Um código com a propriedade $C^{\perp} = C$ é chamado ***autodual***. Podemos verificar que o código do Exemplo 4 é autodual, mostrando que todo vetor em C é ortogonal a todos os vetores de C, incluindo ele mesmo. (Faça isso.)

Você deve ter notado que, no código autodual do Exemplo 4, todo vetor em C tem um número *par* de 1s. Provaremos que isso é verdade para todo código autodual. A definição a seguir é útil.

Definição: Seja $\mathbf{x}$ um vetor em $\mathbb{Z}_2^n$. O ***peso*** de $\mathbf{x}$, denotado por $w(\mathbf{x})$, é o número de 1s em $\mathbf{x}$.

Por exemplo, $w([1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1]^T) = 4$. Se pensarmos por um instante que $\mathbf{x}$ é um vetor em $\mathbb{R}^n$, poderemos dar as seguintes descrições alternativas de $w(\mathbf{x})$. Seja $\mathbf{1}$ o vetor (com o mesmo comprimento que $\mathbf{x}$) com todas as componentes iguais a 1. Então, $w(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{1}$ e $w(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$. Podemos provar os fatos interessantes a seguir sobre códigos autoduais.

◆ TEOREMA 2

Se C é um código dual, então

a. Todo vetor em C tem peso par.
b. $\mathbf{1}$ está em C.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Um vetor $\mathbf{x}$ em $\mathbb{Z}_2^n$ tem peso par se, e somente se, $w(\mathbf{x}) = 0$ em $\mathbb{Z}_2$. Mas

$$w(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$$

pois C é autodual.

(b) Usando a propriedade (a), temos que $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = w(\mathbf{x}) = 0$ em $\mathbb{Z}_2$ para todo $\mathbf{x}$ em C. Isso significa que $\mathbf{1}$ é ortogonal a todo vetor em C, por isso $\mathbf{1}$ está em $C^{\perp} = C$, como queríamos. ◆

Formas Quadráticas

Uma expressão da forma

$$ax^2 + by^2 + cxy$$

é chamada de ***forma quadrática*** em $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Analogamente,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

é uma forma quadrática em x, y e z. Em palavras, uma forma quadrática é uma soma de termos, cada qual com grau total igual a *dois* nas variáveis. Assim, $5x^2 - 3y^2 + 2xy$ é uma forma quadrática, enquanto $x^2 + y^2 + x$ não é.

Podemos representar formas quadráticas usando matrizes:

$$ax^2 + by^2 + cxy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = [x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(Verifique isso.) Cada uma tem a forma $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, onde a matriz A é simétrica. Essa observação nos leva à seguinte definição geral:

Definição Uma ***forma quadrática*** em n variáveis é uma função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ da forma

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

onde A é uma matriz simétrica $n \times n$ e $\mathbf{x}$ está em $\mathbb{R}^n$. A matriz A é a ***matriz associada a f.***

EXEMPLO 5 Qual é a forma quadrática com a matriz associada $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$?

SOLUÇÃO: Se $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, então

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2$$

Observe que os elementos *fora da diagonal* $a_{12} = a_{21} = -3$ aparecem multiplicados por 2 para dar o coeficiente -6 de x_1x_2. Isso é verdade em geral. Podemos expandir a forma quadrática em n variáveis $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, como a seguir:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j$$

Logo, se $i \neq j$, o coeficiente de x_ix_j é $2a_{ij}$.

