Problema 8: Na geometria euclidiana, o valor de π é metade da circunferência de um círculo unitário (um círculo de raio 1). Vamos definir o ***pi do taxista*** como o número π_t, que é metade da circunferência do círculo unitário do taxista. Qual é o valor de π_t?

Na geometria euclidiana, a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ pode ser definida como o conjunto de todos os pontos eqüidistantes de A e de B. Se usarmos a distância do taxista no lugar da distância euclidiana, será razoável perguntar como é a mediatriz de um segmento. Mais precisamente, a ***mediatriz do taxista*** de $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os pontos X tais que

$$d_t(X, A) = d_t(X, B)$$

Problema 9: Desenhe a mediatriz do taxista de $\overline{AB}$ para os seguintes pares de pontos:

(a) $A = (2, 1), B = (4, 1)$ (b) $A = (-1, 3), B = (-1, -2)$
(c) $A = (1, 1), B = (5, 3)$ (d) $A = (1, 1), B = (5, 5)$

Esses exemplos ilustram que a geometria do taxista compartilha algumas propriedades com a geometria euclidiana, mas também difere em alguns pontos-chave. Neste capítulo, vamos encontrar vários outros tipos de distâncias e normas, cada uma delas útil em um modo particular. Tentaremos descobrir o que elas têm em comum e nos beneficiar dessas semelhanças. Também vamos explorar uma variedade de problemas de aproximação nos quais a noção de distância tem um papel importante.

7.2 Espaços com Produto Interno

No Capítulo 1, definimos o produto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, e fizemos repetidos usos dessa operação por todo o livro. Nesta seção, usaremos as propriedades do produto escalar como um caminho para definir uma noção de *produto interno*. Na próxima seção, mostraremos que o produto interno pode ser utilizado para definir conceitos análogos aos de "comprimento" e "distância" em outros espaços vetoriais além de $\mathbb{R}^n$.

Nosso ponto de partida é a definição a seguir; ela é baseada nas propriedades do produto escalar demonstradas no Teorema 1 da Seção 1.3.

Definição Um ***produto interno*** em um espaço vetorial V é um operação que associa a cada par de vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V um número real $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ tal que as seguintes propriedades valem para todos os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e todos os escalares c:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Um espaço vetorial com um produto interno é chamado de ***espaço com produto interno***.

Observação:

- Tecnicamente, isso define um espaço *real* com produto interno, porque assume-se que V seja um espaço vetorial real e porque o produto interno de dois vetores reais é um número real. Existem, também, espaços *complexos* com produto interno, mas sua definição é um pouco diferente. (Veja os Exercícios 45 e 46.)

EXEMPLO 1 $\mathbb{R}^n$ é um espaço com produto interno com $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. As propriedades (1) a (4) são verificadas conforme o Teorema 1 na Seção 1.3. ◈

O produto escalar não é o único produto interno que pode ser definido em $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLO 2 Sejam $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ dois vetores em $\mathbb{R}^2$. Mostre que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$$

define um produto interno.

SOLUÇÃO: Devemos verificar as propriedades (1) a (4). A propriedade 1 vale porque

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 = 2v_1u_1 + 3v_2u_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

Agora, consideramos $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$. Verificamos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= 2u_1(v_1 + w_1) + 3u_2(v_2 + w_2) \\ &= 2u_1v_1 + 2u_1w_1 + 3u_2v_2 + 3u_2w_2 \\ &= (2u_1v_1 + 3u_2v_2) + (2u_1w_1 + 3u_2w_2) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

o que mostra a propriedade (2).

Se c é um escalar, então

$$\begin{aligned} \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= 2(cu_1)v_1 + 3(cu_2)v_2 \\ &= c(2u_1v_1 + 3u_2v_2) \\ &= c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

o que mostra a propriedade (3).

