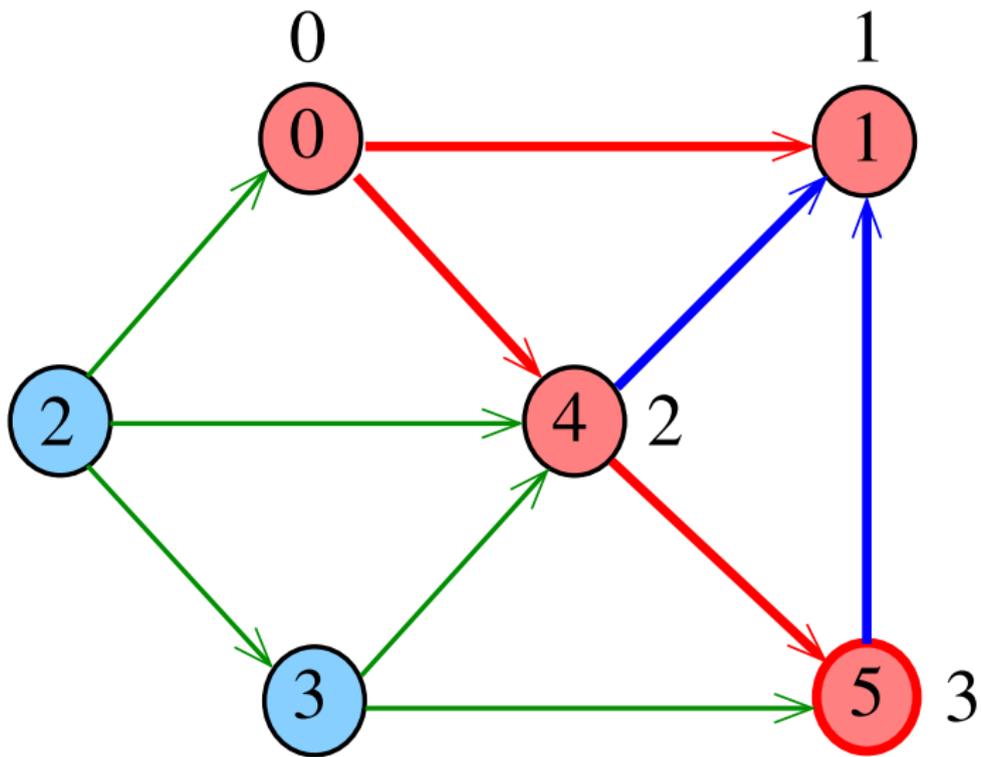
dfsR(G,5)



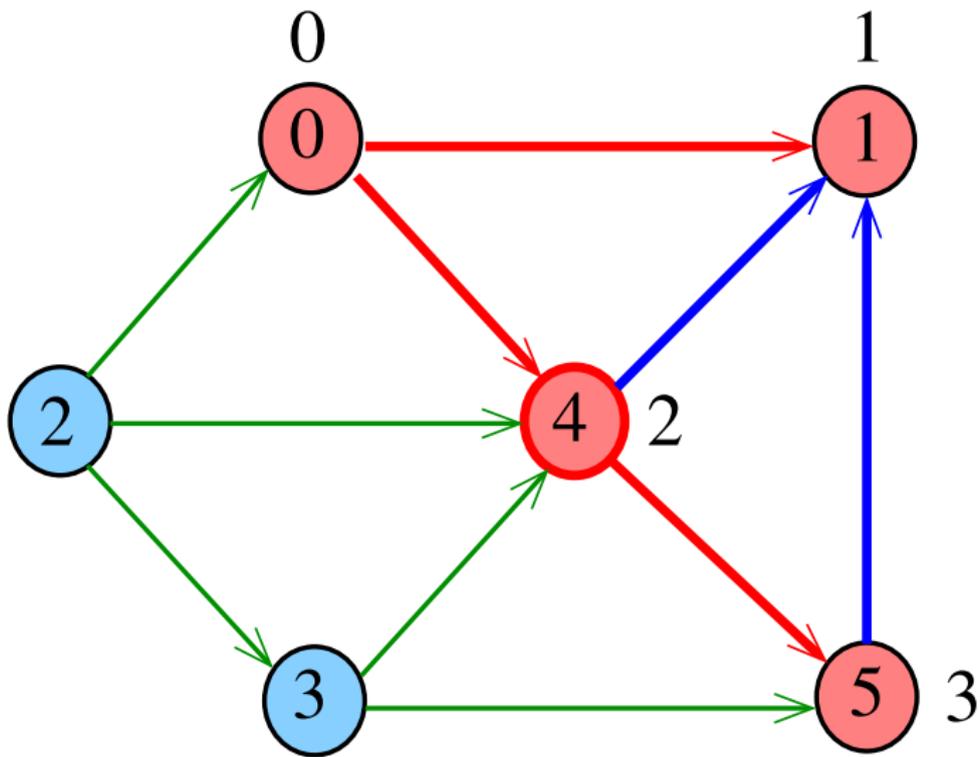
dfsR(G,5)



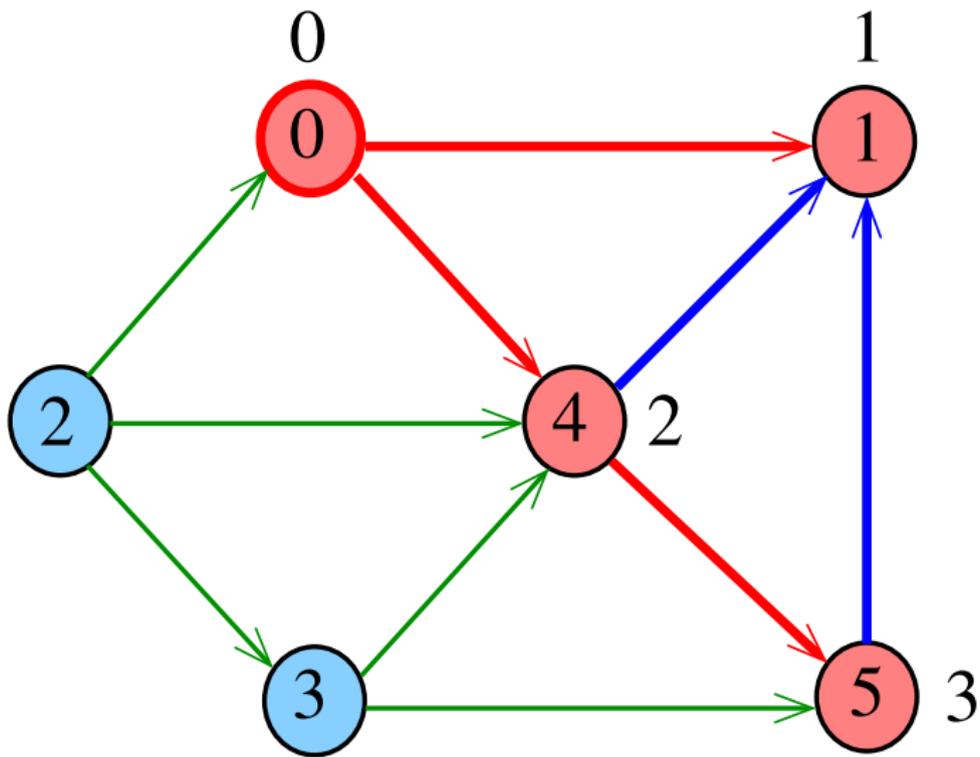
dfsR(G,5)