EXEMPLO 6 Encontre a matriz associada à forma quadrática

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 - 3x_1x_3$$

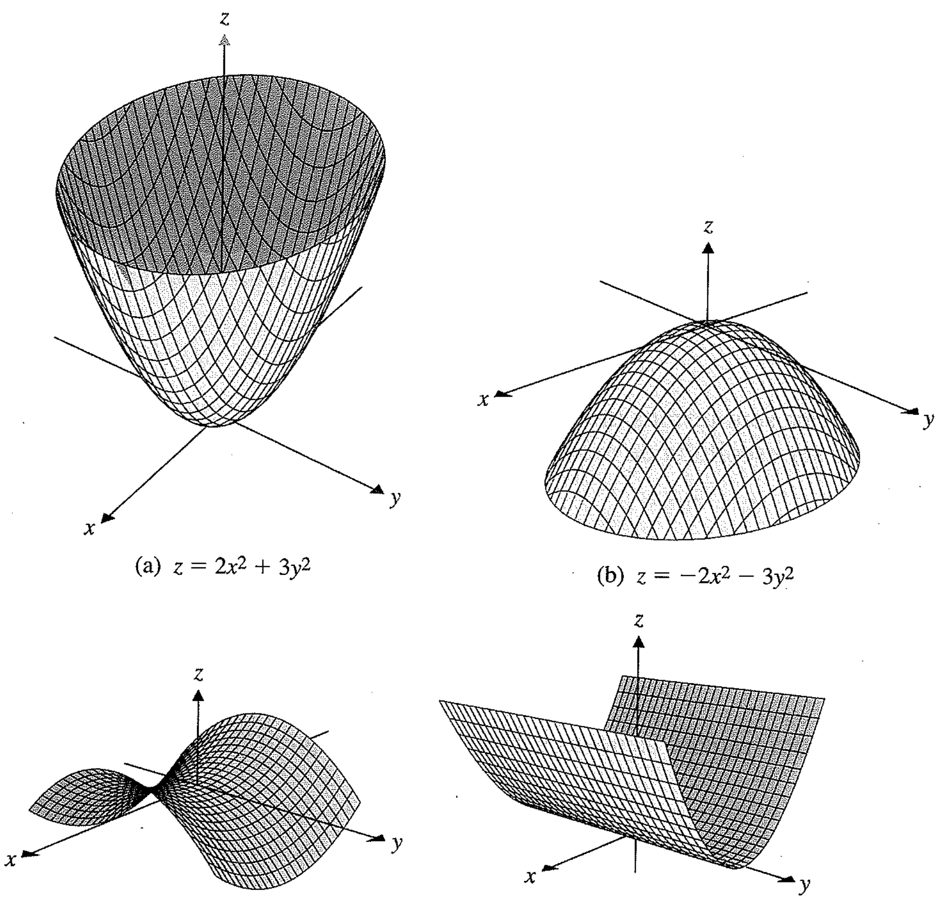
SOLUÇÃO: Os coeficientes dos termos em x_i^2 vão para a diagonal como a_{ii}, e os coeficientes dos produtos mistos x_ix_j são divididos em a_{ij} e a_{ji}. Isso fornece

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

portanto,

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 2 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

como você pode verificar facilmente.



(a) $z = 2x^2 + 3y^2$

(b) $z = -2x^2 - 3y^2$

(c) $z = 2x^2 - 3y^2$

(d) $z = 2x^2$

Figura 1 Gráficos das formas quadráticas $f(x, y)$

No caso da forma quadrática $f(x,y)$ em duas variáveis, o gráfico de $z = f(x, y)$ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Alguns exemplos são mostrados na Figura 1.

Observe que o efeito de manter x ou y constante é tomar secções transversais do gráfico por planos paralelos aos planos yz ou xz, respectivamente. Para os gráficos da Figura 1, todas essas secções transversais são fáceis de identificar. Por exemplo, na Figura 1(a), as secções transversais que obtemos mantendo x ou y constante são parábolas que se abrem para cima, assim, $f(x, y) \geq 0$ para todos os valores de x e y. Na Figura 1(c), mantendo x constante, obtemos parábolas que se abrem para baixo, e mantendo y constante, obtemos parábolas que se abrem para cima, produzindo um *ponto de sela.*

O que faz esse tipo de análise ser muito fácil é que essas formas quadráticas não têm termos mistos. A matriz associada a uma forma quadrática dessas é uma matriz diagonal. Por exemplo,

$$2x^2 - 3y^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Em geral, a matriz de uma forma quadrática é uma matriz simétrica, e, como vimos na Seção 5.5, essas matrizes podem sempre ser diagonalizáveis. Usaremos agora esse fato para mostrar que, em *toda* forma quadrática, podemos eliminar os termos mistos por intermédio de uma mudança de variáveis.

Seja $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ uma forma quadrática em n variáveis, sendo A uma matriz simétrica $n \times n$. Pelo Teorema Espectral, existe uma matriz ortogonal Q que diagonaliza A — isto é, $Q^T AQ = D$, onde D é diagonal com os autovalores de A na diagonal. Agora, consideramos

$$\mathbf{x} = Q\mathbf{y} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \mathbf{y} = Q^{-1}\mathbf{x} = Q^T\mathbf{x}$$

A substituição na forma quadrática implica que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= (Q\mathbf{y})^T A(Q\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}^T Q^T AQ\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T D\mathbf{y} \end{aligned}$$

que é uma forma quadrática sem termos mistos, pois D é diagonal. Além disso, se os autovalores de A são $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, então Q pode ser escolhida de modo que

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Se $\mathbf{y} = [y_1 \ \ldots \ y_n]^T$, então, com respeito às novas variáveis, a forma quadrática passa a ser

$$\mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Esse processo é chamado de ***diagonalização de formas quadráticas***. Acabamos de provar o teorema seguinte, conhecido como ***Teorema dos Eixos Principais***. (A razão para esse nome ficará clara na próxima subseção.)