Finalmente,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 2u_1u_1 + 3u_2u_2 = 2u_1^2 + 3u_2^2 \geq 0$$

e é claro que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 2u_1^2 + 3u_2^2$ se, e somente se, $u_1 = u_2 = 0$ (ou seja, se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$). Isso verifica a propriedade (4), completando a demonstração de que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, como definido anteriormente, é um produto interno. ◈

O Exemplo 2 pode ser generalizado para mostrar que, se $w_1, \ldots, w_n$ são escalares *positivos* e

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

são vetores em $\mathbb{R}^n$, então

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1u_1v_1 + \cdots + w_nu_nv_n \tag{1}$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$, que chamamos de ***produto escalar ponderado***. Se algum dos escalares w_i é negativo ou zero, a equação (1) não define um produto interno. (Veja os Exercícios 13 e 14.)

Lembre-se de que o produto escalar pode ser calculado como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$. Observe que podemos escrever o produto escalar ponderado da equação (1) como

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T W \mathbf{v}$$

onde W é a matriz diagonal $n \times n$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$$

O próximo exemplo generaliza mais um pouco esse tipo de produto interno.

EXEMPLO 3 Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica e positiva definida (veja a Seção 5.6), e sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Mostre que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$$

define um produto interno.

SOLUÇÃO: Verificamos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \mathbf{u}^T A\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ &= A^T\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v}^T A)^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}^T A\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

Além disso,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \mathbf{u}^T A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}^T A\mathbf{v} + \mathbf{u}^T A\mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

e

$$\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (c\mathbf{u})^T A\mathbf{v} = c(\mathbf{u}^T A\mathbf{v}) = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

Finalmente, como A é positiva definida, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}^T A\mathbf{u} > 0$ para todo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, por isso $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}^T A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Isso estabelece a última propriedade. ◈

Para ilustrar o Exemplo 3, considere $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$. Então:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A\mathbf{v} = [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 4u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + 7u_2v_2$$

A matriz A é positiva definida, pelo Teorema 4 da Seção 5.6, visto que seus autovalores são 3 e 8. Portanto, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Vamos, agora, definir alguns produtos internos em espaços vetoriais além de $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLO 4 Em $\mathscr{P}_2$, seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Mostre que

$$\langle p(x), q(x) \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

define um produto interno em $\mathscr{P}_2$. (Por exemplo, se $p(x) = 1 - 5x + 3x^2$ e $q(x) = 6 + 2x - x^2$, então $\langle p(x), q(x) \rangle = 1 \cdot 6 + (-5) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -7$.)

SOLUÇÃO: Como $\mathcal{P}_2$ é isomorfo a $\mathbb{R}^3$, precisamos somente mostrar que o produto escalar em $\mathbb{R}^3$ é um produto interno, o que já estabelecemos.

EXEMPLO 5 Sejam f e g pertencentes a $\mathscr{C}[a, b]$, o espaço vetorial de todas as funções contínuas em um intervalo fechado $[a, b]$. Mostre que

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

define um produto interno em $\mathscr{C}[a, b]$.

SOLUÇÃO: Temos

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g, f\rangle$$

Além disso, se h pertence a $\mathscr{C}[a, b]$, então

$$\begin{aligned}\langle f, g + h\rangle &= \int_a^b f(x)(g(x) + h(x))\,dx\\ &= \int_a^b (f(x)g(x) + f(x)h(x))\,dx\\ &= \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)h(x)\,dx\\ &= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle\end{aligned}$$

Se c é um escalar, então

$$\begin{aligned}\langle cf, g\rangle &= \int_a^b cf(x)g(x)\,dx\\ &= c\int_a^b f(x)g(x)\,dx\\ &= c\langle f, g\rangle\end{aligned}$$

Finalmente, $\langle f, f\rangle = \int_a^b (f(x))^2\,dx \geq 0$, e de acordo com um teorema do cálculo, vemos que, como f é contínua, $\langle f, f\rangle = \int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$ se, e somente se, f é a função nula. Portanto, $\langle f, g\rangle$ é um produto interno em $\mathscr{C}[a, b]$.

O Exemplo 5 também define um produto interno em qualquer *subespaço* de $\mathscr{C}[a, b]$. Por exemplo, podemos nos restringir a polinômios definidos no intervalo $[a, b]$. Consideremos $\mathcal{P}[0, 1]$ o espaço vetorial de todos os polinômios do intervalo $[0, 1]$. Então, usando o produto interno do Exemplo 5, temos

$$\begin{aligned}\langle x^2, 1 + x\rangle &= \int_0^1 x^2(1 + x)\,dx = \int_0^1 (x^2 + x^3)\,dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

Propriedades dos Produtos Internos

O teorema a seguir resume algumas propriedades adicionais que seguem da definição de produto interno.