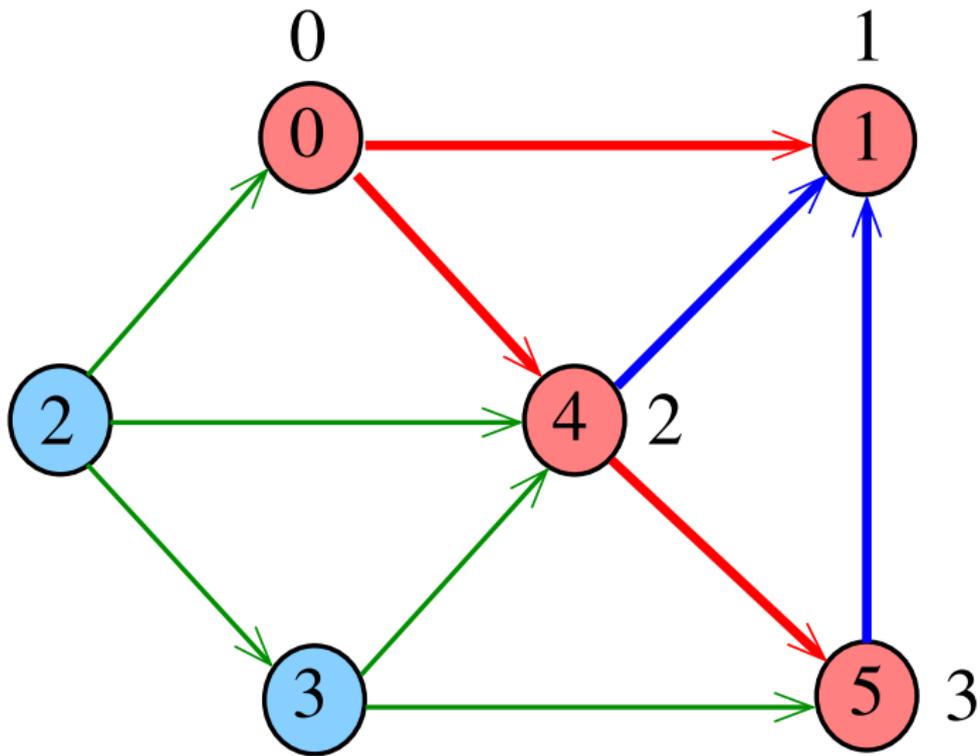
dfsR(G,4)



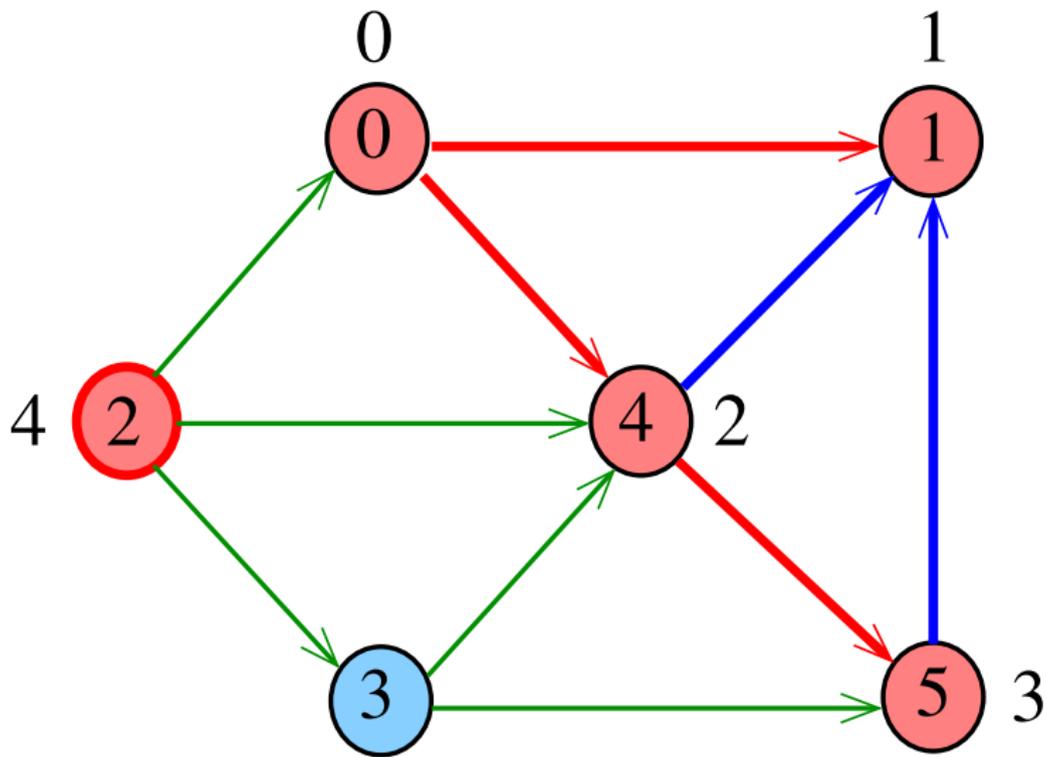
dfsR(G,0)



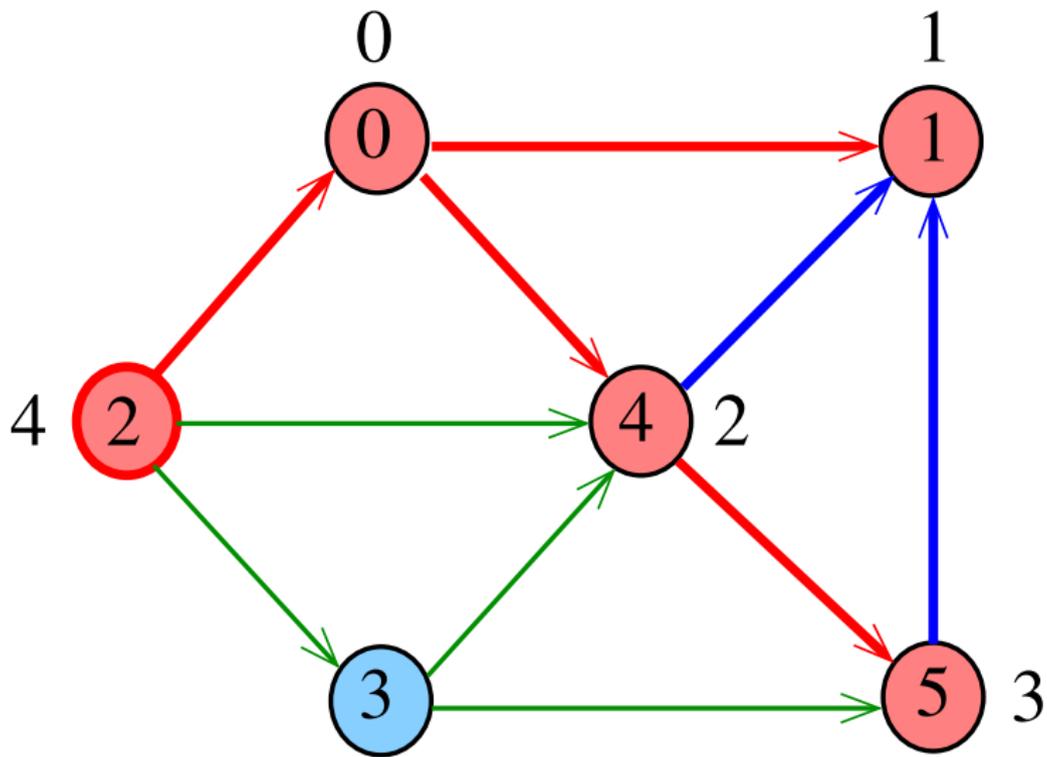
DIGRAPHdfs(G)