◆ **TEOREMA 3** **O Teorema dos Eixos Principais**

Toda forma quadrática pode ser diagonalizada. Especificamente, se A é a matriz $n \times n$ associada à forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ e se Q é uma matriz ortogonal que faz $Q^T AQ = D$ ser uma matriz diagonal, então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ transforma a forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ em $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$, que não tem termos mistos. Se os autovalores de A são $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e se $\mathbf{y} = [y_1 \ \ldots \ y_n]^T$,

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

EXEMPLO 7 Encontre uma mudança de variáveis que transforme a forma quadrática

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

em uma sem termos mistos.

SOLUÇÃO: A matriz de f é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

com autovalores $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$. Os autovetores correspondentes são

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

(Verifique isso.) Se colocarmos

$$Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então $Q^TAQ = D$. A mudança de variáveis $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

transforma f em

$$f(\mathbf{y}) = f(y_1, y_2) = [y_1 \quad y_2]\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 6y_1^2 + y_2^2$$

A forma quadrática original $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ e a nova $\mathbf{y}^TD\mathbf{y}$ (do Teorema dos Eixos Principais) são *iguais* no seguinte sentido: no Exemplo 7, suponha que queiramos calcular $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ em $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Temos

$$f(-1, 3) = 5(-1)^2 + 4(-1)(3) + 2(3)^2 = 11$$

Em termos das novas variáveis,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{y} = Q^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -7/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$f(y_1, y_2) = 6y_1^2 + y_2^2 = 6(1/\sqrt{5})^2 + (-7/\sqrt{5})^2 = 55/5 = 11$$

exatamente como antes.

O Teorema dos Eixos Principais tem algumas conseqüências interessantes e importantes. Consideraremos duas delas. A primeira relata os possíveis *valores* que uma forma quadrática pode assumir.

Definição Uma forma quadrática $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ é classificada como uma das seguintes:

1. ***Positiva definida*** se $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
2. ***Positiva semidefinida*** se $f(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$.
3. ***Negativa definida*** se $f(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
4. ***Negativa semidefinida*** se $f(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x}$.
5. ***Indefinida*** se $f(\mathbf{x})$ assume tanto valores positivos quanto negativos.

Uma matriz simétrica A é chamada de ***positiva definida***, ***positiva semidefinida***, ***negativa definida***, ***negativa semidefinida*** ou ***indefinida*** se a forma quadrática $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ tem a propriedade correspondente.

As formas quadráticas (a), (b), (c) e (d) da Figura 1 são, respectivamente, positiva definida, negativa definida, indefinida e positiva semidefinida. O Teorema dos Eixos Principais torna fácil dizer quando uma forma quadrática tem uma dessas propriedades.

◆ TEOREMA 4

Seja A uma matriz simétrica $n \times n$. A forma quadrática $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é

a. Positiva definida se, e somente se, todos os autovalores de A são positivos.
b. Positiva semidefinida se, e somente se, todos os autovalores de A são não negativos.
c. Negativa definida se, e somente se, todos os autovalores de A são negativos.
d. Negativa semidefinida se, e somente se, todos os autovalores de A são não positivos.
e. Indefinida se, e somente se, A tem autovalores positivos e negativos.

No Exercício 49, pediremos que você prove o Teorema 4.

EXEMPLO 8 Classifique $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ como positiva definida, negativa definida, indefinida ou nenhuma delas.

SOLUÇÃO: A matriz associada a f é

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

que tem autovalores 1, 4 e 4. Como todos os autovalores são positivos, f é uma forma quadrática positiva definida. ◆

Se uma forma quadrática $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é positiva definida, então, como $f(\mathbf{0}) = 0$, o valor *mínimo* de $f(\mathbf{x})$ é 0, e ele ocorre na origem. Analogamente, uma forma quadrática negativa definida tem um máximo na origem. Então, o Teorema 4 nos permite resolver certos tipos de problema de máximos e mínimos facilmente, sem usar os recursos do cálculo. Um tipo de problema que cai nessa categoria é o ***problema de otimização condicionado***.

