Operações de linha e matriz elementar.

Def: um matriz elementar (m×m) é formado da matriz de identidade, I, fazendo operações de linha elementares basicas:

(1) trocar 2 linhas

(2) multiplicar uma linha por uma constante $c \neq 0$

(3) trocar linha k por (linha i) + (linha k)

por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pasta 24
Nº cópias 09

19/05

OBS: multiplicar M (m×n) por E no lado esquerda tem o efeito de fazer a mesma operação de linha na matriz M! Experimente.

Def.: uma matriz elementar é um produto de matrizes elementares basicas, $E = E_K \cdots E_3 E_2 E_1$. Uma operação de linhas numa matriz $(m \times n)$ M é o resultado de fazer várias operações de linha basicas em seguida. Daí, qualquer operação de liha é realizada para uma multiplicação ao lado esquerdo para uma matriz elementar $E = E_k \cdots E_2 E_1$.

OBS: Cada linha de $\tilde{M} = EM$ é uma combinição linear das linhas do M. Qualquer combinação linear das linhas do M pode ser realizado assim (verifique!)

Conclusão: $\mathcal{L}in(M)$, o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas do M, é igual $\mathcal{L}in(\tilde{M})$ para $\tilde{M} = EM$.

Prop: uma matriz E elementar é invertível.

Prova: a inversa de $E = E_3 E_2 E_1$ é

$E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$; cada matriz elementar básica é invertível (verifique!).

Corolário: $\dim(\mathrm{Col}\, M) = \dim(\mathrm{Col}\, \tilde{M})$ para $\tilde{M} = EM$.

Prova: temos

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "M"] \arrow[rr, bend right, "EM"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "E"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

pois
$$E\Big(M \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}}_{n\times 1}\Big) = (EM) \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}}_{m\times 1}$$

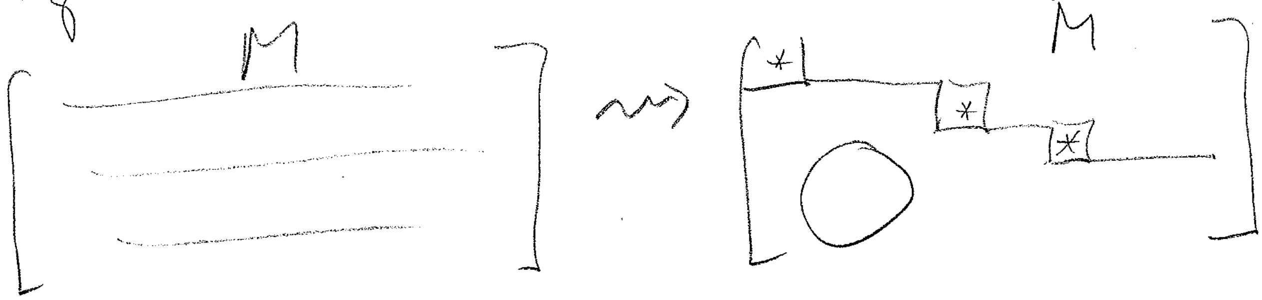
(a lei associativa para multiplicação de matrizes). Sendo que E é invertível, dado um subespaço S de $\mathbb{R}^m$, $\dim(S) = \dim(ES)$ (pois uma base de S vai ser levado a uma base de $E(S)$.)

<u>Entretanto</u>, em geral $Col(M) \neq Col(\tilde{M})$.

(Ache um exemplo simples!)

<u>Escalonamento e matizes elementares:</u>

Através da aplicação de operações de linha, a chamada <u>escalonamento</u> do M, chegamos numa <u>forma</u> <u>escalonada</u>:



onde cada linha do $\tilde{M} = EM$ tem sua 1ª entrada não-zero depois dos anteriores.

<u>Prop</u>: As linhas não-zeros do $\tilde{M}$ daram uma base para $Lin(\tilde{M})$, e então para $Lin(M)$.

<u>Prova</u>: A primeira linha não é uma comb. linear dos demais, pois nenhum outro linha tem 1ª entrada não-zero. A segunda linha não é uma comb. linear das linhas 3, 4, ... pelo mesmo motivo. Segue que eles são

uma coleção L.I: ~~se~~ as linhas são

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ daí se

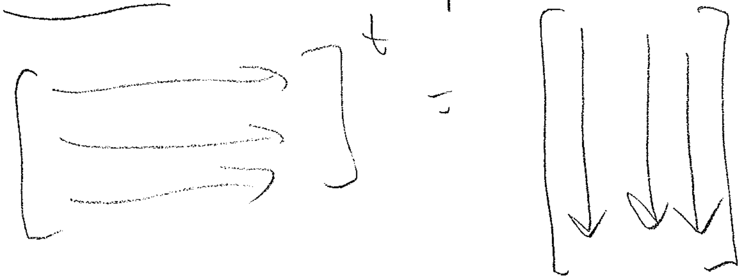
$a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_m \underline{v}_m = \underline{0}$, necessariamente $a_1 = 0$;

necessariamente $a_2 = 0$; etcetera. //

<u>OBS</u>: Pelo mesmo motivo, as <u>colunas</u> do $\tilde{M}$ formam uma base para $Col(\tilde{M})$ (mas <u>não</u> para $Col(M)$!).

<u>Prop</u>: As <u>operações colunas</u> no M estão dados para multiplicação ao lado <u>direito</u> para matrizes elementares.

<u>Prova</u>: A transposta troca linhas para colunas:



pois $(M^t_{ij}) = M_{ji}$.

Sabemos que $(AB)^t = B^t A^t$. Daí

$(EM)^t = M^t E^t$

op. de linha no M — op de coluna no M^t.

[Também pode verificar diretamente].

OBS: Para definir uma matriz elementar fazemos operações de linhas da matriz de identidade, mas poderemos igualmente ter feito operações de coluna! (Verifique!)

Metodo para achar uma base para Col(M):

① faça escalonamento, chegando no $\tilde{M} = EM$

② as colunas postas do $\tilde{M}$ formam uma base para Col($\tilde{M}$).

③ Os correspondentes colunas de M formam uma base para Col(M). (Verifique!)

Exercício: Dado uma matriz digamos (3×5) ou (5×3), Ache uma base para:

Lin(M), Sol(M) = ker(M), Col(M)

(utilizando escalonamento de linhas).

Provamos:

Teorema: Dado $T: V \to W$ linear, com espaços de dim. finita, daí
$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$.

Então dado M $(m \times n)$, M define uma tf. linear de
$\mathcal{M}_{n \times 1} \to \mathcal{M}_{m \times 1}$ então de
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Daí temos: $n = \dim V = \underbrace{\dim \overset{\ker T}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{Sol}(M)}}}_{\substack{\shortparallel \\ \#\text{vars livres} \\ = n - \text{posto}}}$
$+ \dim \underbrace{\mathrm{Col}(M)}_{\substack{\shortparallel \\ \operatorname{Im} T}}$

$n = (n - \text{posto}) + \dim \mathrm{Col}\, M$

$\text{posto} = \dim \mathrm{Col}\, M$
$\equiv$
$\dim \mathrm{Lin}(M)$

Conclusão: $\text{posto} \equiv \dim \mathrm{Lin}\, M$
$\equiv \dim \mathrm{Col}\, M$

e agora sabemos achar uma base em ambos.