

PROBLEMINHA

①

13/04

① escreva a matriz M $\theta = \pi/6$

② $M^3 = ?$ $M^9 = ?$ $M^{-1} = ?$

Pasta 24

Nº cópias 04

③ escreva N para $\theta = \pi/4$

④ para $K = M^{-1}N$, qual é o ângulo θ ?

RESPOSTA :

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \text{rot. para } 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

$$\text{então } M^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -I$$

$$M^9 = M^3 \cdot M^6 = M^3 \cdot I = M^3 = -I$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$K = M^{-1}N: \text{rot. para } \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

(sem fazer a multiplicação!)

- MAIS DETALHES A SEGUIR -

PROBLEMINHA

(2)

(1) escreva a matriz M $\theta = \pi/6$

(2) $M^3 = ?$ $M^9 = ?$ $M^{-1} = ?$

(3) escreva N $\theta = \pi/4$

(6) para $K = M^{-1}N$, qual é o ângulo θ ?

MAIS DETALHES:

~~GABARITO~~:

Sabemos que

$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e que M define uma

(2)

função $f_M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ assim:

$$f_M(x, y) = (ax + by, cx + dy) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

- multiplicação de matrizes -

Temos que achar os números a, b, c, d .

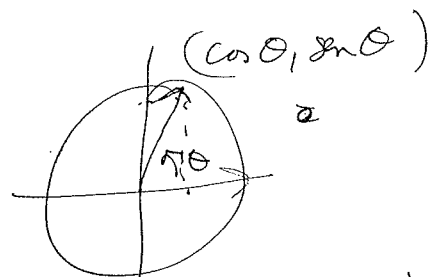
O método mais fácil é observar qual vai ser $f_M(1, 0)$ e $f_M(0, 1)$ pois vai nos

dar a 1ª e a 2ª coluna:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

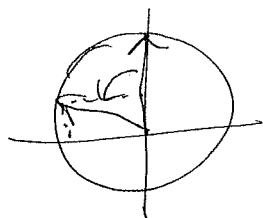
Agora,



$$f_M(1, 0) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$f_M(0, 1) = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

$$\text{então } M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$



OBS:
 Dado M matriz de rotação $\nearrow \theta$ (2)
 N " " $\nearrow \varphi$

então $f_N \circ f_M$ dar rotação pelo $(\theta + \varphi)$.
 No mesmo tempo, esta dada pelo multiplicação
 de matrizes

$$N(M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = (NM) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

regra de
 associatividade
 para mult. de
 matrizes.

então

$$f_N \circ f_M = f_{NM}.$$

Assim M^3 vai rodar para $3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

e este leva $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e

qualquer $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$, quer dizer

$$M^3 = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$M^9 = M^3 \cdot M^6 = M^3 \cdot I = -I \cdot I = -I$$

também.

$$M = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M^{-1} = rotação para $-\theta$ então

$$M^{\theta} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

OBS: $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

então podemos calcular

$$K = M^{-1}N = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

mas também, trair a rotação para

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{12}} \quad (\text{sem fazer a multiplicação!!!})$$