Muitas vezes, é importante conhecer os valores máximos ou mínimos de uma forma quadrática sujeitos a certas condições. (Esses problemas aparecem não somente em matemática, mas também em estatística, física, engenharia e economia.) Estaremos interessados em encontrar os valores extremos de $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ sujeitos à condição $\|\mathbf{x}\| = 1$. No caso de uma forma quadrática em duas variáveis, podemos visualizar o significado do problema. O gráfico de $z = f(x, y)$ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$, e a condição $\|\mathbf{x}\| = 1$ restringe o ponto (x, y) ao círculo unitário no plano xy. Então, consideramos os pontos que estão simultaneamente na superfície e no cilindro unitário perpendicular ao plano xy. Esses pontos formam uma curva na superfície, e queremos o ponto mais alto e o mais baixo dessa curva. A Figura 2 mostra essa situação para a forma quadrática e a superfície correspondente na Figura 1(c).

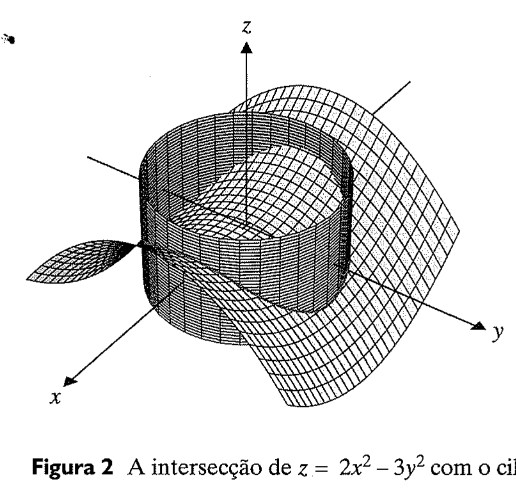


Figura 2 A intersecção de $z = 2x^2 - 3y^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Neste caso, os valores máximo e mínimo de $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$ (os pontos mais alto e mais baixo da curva de intersecção) são 2 e –3, respectivamente, que são exatamente os autovalores da matriz associada. O Teorema 5 mostra que esse é sempre o caso.

◆ TEOREMA 5

Seja $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ uma forma quadrática cuja matriz $n\times n$ associada é A. Sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ os autovalores de A. Então, sujeitas à restrição $\|\mathbf{x}\| = 1$, as afirmações seguintes são verdadeiras.

a. $\lambda_1 \geq f(\mathbf{x}) \geq \lambda_n$
b. O valor máximo de $f(\mathbf{x})$ é λ_1, e ele ocorre quando $\mathbf{x}$ é um autovetor unitário correspondente a λ_1.
c. O valor mínimo de $f(\mathbf{x})$ é λ_n, e ele ocorre quando $\mathbf{x}$ é um autovetor unitário correspondente a λ_n.

DEMONSTRAÇÃO: Como sempre, começamos diagonalizando ortogonalmente a matriz A. Obtemos uma matriz ortogonal Q tal que $Q^T AQ$ é a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Então, pelo Teorema dos Eixos Principais, a mudança de variável $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ fornece $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$. Note que $\mathbf{y} = Q^T\mathbf{x}$ implica que

$$\mathbf{y}^T\mathbf{y} = (Q^T\mathbf{x})^T(Q^T\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(Q^T)^T Q^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T QQ^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$$

pois $Q^T = Q^{-1}$. Logo, usando $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$, vemos que $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{y}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\| = 1$. Então, se $\mathbf{x}$ é um vetor unitário, também o é o vetor correspondente $\mathbf{y}$, e os valores $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ são os mesmos.
(a) Para provar a propriedade (a), observamos que, se $\mathbf{y} = [y_1 \ldots y_n]^T$, então

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\ &\leq \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_1 y_n^2 \\ &= \lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \\ &= \lambda_1\|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \lambda_1 \end{aligned}$$

Logo, $f(\mathbf{x}) \leq \lambda_1$ para todo $\mathbf{x}$ tal que $\|\mathbf{x}\| = 1$. A demonstração de que $f(\mathbf{x}) \geq \lambda_n$ é análoga. (Veja o Exercício 59.)