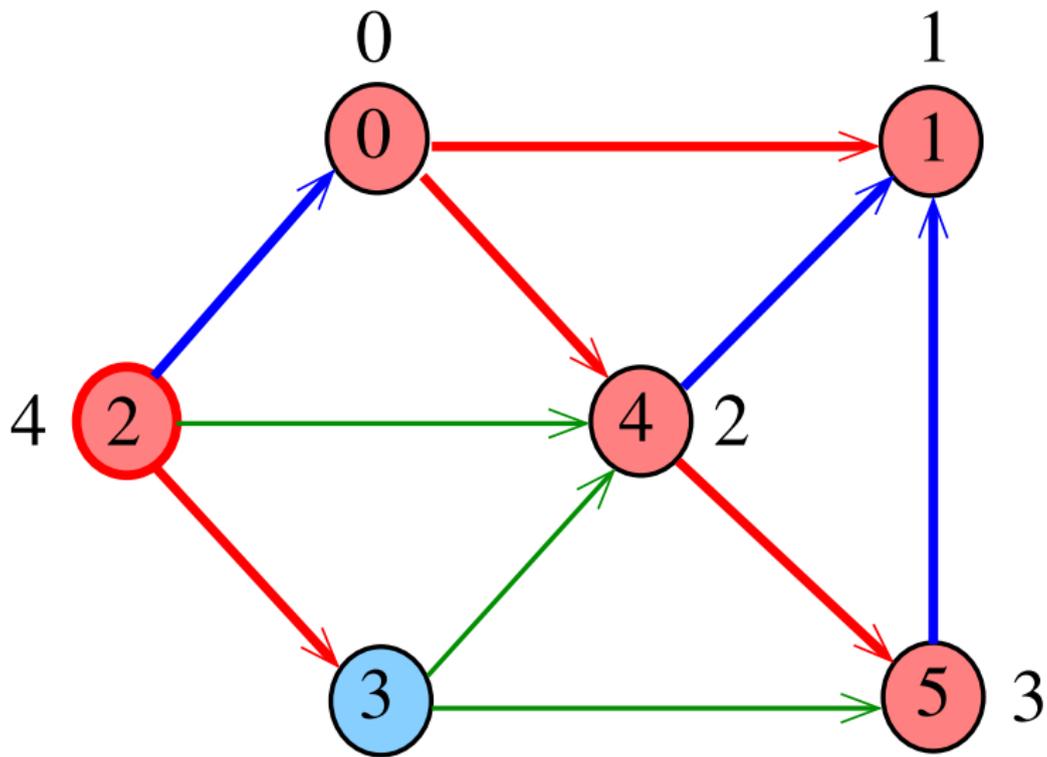
dfsR(G,2)



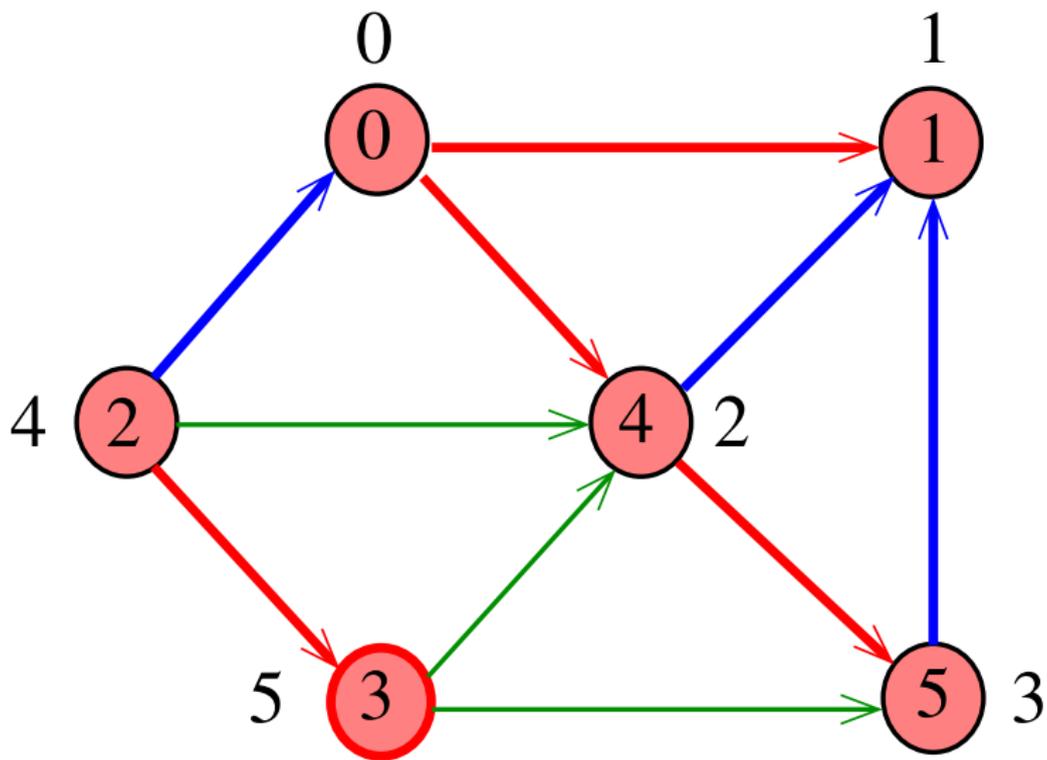
dfsR(G,2)



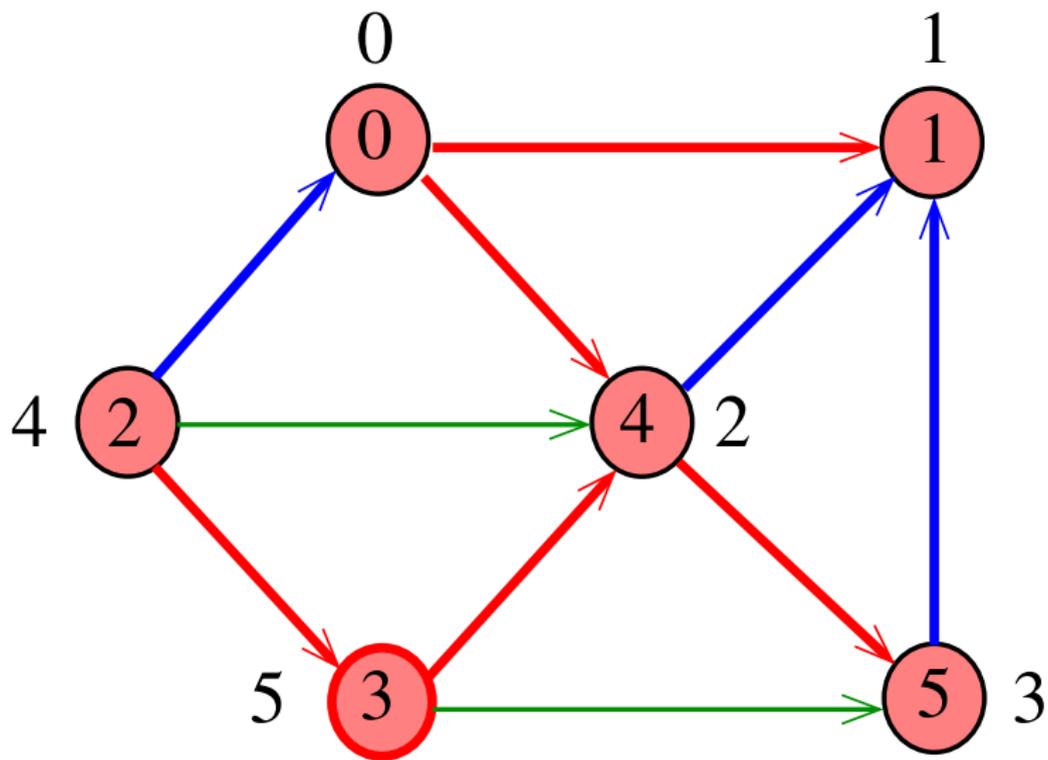
dfsR(G,2)



