Prova 2, Calc 3 – Albert Fisher – BMAC – 24 de junho de 2019

Justifique suas respostas! Coloque o seu nome! Boa sorte!

Nota: partes 1, 2d, 4 a,b,c valem 2 pontos. As restantes valem 1 ponto. Temos 13 pontos possíveis.

(1) Para a curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ com $\gamma(t) = (3\cos t, 3 \text{ sen } t)$, calcule

$$\int_\gamma (-x^{18} - y^3)dx \; + (x^3 + y^{35})dy.$$

(2) Dado dois campos vetoriais:

$$\mathbf{F} = (P, Q) \text{ com } P(x, y) = x - y,\, Q(x, y) = x - y$$

e

$$\mathbf{G} = (\widehat{P}, \widehat{Q}) \text{ com } \widehat{P}(x, y) = y - x,\, \widehat{Q}(x, y) = x - y,$$

(2a) Ache o rotacional dos campos $\mathbf{F}, \mathbf{G}$. Ache o divergente dos campos $\mathbf{F}, \mathbf{G}$.
(2b) Dado a curva $\gamma(t) = (2\cos t, 2 \text{ sen } t)$, $0 \le t \le 2\pi$, calcule

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma, \quad \int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\gamma.$$

(2c) Se é possível, ache funções φ e $\widehat{\varphi}$ tal que $\nabla\varphi = \mathbf{F}$ e $\nabla\widehat{\varphi} = \mathbf{G}$. Se não existe uma tal função, porque não?
(2d) Uma curva $\eta(t)$ travessa a frontéira de uma paralellograma no sentido anti-horário; a parallelograma esta determinada pelos vetores $(5, 1), (4, 3)$. Calcule os fluxos atraves da curva η,

$$\int_\eta \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds, \quad \int_\eta \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

(4) Definimos o campo para $(x, y) \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{F} = \Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\Big).$$

(4a) Para a curva $\gamma(t) = (\cos t, \text{ sen } t)$ com $0 \le t \le 2\pi$, ache

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma.$$

(4b) Para uma curva $\eta(t)$ travessando o elipse

$$x^2/9 + y^2/16 = 1$$

no sentido anti-horário, ache

$$\int_\eta \mathbf{F} \cdot d\eta. \qquad \text{(DICA: Green! Explique a sua resposta!)}$$

(4c) Lembramos que para $x > 0$, para $\mathbf{F}$ de parte (a), então $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, onde $\varphi(x, y) = \arctan(y/x)$. Pela curva $\alpha(t) = (1, t)$ para $0 \le t \le 1$, ache

$$\int_\alpha \mathbf{F} \cdot d\alpha.$$