◆ TEOREMA 1

Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores em um espaço V com produto interno, e seja c um escalar.

a. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
b. $\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
c. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0$

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos a propriedade (a), deixando as demonstrações das propriedades (b) e (c) como Exercícios 23 e 24. Utilizando a definição de produto interno, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle && \text{Por (1)} \\ &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle && \text{Por (2)} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle && \text{Por (1)} \end{aligned}$$

◆

Comprimento, Distância e Ortogonalidade

Em um espaço com produto interno, podemos definir comprimento de um vetor, distância entre vetores e vetores ortogonais como fizemos na Seção 1.3. Simplesmente trocaremos todos os produtos escalares $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ pelo mais geral produto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Definição Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores em um espaço V com produto interno.

1. O ***comprimento*** (ou ***norma***) de $\mathbf{v}$ é $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$.
2. A ***distância*** entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.
3. $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ***ortogonais*** se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Note que $\|\mathbf{v}\|$ está sempre definido, pois $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, pela definição de produto interno, então podemos extrair a raiz quadrada desse valor não negativo. Como em $\mathbb{R}^n$, um vetor de comprimento 1 é chamado de ***vetor unitário***. A ***esfera unitária*** em V é o conjunto S de todos os vetores unitários de V.

EXEMPLO 6 Considere o produto interno em $\mathscr{C}[0, 1]$ dado pelo Exemplo 5. Se $f(x) = x$ e $g(x) = 3x - 2$, calcule

(a) $\|f\|$ (b) (f, g) (c) $\langle f, g \rangle$

SOLUÇÃO: (a) Sabemos que

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

então, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = 1/\sqrt{3}$.

(b) Como $d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\langle f - g, f - g\rangle}$ e

$$f(x) - g(x) = x - (3x - 2) = 2 - 2x = 2(1 - x)$$

temos
$$\langle f - g, f - g\rangle = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\, dx = \int_0^1 4(1 - 2x + x^2)\, dx$$

$$= 4\left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Combinando esses resultados, vemos que $d(f, g) = \sqrt{4/3} = 2/\sqrt{3}$.

(c) Calculamos

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx = \int_0^1 x(3x - 2)\, dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x)\, dx = [x^3 - x^2]_0^1 = 0$$

Portanto, f e g são ortogonais. ◆

É importante lembrar que a "distância" entre f e g, no Exemplo 6, *não* se refere a nenhuma medida relacionada com os gráficos dessas funções. Nem o fato de f e g serem ortogonais significa que seus gráficos se interceptam em ângulos retos. Estamos simplesmente aplicando a definição de um produto interno específico. Contudo, fazendo isso, poderíamos ser guiados pelas correspondentes noções em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, onde o produto interno é o produto escalar. A geometria de espaço euclidiano ainda nos guia até aqui, apesar de não podermos ter uma visualização da mesma forma.

EXEMPLO 7 Usando o produto interno de $\mathbb{R}^2$ definido no Exemplo 2, faça um esboço de uma esfera unitária (círculo).

SOLUÇÃO: Se $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, então $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 2x^2 + 3y^2$. Como a esfera unitária (círculo unitário) consiste em todos os $\mathbf{x}$ tais que $\|\mathbf{x}\| = 1$, temos

$$1 = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \sqrt{2x^2 + 3y^2} \quad \text{ou} \quad 2x^2 + 3y^2 = 1$$

Essa é a equação de uma elipse, e seu gráfico é mostrado na Figura 1.