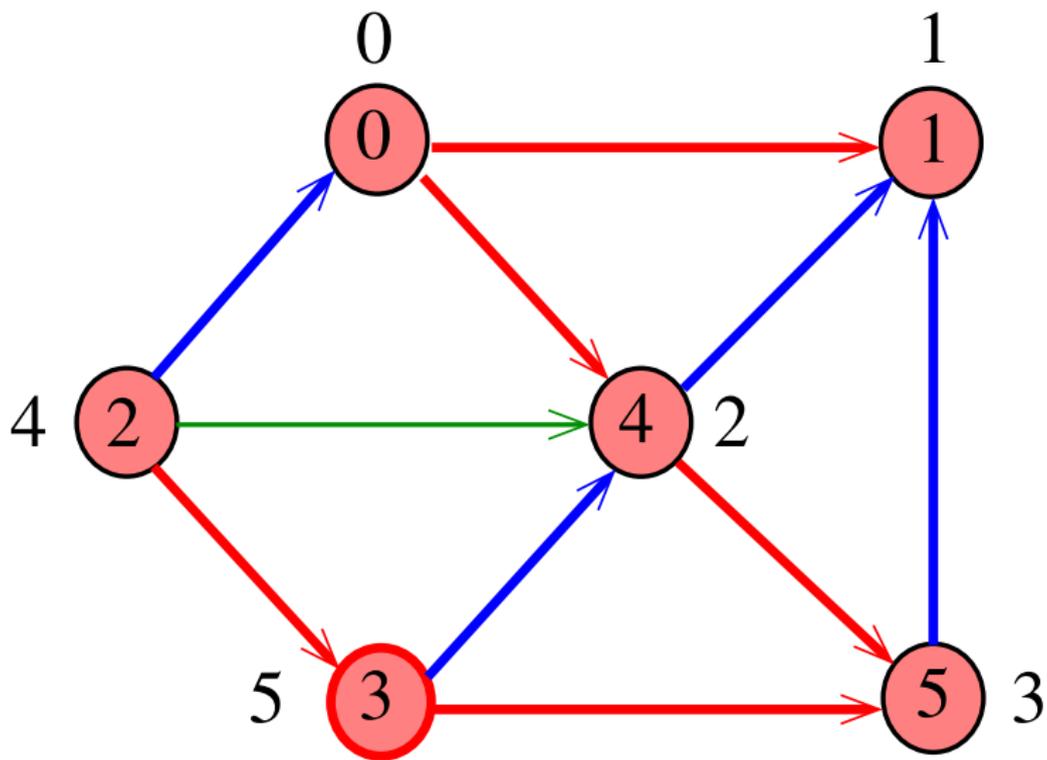
dfsR(G,3)



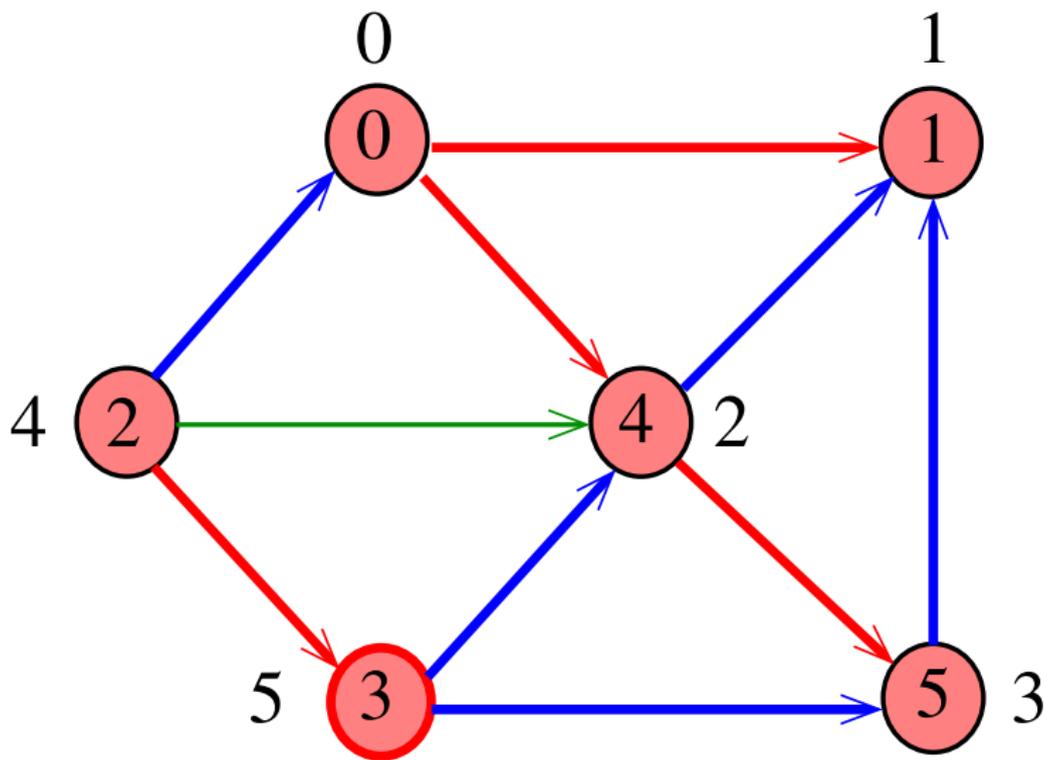
dfsR(G,3)



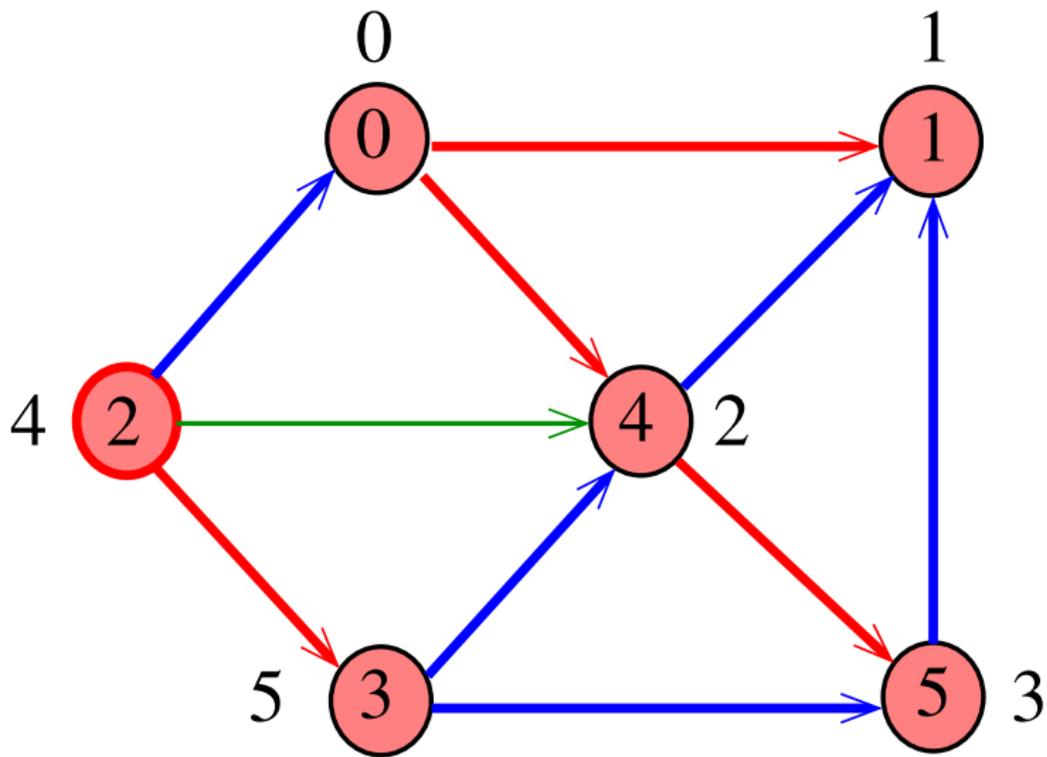
dfsR(G,3)