(b) Se $\mathbf{q}_1$ é um autovetor unitário correspondente a λ_1, $A\mathbf{q}_1 = \lambda_1\mathbf{q}_1$ e

$$f(\mathbf{q}_1) = \mathbf{q}_1^T A\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1^T\lambda_1\mathbf{q}_1 = \lambda_1(\mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_1) = \lambda_1$$

Isso mostra que a forma quadrática realmente assume o valor λ_1. Pela propriedade (a), ele é o valor máximo de $f(\mathbf{x})$, e ocorre quando $\mathbf{x} = \mathbf{q}_1$.

(c) No Exercício 60, pediremos que você prove essa propriedade. ◆

EXEMPLO 9 Encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$, sujeitos à condição $x_1^2 + x_2^2 = 1$, e determine os valores de x_1 e x_2 nos quais eles ocorrem.

SOLUÇÃO: No Exemplo 7, vimos que f tem como autovalores associados $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$, com autovetores unitários correspondentes

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente, o valor máximo de f é 6 quando $x_1 = 2/\sqrt{5}$ e $x_2 = 1/\sqrt{5}$. O valor mínimo de f é 1 quando $x_1 = 1/\sqrt{5}$ e $x_2 = -2/\sqrt{5}$. (Observe que esses valores extremos ocorrem duas vezes — em direções opostas —, já que $-\mathbf{q}_1$ e $-\mathbf{q}_2$ também são autovalores unitários para λ_1 e λ_2, respectivamente.) ◈

Esboçando Gráficos de Equações Quadráticas

A forma geral de uma equação quadrática em x e y é

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

onde pelo menos a, b ou c é não nulo. Os gráficos dessas equações quadráticas são chamados de ***secções cônicas*** (ou ***cônicas***), pois podem ser obtidos tomando-se secções transversais de um cone (duplo), isto é, cortando-o com um plano. Os exemplos mais importantes de secções cônicas são elipses (com círculos como casos particulares), hipérboles e parábolas. Estas são chamadas de cônicas ***não degeneradas***. A Figura 3 mostra como elas surgem.

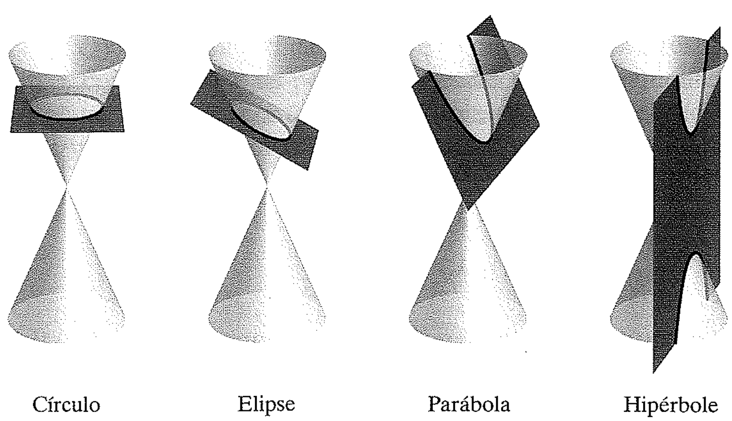


Figura 3 As cônicas não degeneradas

Também é possível que uma secção transversal de um cone dê como resultado um único ponto, uma linha reta ou um par de retas. Estas são chamadas de cônicas ***degeneradas***. (Veja os Exercícios de 81 a 86.) Diz-se que o gráfico de uma cônica não degenerada está na ***posição padrão***, em relação aos eixos coordenados, se sua equação pode ser expressa em uma das formas na Figura 4.