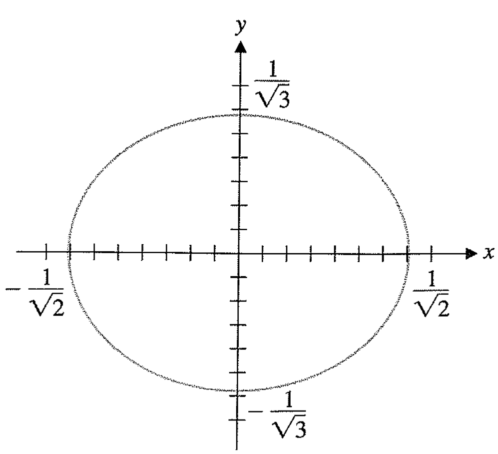

Figura 1 Um círculo unitário que é uma elipse ◆

Discutiremos as propriedades de comprimento, distância e ortogonalidade na próxima seção e nos exercícios. Um resultado que precisaremos nesta seção é a versão generalizada do Teorema de Pitágoras, que estende o Exemplo 10 da Seção 1.3.

◆ **TEOREMA 2 Teorema de Pitágoras**

Sejam **u** e **v** vetores em um espaço V com produto interno. Então, **u** e **v** são ortogonais se, e somente se,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

DEMONSTRAÇÃO: Você provará, no Exercício 32, que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$$

Segue, imediatamente, que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ se, e somente se, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. ◆

Projeções Ortogonais e o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

No Capítulo 5, discutimos a ortogonalidade em $\mathbb{R}^n$. A maior parte dos resultados pode ser generalizada, razoavelmente, para espaços com produtos internos gerais. Por exemplo, um ***conjunto ortogonal*** de vetores em um espaço V com produto interno é um conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de vetores de V tal que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ para $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_j$. Um ***conjunto ortonormal*** de vetores é, então, um conjunto ortogonal de vetores *unitários*. Uma ***base ortogonal*** de um subespaço W de V é somente uma base de W que é um conjunto ortogonal; analogamente, uma ***base ortonormal*** de um subespaço W de V é uma base de W que é um conjunto ortonormal.

Em $\mathbb{R}^n$, o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt (Teorema 1 da Seção 5.4) mostra que todo subespaço possui uma base ortogonal. Podemos copiar a construção do Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt para mostrar que todo subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno possui uma base ortogonal — tudo que precisa ser feito é trocar o produto escalar pelo mais geral produto interno. Vamos ilustrar com um exemplo. (Compare as passagens aqui com as do Exemplo 2 da Seção 5.4.)

EXEMPLO 8 Construa uma base ortogonal para $\mathscr{P}_2$ com relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$$

aplicando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt para a base $\{1, x, x^2\}$.

SOLUÇÃO: Sejam $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = x$ e $\mathbf{x}_3 = x^2$. Começamos definindo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 = 1$. Em seguida, calculamos

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} dx = x\Big]_{-1}^{1} = 2 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = 0$$

Portanto,

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 = x - \frac{0}{2}(1) = x$$

Para acharmos $\mathbf{v}_3$, primeiro calculamos

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_3 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}, \qquad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x}_3 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\bigg]_{-1}^{1} = 0,$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

Então

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}\mathbf{v}_2 = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2}(1) - \frac{0}{\frac{2}{3}}x = x^2 - \frac{1}{3}$$

Segue que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base ortogonal para $\mathscr{P}_2$ no intervalo $[-1, 1]$. Os polinômios

$$1, \quad x, \quad x^2 - \tfrac{1}{3}$$

são os três primeiros ***polinômios de Legendre***. Se dividirmos cada um desses polinômios por seu comprimento em relação ao mesmo produto interno, obteremos os ***polinômios de Legendre normalizados*** (veja o Exercício 41). ◆

Adrien Marie Legendre (1752–1833) foi um matemático francês que trabalhou com astronomia, teoria de números e funções elípticas. Envolveu-se em muitas discussões calorosas com Gauss. Em 1765, Legendre fez a primeira publicação sobre a lei da reciprocidade quadrática em teoria de números. Entretanto, Gauss fez a primeira demonstração rigorosa desse resultado em 1801, reivindicando créditos por ele e provocando uma compreensível mágoa por parte de Legendre. Então, em 1806, Legendre foi o primeiro a publicar aplicações do método de mínimos quadrados em um livro sobre órbitas dos cometas. Gauss publicou sobre o mesmo assunto em 1809, mas alegou que usava o método desde 1795, mais uma vez enfurecendo Legendre.