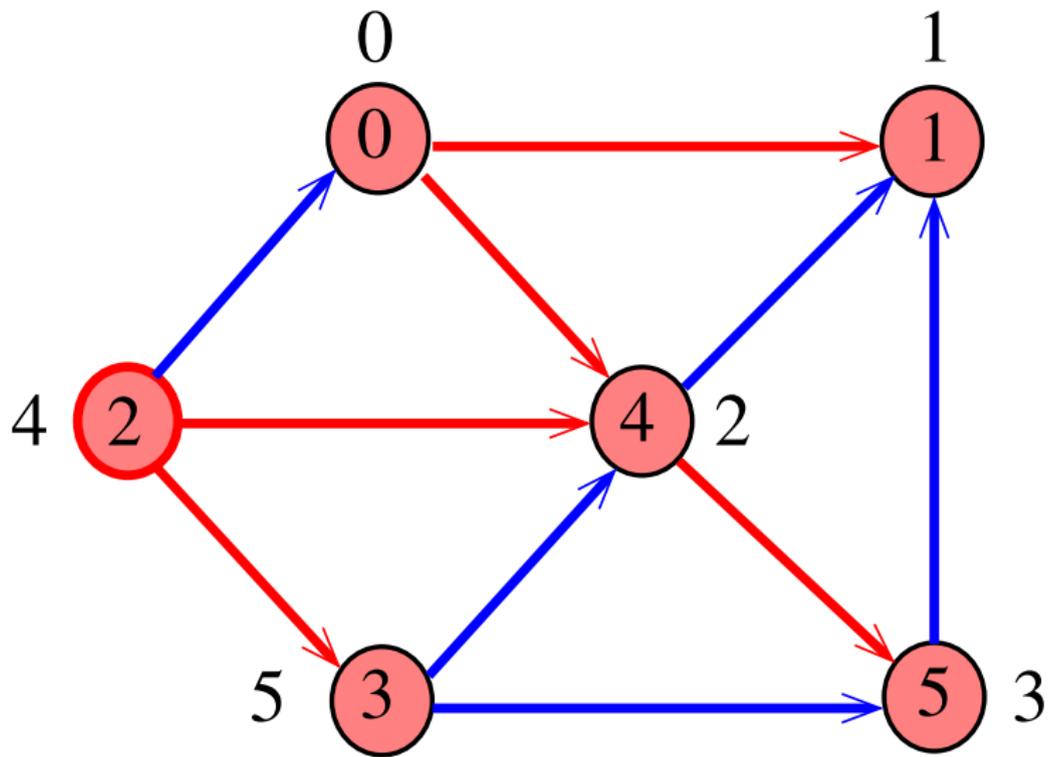
dfsR(G,3)



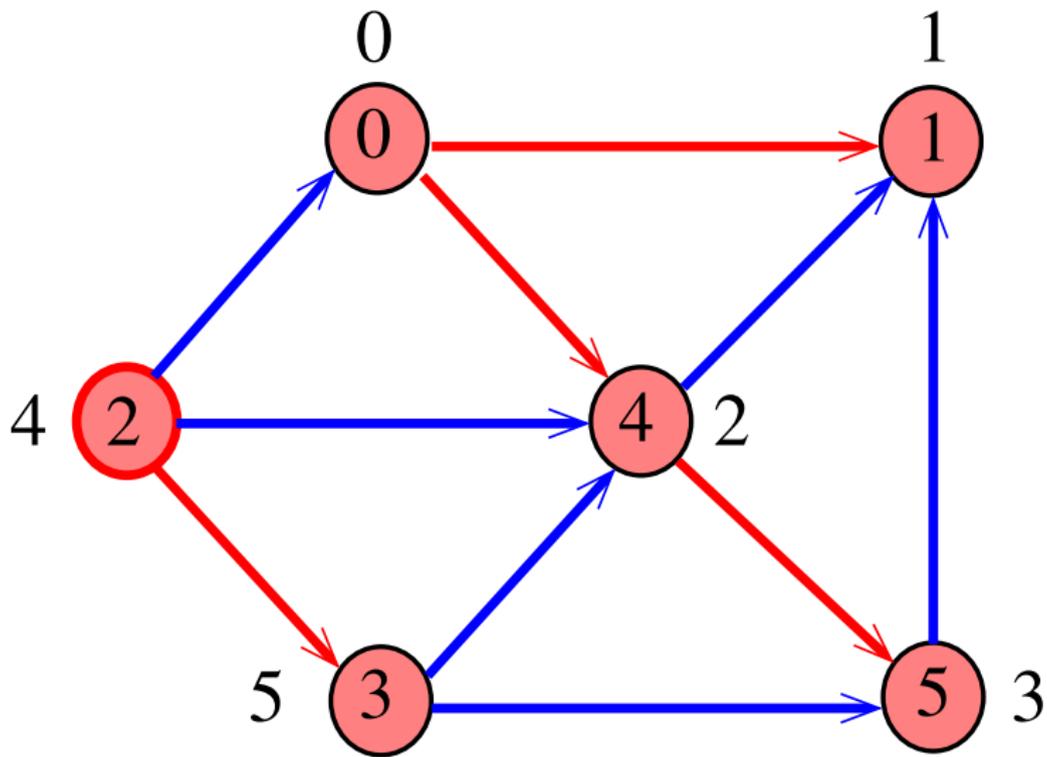
dfsR(G,2)



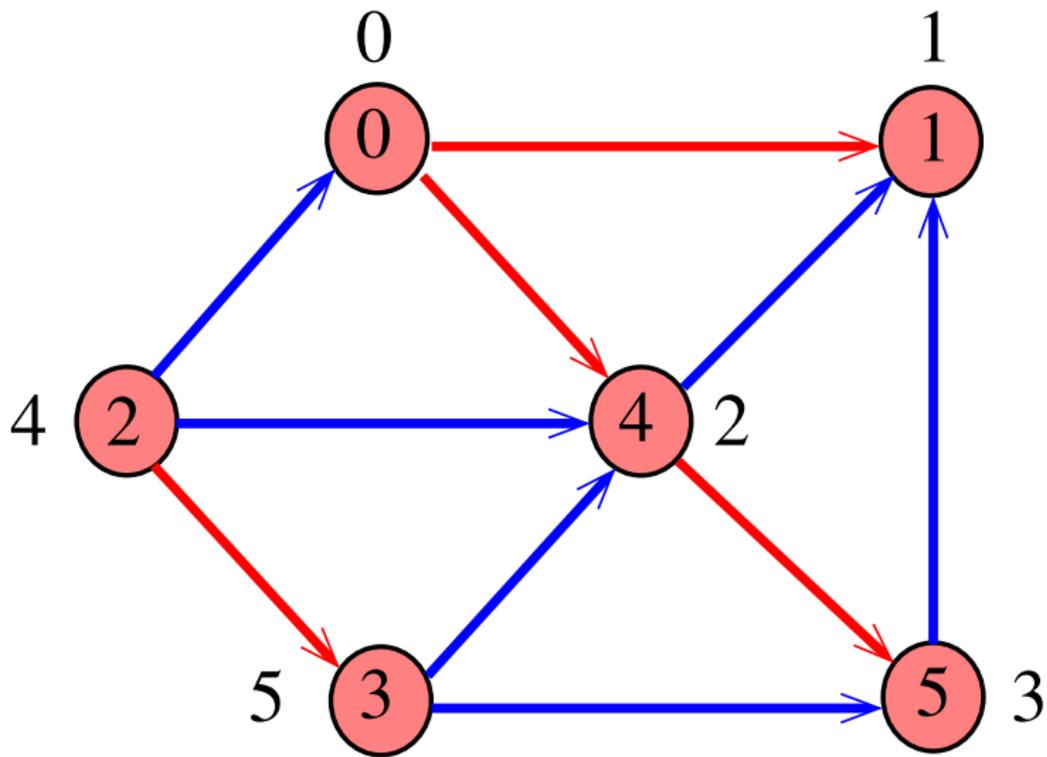
dfsR(G,2)



dfsR(G,2)



DIGRAPHdfs(**G**)