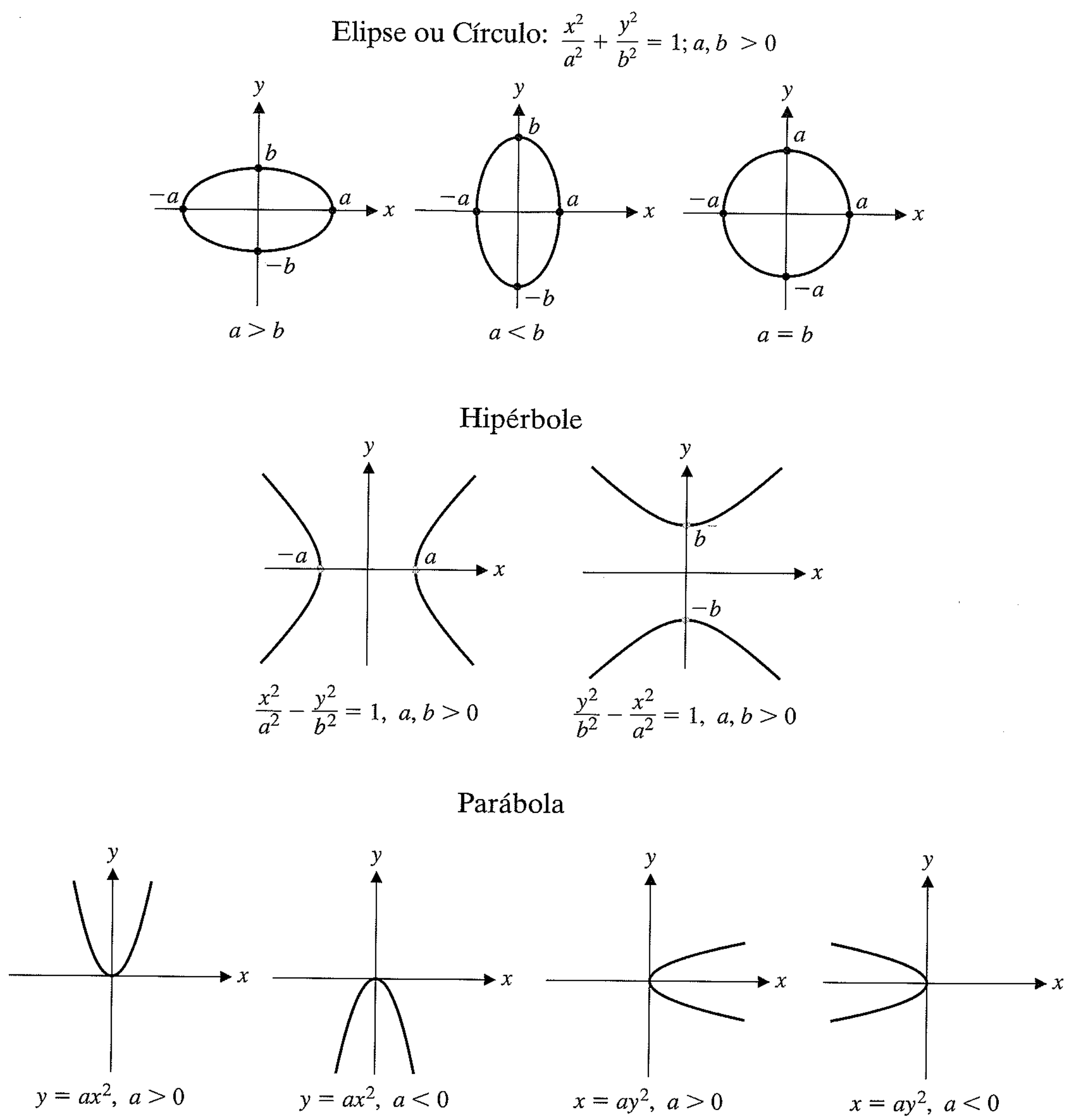


Figura 4 As cônicas não degeneradas na posição padrão

EXEMPLO 10 Se possível, escreva cada uma das seguintes equações quadráticas na forma de uma cônica na posição padrão e identifique o gráfico resultante.

(a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ (b) $4x^2 - 9y^2 + 1 = 0$ (c) $4x^2 - 9y = 0$

SOLUÇÃO: (a) A equação $4x^2 + 9y^2 = 36$ pode ser escrita na forma

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Seu gráfico, portanto, é uma elipse que corta o eixo x em $(\pm 3, 0)$ e o eixo y em $(\pm 2, 0)$.

(b) A equação $4x^2 - 9y^2 + 1 = 0$ pode ser escrita na forma

$$\frac{y^2}{\frac{1}{9}} - \frac{x^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Seu gráfico, portanto, é uma hipérbole, abrindo-se para cima e para baixo e cortando o eixo y em $(0, \pm\frac{1}{3})$.

(c) A equação $4x^2 - 9y = 0$ pode ser escrita na forma

$$y = \frac{4}{9}x^2$$

Seu gráfico é uma parábola que se abre para baixo. ◆

Se uma equação quadrática contém termos demais para que possa ser escrita em uma das formas da Figura 4, seu gráfico não está na posição padrão. Quando existem termos adicionais, mas nenhum termo em xy, o gráfico da cônica está *transladado* da posição padrão.