Como fizemos na Seção 5.3, podemos definir a ***projeção ortogonal*** $\text{proj}_W(\mathbf{v})$ de um vetor $\mathbf{v}$ no subespaço W de um espaço com produto interno. Se $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é uma base ortogonal de W, então

$$\text{proj}_W(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle}\mathbf{u}_k$$

Então, a ***componente ortogonal de* v *em* W** é o vetor

$$\text{perp}_W(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v})$$

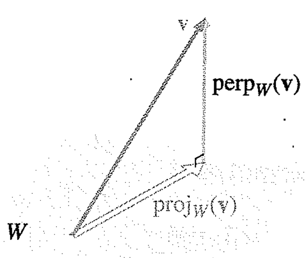

Figura 2

Como no Teorema da Decomposição Ortogonal (Teorema 3 da Seção 5.3), $\text{proj}_W(\mathbf{v})$ e $\text{perp}_W(\mathbf{v})$ são ortogonais (veja o Exercício 43), e temos a situação ilustrada na Figura 2.

Usaremos essas fórmulas nas Seções 7.4 e 7.6, quando consideraremos problemas de aproximação — em particular, o problema de como aproximar da melhor forma uma dada função por funções "boas". Conseqüentemente, deixaremos para dar exemplos naquelas seções, quando eles farão mais sentido. Nosso uso imediato para projeções ortogonais será para demonstrar uma desigualdade que primeiro encontramos no Capítulo 1.

As Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Triangular

As demonstrações das igualdades e desigualdades que envolvem o produto escalar em $\mathbb{R}^n$ são facilmente adaptadas para dar resultados correspondentes em espaços com produto interno geral. Algumas delas são vistas nos Exercícios de 31 a 36. Na Seção 1.3, enunciamos, sem demonstrar, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, que é importante em muitos ramos da matemática. Vamos agora dar uma demonstração desse resultado.

Essa desigualdade foi descoberta por vários matemáticos, em diferentes contextos. Não é de surpreender que o nome de Cauchy esteja relacionado a isso. O segundo nome associado a esse resultado é o de Karl Herman Amandus Schwarz (1843–1921), matemático alemão que lecionou na Universidade de Berlim. Sua versão da desigualdade, que leva seu nome, foi publicada em 1885 em um artigo que usava equações integrais para estudar superfícies de área mínima. Um terceiro nome também associado a esse importante resultado é o do matemático russo Viktor Yakovlevitch Bunyakovsky (1804–1889). Bunyakovsky publicou a desigualdade em 1859, um quarto de século antes do trabalho de Schwarz no mesmo assunto. Assim, seria mais apropriada a referência ao resultado como Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

◆ **TEOREMA 3 A Desigualdade de Cauchy-Schwarz**

Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores em um espaço V com produto interno. Então:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são múltiplos escalares um do outro.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, a desigualdade é na verdade uma igualdade, visto que

$$|\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}\rangle| = 0 = \|\mathbf{0}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, então seja W um subespaço de V gerado por $\mathbf{u}$. Como $\text{proj}_W(\mathbf{v}) = \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}$ e $\text{perp}_W\,\mathbf{v} = \mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v})$ são ortogonais, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para obter

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2 &= \|\text{proj}_W(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v}))\|^2 = \|\text{proj}_W(\mathbf{v}) + \text{perp}_W(\mathbf{v})\|^2 \\ &= \|\text{proj}_W(\mathbf{v})\|^2 + \|\text{perp}_W(\mathbf{v})\|^2\end{aligned} \tag{2}$$

Segue que $\|\text{proj}_W(\mathbf{v})\|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2$. Agora,

$$\|\text{proj}_W(\mathbf{v})\|^2 = \left\langle \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}, \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} \right\rangle = \left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\right)^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

por isso temos

$$\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \le \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 \le \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$$

Extraindo-se as raízes quadradas, obtemos $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$.