DIGRAPHdfs

```
static int cnt, lbl[maxV];
void DIGRAPHdfs (Digraph G) {
    Vertex v;
1   cnt = 0;
2   for (v = 0; v < G->V; v++)
3       lbl[v] = -1;
4   for (v = 0; v < G->V; v++)
5       if (lbl[v] == -1)
6           dfsR(G, v);
}
```

dfsR

dfsR supõe que o digrafo G é representado por uma matriz de adjacência

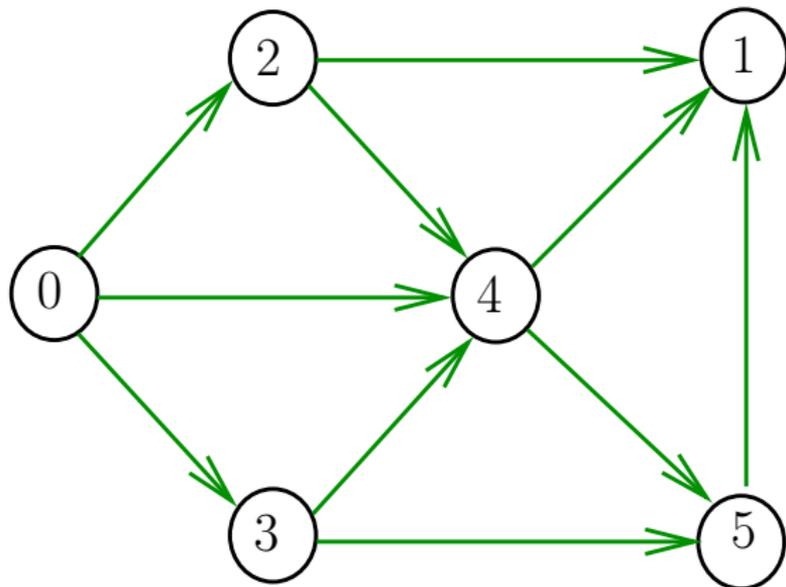
```
void dfsR (DigraphG, Vertex v) {  
    Vertex w;  
    1  lbl[v] = cnt++;  
    2  for (w = 0; w < G->V; w++)  
    3      if (G->adj[v][w])  
    4          if (lbl[w] == -1)  
    5              dfsR(G, w);  
}
```

dfsR

`dfsR` supõe que o digrafo `G` é representado por listas de adjacência

```
void dfsR (Digraph G, Vertex v) {  
    link p;  
1   lbl[v] = cnt++;  
2   for (p = G->adj[v]; p != NULL; p = p->next)  
3       if (lbl[p->w] == -1)  
4           dfsR(G, p->w);  
}
```

DIGRAPHdfs(**G**)



dfsR(G, 0)

0-2 dfsR(G, 2)

2-1 dfsR(G, 1)

2-4 dfsR(G, 4)

4-1

4-5 dfsR(G, 5)

5-1

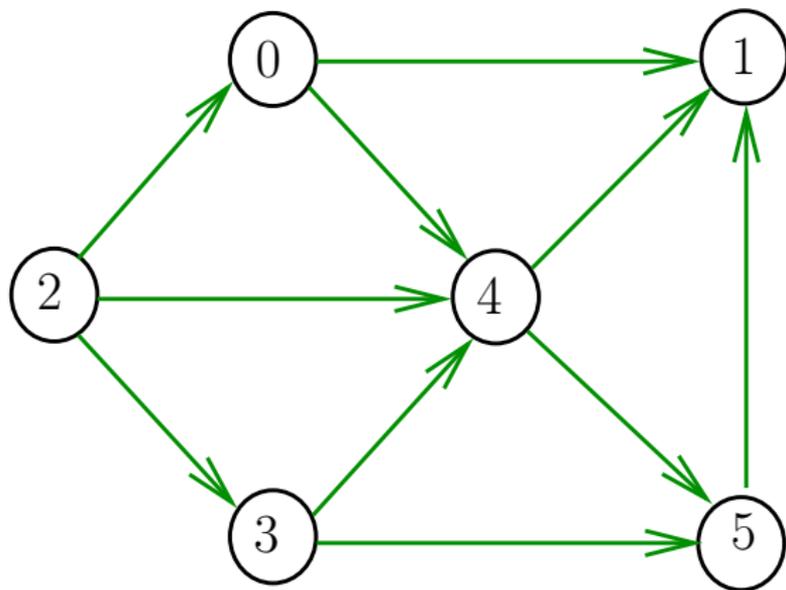
0-3 dfsR(G, 3)

3-4

3-5

0-4

DIGRAPHdfs(**G**)



dfsR(G, 0)

0-1 dfsR(G, 1)

0-4 dfsR(G, 4)

4-1

4-5 dfsR(G, 5)

5-1

dfsR(G, 2)

2-0

2-3 dfsR(G, 3)

3-4

3-5

2-4

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `DIGRAPHdfs` para **vetor de listas de adjacência** é $\Theta(V + A)$.

O consumo de tempo da função `DIGRAPHdfs` para **matriz de adjacência** é $\Theta(V^2)$.

Arborescência de busca em profundidade

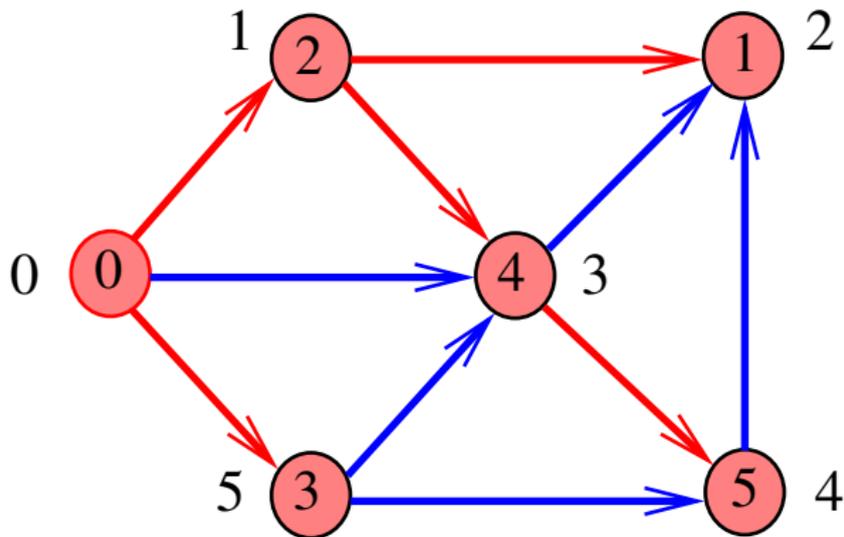
Classificação dos arcos

S 18.4 e 19.2
CLRS 22

Arcos da arborescência

Arcos da arborescência são os arcos $v-w$ que dfsR percorre para visitar w pela primeira vez

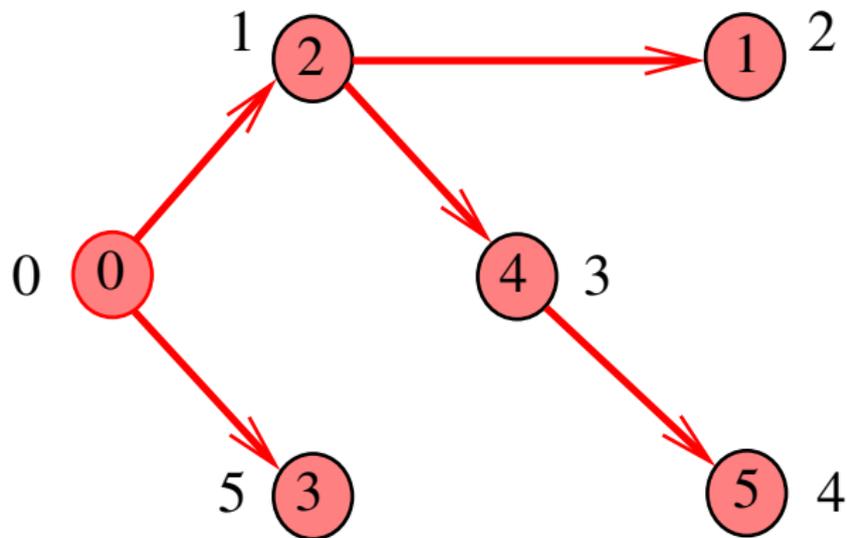
Exemplo: arcos em **vermelho** são arcos da arborescência



Arcos da arborescência

Arcos da arborescência são os arcos $v-w$ que dfsR percorre para visitar w pela primeira vez