EXEMPLO 11 Identifique e esboce o gráfico da cônica cuja equação é

$$x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$$

SOLUÇÃO: Começamos agrupando os termos em x e y separadamente, para obter

$$(x^2 - 6x) + (2y^2 + 8y) = -9$$

ou

$$(x^2 - 6x) + 2(y^2 + 4y) = -9$$

Em seguida, completamos os quadrados nas duas expressões entre parênteses para obter

$$(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 + 4y + 4) = -9 + 9 + 8$$

ou

$$(x - 3)^2 + 2(y + 2)^2 = 8$$

Agora, fazendo as substituições $x' = x - 3$ e $y' = y + 2$, a equação anterior passa a ser

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 8 \quad \text{ou} \quad \frac{(x')^2}{8} + \frac{(y')^2}{4} = 1$$

Essa é a equação de uma elipse na posição padrão no sistema de coordenadas $x'y'$, cortando o eixo x' em $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ e o eixo y' em $(0, \pm 2)$. A origem do sistema de coordenadas $x'y'$ está em $x = 3$ e $y = -2$, por isso a elipse foi transladada da posição padrão em 3 unidades para a direita e 2 duas unidades para baixo. Seu gráfico é mostrado na Figura 5.

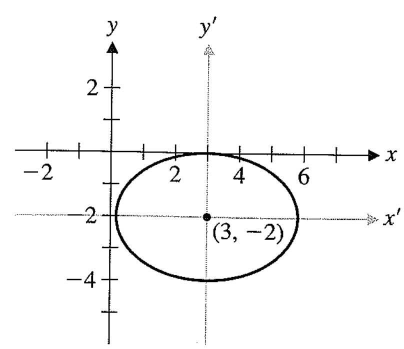


Figura 5 Uma elipse transladada

◆

Se uma equação quadrática contém um termo com produto misto, ela representa uma cônica que foi *rotacionada*.

EXEMPLO 12 Identifique e esboce o gráfico da cônica cuja equação é

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6$$

SOLUÇÃO: O lado esquerdo da equação é uma forma quadrática, por isso podemos escrevê-la na forma $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 6$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

No Exemplo 7, encontramos os autovalores de A, 6 e 1, e a matriz Q que diagonaliza A ortogonalmente,

$$Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Observe que det $Q = -1$. Neste exemplo, permutaremos as colunas dessa matriz para fazer com que o determinante seja +1. Então, Q será a matriz de uma *rotação*, pelo Exercício 28 da Seção 5.2. É sempre possível reordenar as colunas de uma matriz ortogonal Q para fazer com que seu determinante seja 1. (Por quê?) Fazemos

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = D$$

A mudança de variáveis $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$ transforma a equação dada em $(\mathbf{x}')^T D\mathbf{x}' = 6$, por meio de uma rotação. Se $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, essa equação é

$$(x')^2 + 6(y')^2 = 6 \quad \text{ou} \quad \frac{(x')^2}{6} + (y')^2 = 1$$

que representa uma elipse no sistema de coordenadas $x'y'$.

Para esboçar o gráfico dessa elipse, precisamos saber quais vetores fazem os papéis de $\mathbf{e}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e de $\mathbf{e}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ no novo sistema de coordenadas. (Esses dois vetores localizam as posições dos eixos x' e y'.) Mas, de $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$, temos

$$Q\mathbf{e}_1' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

e

$$Q\mathbf{e}_2' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

São essas, precisamente, as colunas $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ de Q, que são os autovetores de A! O fato de que esses são vetores ortogonais se encaixa perfeitamente com o fato de que a mudança de variáveis é exatamente uma rotação. O gráfico é mostrado na Figura 6.

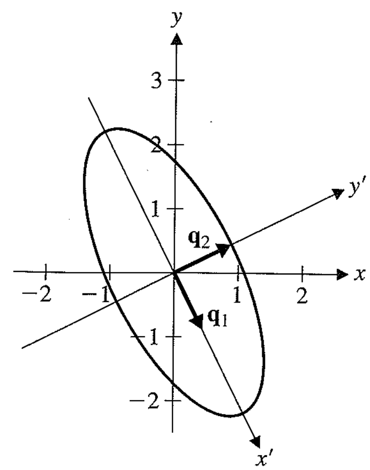


Figura 6 Uma elipse rotacionada

Você agora pode ver de onde vem o nome Teorema dos Eixos Principais. Se uma matriz real simétrica A surge como a matriz de coeficientes de uma equação quadrática, os autovetores de A dão as direções dos eixos principais do gráfico correspondente.

