

Comentários sobre a preparação para o P2 e a ultima lista de exercisios

No primeiro lugar, deveria estudar o gabarito do P1 e os gabaritos das provinhas. Depois, as listas de exercisios, com enfase na lista 3 (veja abaixo), e depois isto, as notas de aula e os assuntos mais teoricos.

Nesta página falamos sobre o ultimo assunto: autovetores e autovalores e a diagonalização de matrizes.

Exercisio: faça a diagonalização das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

O segundo destas foi feito na aula, e se ache no Example 5.16 do livro do Poole (em ingles), exemplo 1 do §5.5 (versão portugues).

Brevemente,

Definition 0.1. Uma matriz M ($n \times n$) tem *autovetor* $\mathbf{v}$ com *autovalor* λ (isto possivelmente um numero complexo) sse $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Isto vále sse

$$M\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

mas

$$M\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = (M - \lambda I)\mathbf{v}$$

dai isto tem solução não- $\mathbf{0}$ sse $N = M - \lambda I$ é não-invertivel sse $\det N = 0$.

Dai para achar autovetores (se existem!) do M ,

(1) procuramos os possiveis autovalores, que são exatamente os raizes do *polinomio caracteristico* do M , $p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$.

(2) para cada raiz, procuramos um autovetor, como feito nos exemplos.

(3) se temos n autovalores e vetores, podemos *diagonalizar* a matriz, isto é, achar uma nova base para $\mathbb{R}^n$ tal que a matriz neste base é diagonal. A matriz que dar a mudança de base e simplesmente feito com colunas iguais os autovetores, como nos exemplos.

O polinomio carateristico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é por definição $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$; tem fatorização $p(\lambda) = (\lambda - \lambda^+)(\lambda - \lambda^-)$ para $\lambda^\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Um autovetor correspondendo ao valor λ é $(x, 1)$ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda \end{bmatrix}$$

dai $x = \lambda$. Notando que $\lambda^+\lambda^- = -1$, os autovetores $(\lambda^\pm, 1)$ de fato são ortogonais, e podem ser normalizadas para autovetores $\mathbf{v}^\pm$. Definamos B igual a matriz com colunas $\mathbf{v}^+, \mathbf{v}^-$. Segue que $B^{-1}AB = D$ é diagonal onde $D = \begin{bmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{bmatrix}$.

Utilizando isto, calculamos os auto-valores e vetores para $M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (sem fazer trabalho nenhuma) e calculamos M^{99} sem trabalhar. Veja os exercisios na página 281 do Poole na Lista 3.

É claro que nas aulas a explicação foi muito mais completa!

O que deveria estudar sobre o assunto de autovetores e autovalores: Na lista 3 abaixo, deveria estudar as páginas 3.3-3.10, com exeção dos exercisios sobre Cayley-Hamilton, numeros 35, 36, 37, 38 da §4.4 (página 3.7 abaixo). A restante da lista 3 vale. Do parte do Poole em ingles, deveria ler Example 5.16, fazer Exercises 5.4 1,2,3,4,11, 15, ler Example 5.21, ler páginas 410, 411, 412, Example 5.26, 5.27, 5.28, 5.29. Resolver Exercise 5.5 7, 8, 9, 13. Do Poole em portugues, deveria ler §5.5 exemplo 1, e fazer exercisios 5.5 1,2,3,4,11, 15. Tambem deveria ler exemplo 2, p. 355 e exemplo 4, p. 359.

ALBERT M. FISHER, DEPT MAT IME-USP, CAIXA POSTAL 66281, CEP 05315-970 SÃO PAULO, BRAZIL

URL: <http://ime.usp.br/~afisher>

E-mail address: afisher@ime.usp.br