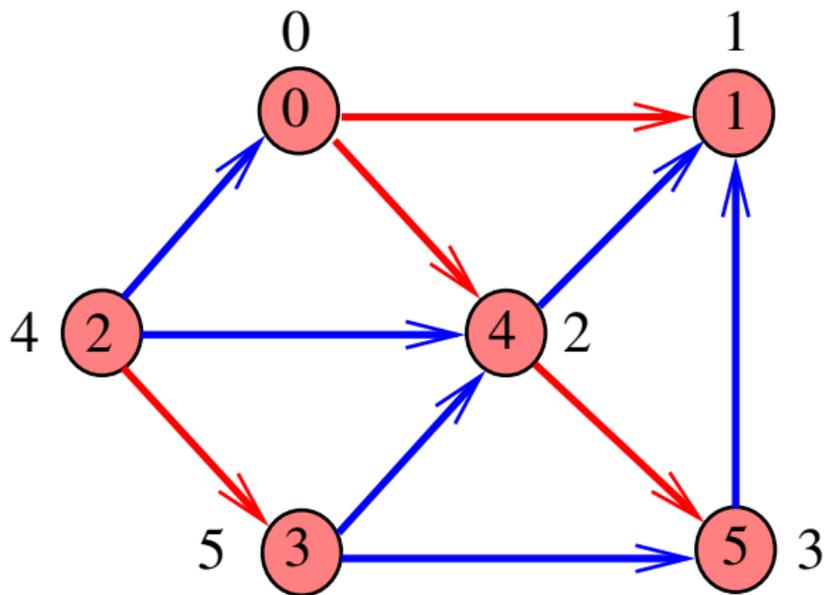
Exemplo: arcos em **vermelho** são arcos da arborescência



Floresta DFS

Conjunto de arborescências é a **floresta da busca em profundidade** (= *DFS forest*)

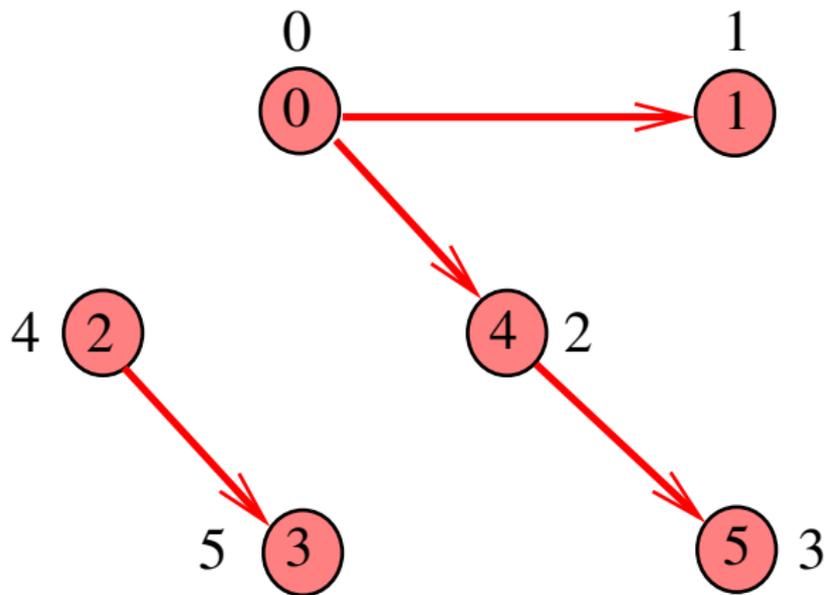
Exemplo: arcos em **vermelho** formam a floresta DFS



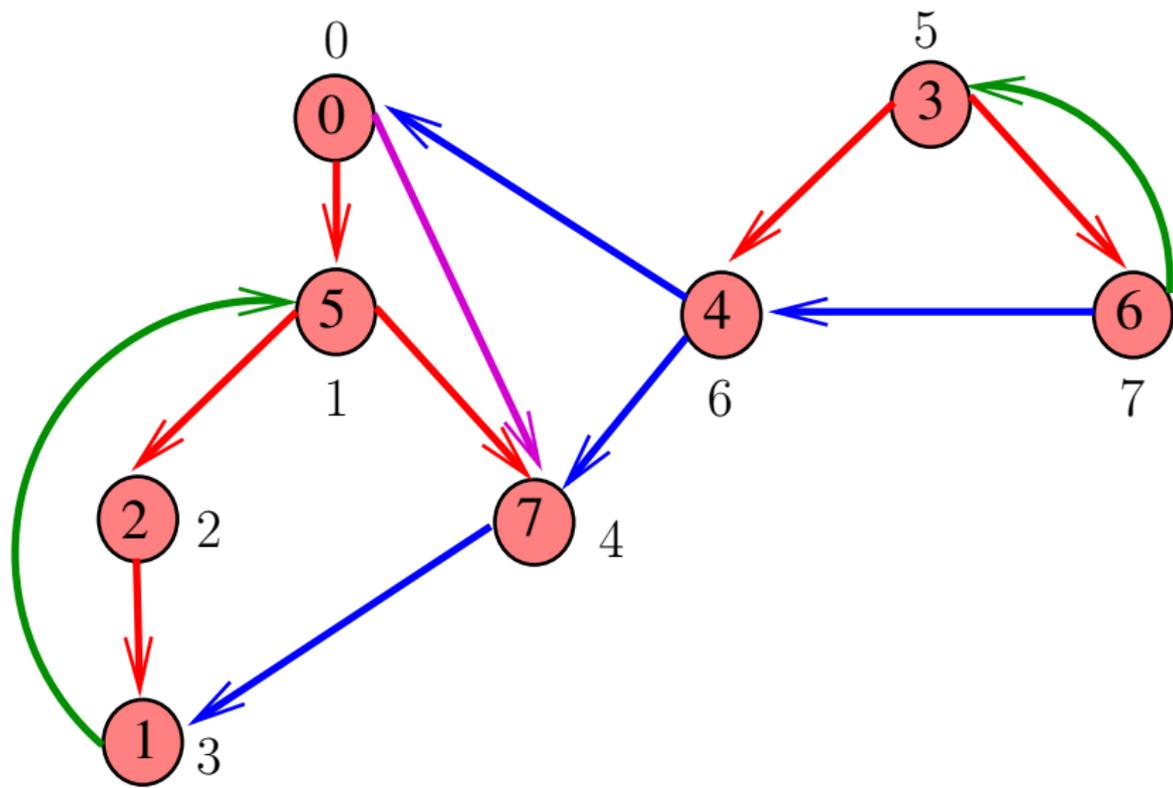
Floresta DFS

Conjunto de arborescências é a **floresta da busca em profundidade** (= *DFS forest*)