Claramente, essa última desigualdade é uma igualdade se, e somente se, $\|\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2$. Pela equação (2), isso é verdadeiro se, e somente se, $\mathrm{perp}_W(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, ou, equivalentemente,

$$\mathbf{v} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}$$

Sendo esse o caso, $\mathbf{v}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{u}$. Reciprocamente, se $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$, então

$$\mathrm{perp}_W(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathrm{proj}_W(\mathbf{v}) = c\mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, c\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} = c\mathbf{u} - \frac{c\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Portanto, a igualdade vale na Desigualdade de Cauchy-Schwarz. ◆

Para uma demonstração alternativa dessa desigualdade, veja o Exercício 44. Vamos analisar algumas conseqüências interessantes da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdades relacionadas em Investigação: Desigualdades Geométricas e Problemas de Otimização, após esta seção. Por enquanto, ela será usada para demonstrar uma versão generalizada da Desigualdade Triangular (Teorema 4 da Seção 1.3).

◆ TEOREMA 4 A Desigualdade Triangular

Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores em um espaço V com produto interno. Então:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

DEMONSTRAÇÃO: A partir da igualdade proposta no Exercício 32, temos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \qquad \text{por Cauchy-Schwarz} \\
&= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2
\end{aligned}$$

Extraindo-se as raízes quadradas, obtemos o resultado. ◆

◆ EXERCÍCIOS 7.2 ◆

Nos Exercícios 1 e 2, considere $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. *Calcule*

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ *(b)* $\|\mathbf{u}\|$ *(c)* $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ é o produto interno do Exemplo 2.

2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ é o produto interno do Exemplo 3 com $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

3. No Exercício 1, encontre um vetor não nulo ortogonal a $\mathbf{u}$.

4. No Exercício 2, encontre um vetor não nulo ortogonal a $\mathbf{u}$.

Nos Exercícios 5 e 6, considere $p(x) = 2 - 3x + x^2$ *e* $q(x) = 1 - 3x^2$. *Calcule*

(a) $\langle p(x), q(x)\rangle$ *(b)* $\|p(x)\|$ *(c)* $d(p(x), q(x))$

5. $\langle p(x), q(x)\rangle$ é o produto interno do Exemplo 4.

6. $\langle p(x), q(x)\rangle$ é o produto interno do Exemplo 5 no espaço vetorial $\mathscr{P}_2[0, 1]$.

7. No Exercício 5, encontre um vetor não nulo ortogonal a $p(x)$.

8. No Exercício 6, encontre um vetor não nulo ortogonal a $p(x)$.

Nos Exercícios 9 e 10, considere $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(x) + cos(x)$ no espaço vetorial $\mathscr{C}[0, 2\pi]$.

9. Calcule
(a) $\langle f, g\rangle$ (b) $\|f\|$ (c) $d(f, g)$

10. Encontre um vetor não nulo ortogonal a f.

11. Sejam a, b e c números reais distintos. Mostre que

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)$$

define um produto interno em $\mathscr{P}_2$. (*Sugestão*: você precisará usar o fato de que um polinômio de grau n tem no máximo n raízes. Veja o Apêndice D.)

12. Refaça o Exercício 5 usando o produto interno do Exercício 11, com $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$.

Nos Exercícios de 13 a 18, determine qual dos quatro axiomas de produto interno não é verdadeiro. Dê um exemplo em cada caso.

13. Sejam $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$. Defina $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1$.

14. Sejam $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$. Defina $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 - u_2v_2$.

15. Sejam $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^n$. Defina $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_2 + u_2v_1$.

16. Em $\mathscr{P}_2$, defina $\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0)$.

17. Em $\mathscr{P}_2$, defina $\langle p(x), q(x)\rangle = p(1)q(1)$.

18. Em M_{22}, defina $\langle A, B\rangle = \det(AB)$.

Nos Exercícios 19 e 20, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, onde $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Encontre uma matriz simétrica A tal que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^T A\mathbf{v}$.

19. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 4u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2$

20. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 5u_2v_2$

Nos Exercícios 21 e 22, esboce o círculo unitário em $\mathbb{R}^2$ para o produto interno dado, onde $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

21. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + \frac{1}{4}u_2v_2$

22. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 4u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2$

23. Demonstre o Teorema 1(b).

24. Demonstre o Teorema 1(c).

Nos Exercícios de 25 a 29, suponha que **u**, **v** *e* **w** *sejam vetores em um espaço com produto interno tal que*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 1, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = 5, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$$

$$\|\mathbf{u}\| = 1, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{w}\| = 2$$

Avalie as expressões nos Exercícios de 25 a 28.

25. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}\rangle$

26. $\langle 2\mathbf{v} - \mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 2\mathbf{w}\rangle$

27. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

28. $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

29. Mostre que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$. (*Sugestão*: como você pode usar as propriedades de produto interno para verificar que $\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$?)

30. Mostre que, em um espaço com produto interno, não podem existir vetores unitários **u** e **v** com $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle < -1$.

Nos Exercícios de 31 a 36, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ é um produto interno. Nos Exercícios de 31 a 34, mostre que as afirmações são verdadeiras.

31. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$

32. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2$

33. $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$

34. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$

35. Mostre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ se, e somente se, **u** e **v** são ortogonais.

36. Mostre que $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2}$ se, e somente se, **u** e **v** são ortogonais.

Nos Exercícios de 37 a 40, aplique o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt na base $\mathcal{B}$ para obter uma base ortogonal para o espaço V, com produto interno, relativa ao produto interno dado.

37. $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, com o produto interno do Exemplo 2.

38. $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, com o produto interno do Exemplo 3.

39. $V = \mathcal{P}_2, \mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$, com o produto interno do Exemplo 4.

40. $V = \mathcal{P}_2[0, 1], \mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$, com o produto interno do Exemplo 5.

41. (a) Calcule os três primeiros polinômios de Legendre normalizados. (Veja o Exemplo 8.)
(b) Use o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar o quarto polinômio de Legendre normalizado.

42. Se multiplicarmos o polinômio de Legendre de grau n por um escalar apropriado, podemos obter um polinômio $L_n(x)$ tal que $L_n(1) = 1$.
(a) Encontre $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ e $L_3(x)$.
(b) Podemos mostrar que $L_n(x)$ satisfaz a relação de recorrência

$$L_n(x) = \frac{2n - 1}{n} L_{n-1}(x) - \frac{n - 1}{n} L_{n-2}(x)$$

para todo $n \geq 2$. Verifique essa recorrência para $L_2(x)$ e $L_3(x)$. Depois, utilize-os para calcular $L_4(x)$ e $L_5(x)$.

43. Verifique que, se W é um subespaço de um espaço V com produto interno e $\mathbf{v}$ pertence a V, então $\text{perp}_W(\mathbf{v})$ é ortogonal a todo $\mathbf{w}$ em W.

44. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores em um espaço V com produto interno. Demonstre a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, conforme a seguir:
(a) Seja t um escalar real. Então, $\langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \geq 0$ para todos os valores de t. Expanda essa inequação para obter uma inequação quadrática da forma

$$at^2 + bt + c \geq 0$$

Quem são a, b e c?

(b) Use seus conhecimentos sobre equações quadráticas e seus gráficos para obter uma condição sobre a, b e c para a qual a inequação na parte (a) é verdadeira.
(c) Mostre que, em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, sua condição na parte (b) é equivalente à Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Um produto interno em um espaço vetorial complexo satisfaz as mesmas condições de um produto interno real, com uma exceção: a propriedade (1), da definição de produto interno, deve ser mudada para:

$$1'. \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} \quad \textit{para todo} \quad \mathbf{u} \ \textit{e} \ \mathbf{v}$$

com a barra denotando o complexo conjugado.

45. Sejam $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ em $\mathbb{C}^n$. Mostre que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1\bar{v}_1 + \cdots + u_n\bar{v}_n$$

define um produto interno complexo, verificando as propriedades 1′, 2, 3 e 4 da definição. (Esse é o análogo complexo do produto escalar.)

46. Seja $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ definido em $\mathbb{C}^2$ como no Exercício 45. Sejam $\begin{bmatrix} 1 + i \\ -i \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 - 3i \\ 1 + 5i \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

(b) Calcule $\|\mathbf{u}\|$.

(c) Calcule $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

(d) Encontre um vetor não nulo ortogonal a $\mathbf{u}$.