Exemplo: arcos em **vermelho** formam a floresta DFS

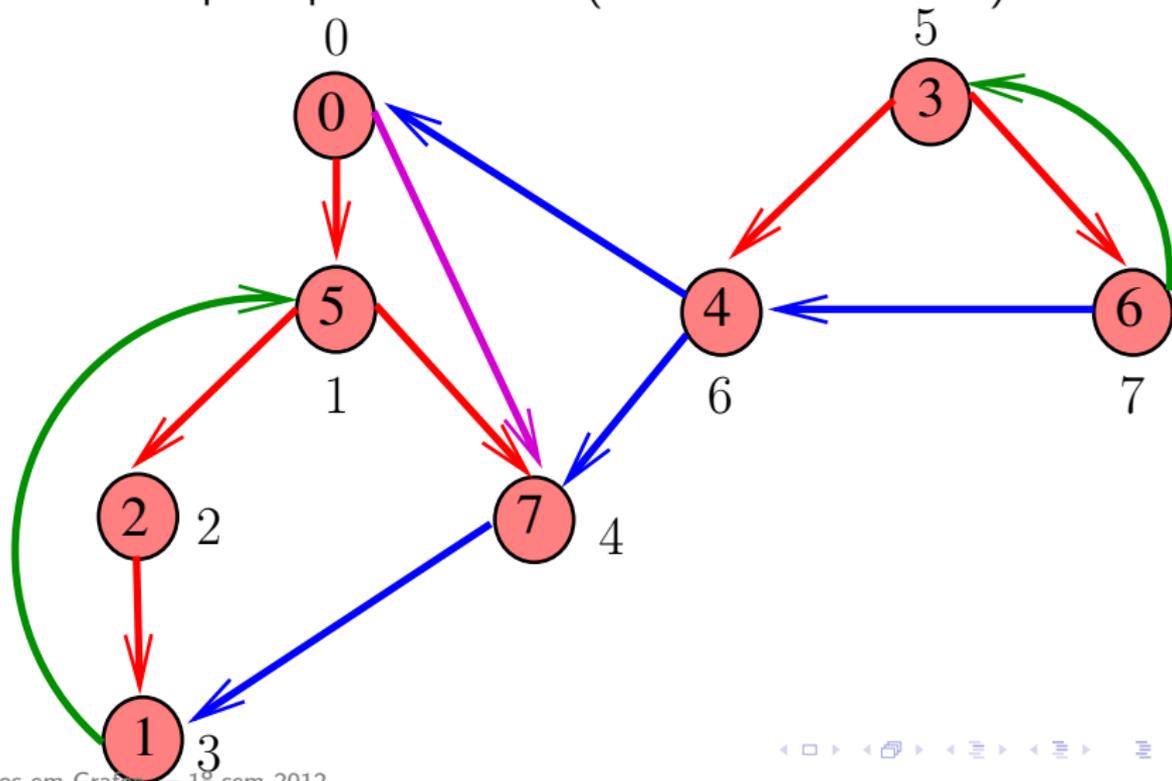


Classificação dos arcos



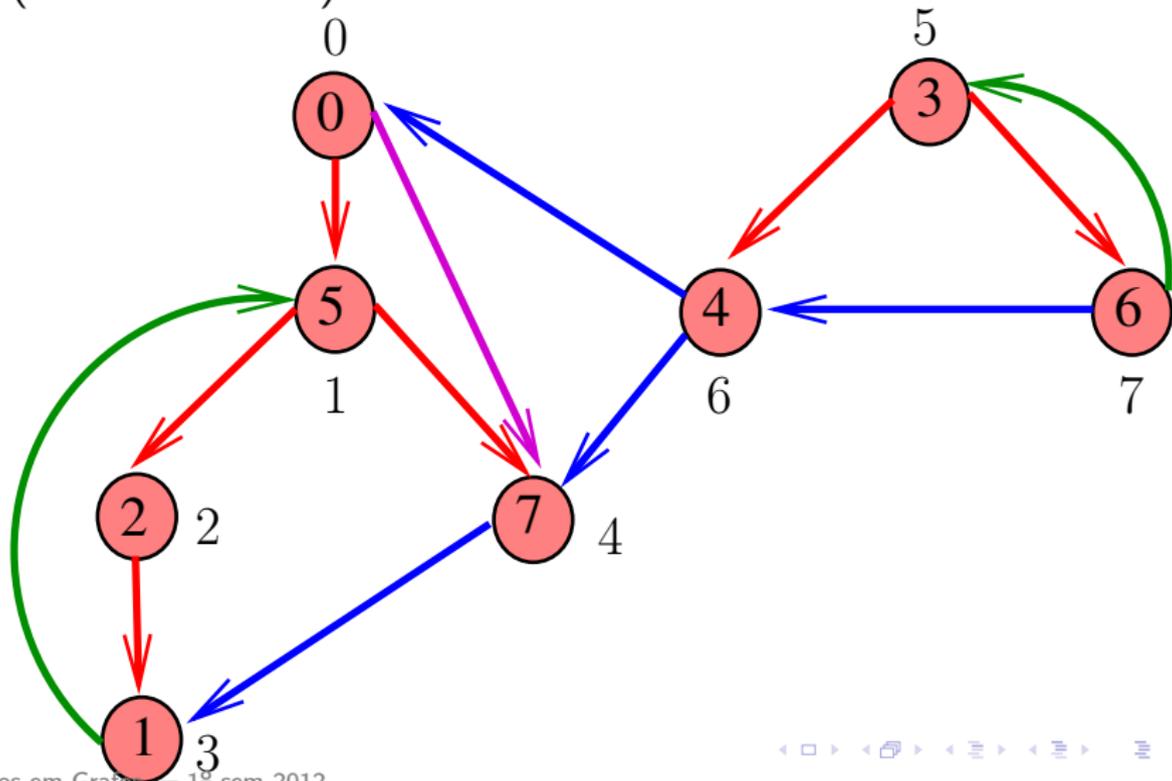
Arcos de arborescência

$v-w$ é **arco de arborescência** se foi usado para visitar w pela primeira vez (arcos **vermelhos**)



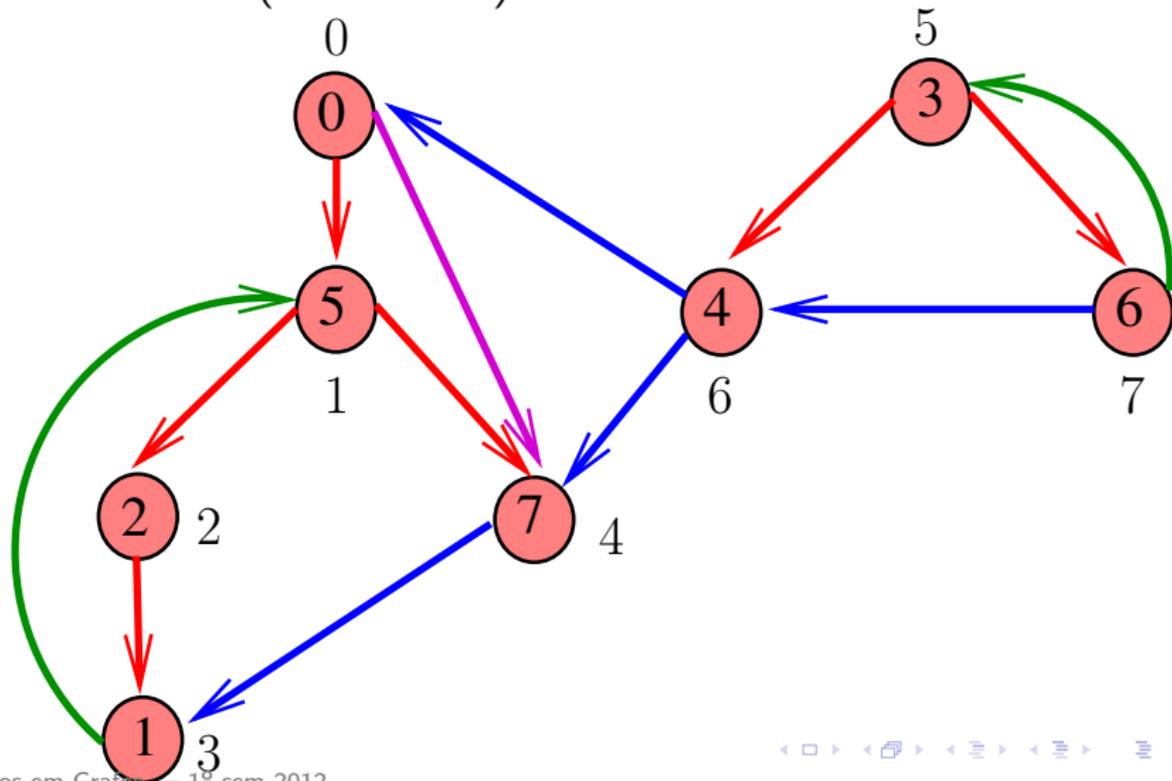
Arcos de retorno

$v-w$ é **arco de retorno** se w é ancestral de v
(arcos **verdes**)



Arcos descendentes

$v-w$ é **descendente** se w é descendente de v , mas não é filho (arco **roxo**)



Arcos cruzados

$v-w$ é **arco cruzado** se w não é ancestral nem descendente de v (arcos **azuis**)