É possível que o gráfico de uma cônica seja transladado e rotacionado da posição padrão, como está ilustrado no Exemplo 13.

EXEMPLO 13 Identifique e esboce o gráfico da cônica cuja equação é

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - \frac{28}{\sqrt{5}}x - \frac{4}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$$

SOLUÇÃO: A estratégia é eliminar o termo misto primeiro. Na forma matricial, essa equação é $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + 4 = 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{28}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

O produto misto vem da forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, que diagonalizamos como no Exemplo 12, pondo $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$, onde

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Então, como no Exemplo 12,

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (\mathbf{x}')^T D\mathbf{x}' = (x')^2 + 6(y')^2$$

Mas agora também temos

$$B\mathbf{x} = BQ\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -\frac{28}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -4x' - 12y'$$

Portanto, em termos de x' e y', a equação dada fica

$$(x')^2 + 6(y')^2 - 4x' - 12y' + 4 = 0$$

Para trazer à posição padrão a cônica representada por essa equação, precisamos *transladar* os eixos $x'y'$. Fazemos isso completando quadrados, como no Exemplo 11.

Temos

$$((x')^2 - 4x' + 4) + 6((y')^2 - 2y' + 1) = -4 + 4 + 6 = 6$$

ou

$$(x' - 2)^2 + 6(y' - 1)^2 = 6$$

Isso nos fornece as equações de translação

$$x'' = x' - 2 \quad \text{e} \quad y'' = y' - 1$$

No sistema de coordenadas $x''y''$, a equação é simplesmente

$$(x'')^2 + 6(y'')^2 = 6$$

que é a equação de uma elipse (como no Exemplo 12). Podemos esboçar essa elipse primeiro rotacionando e então transladando. O gráfico resultante é o exibido na Figura 7.

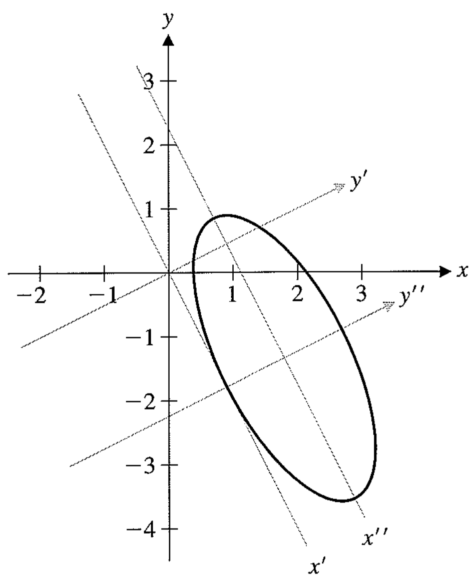


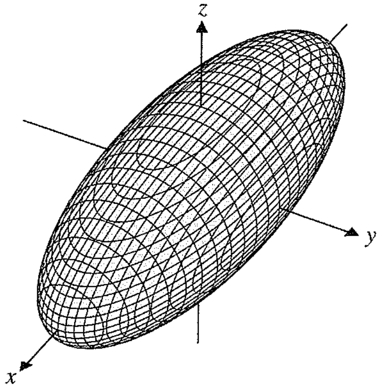
Figura 7

A forma geral de uma equação quadrática em três variáveis x, y e z é

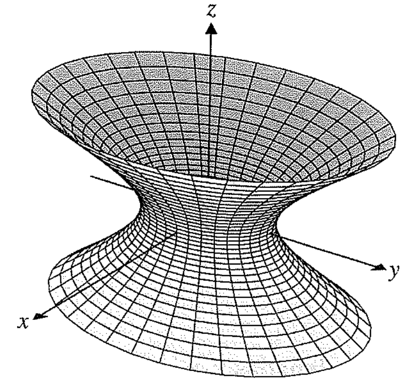
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

onde pelo menos um entre os coeficientes $a, b, \ldots, f$ é não nulo. O gráfico dessa equação quadrática é chamado de ***superfície quádrica*** (ou ***quádrica***). Mais uma vez, para reconhecer uma quádrica, precisamos colocá-la na posição padrão. Alguma quádricas na posição padrão são exibidas na Figura 8; as outras são obtidas por permutação das variáveis.

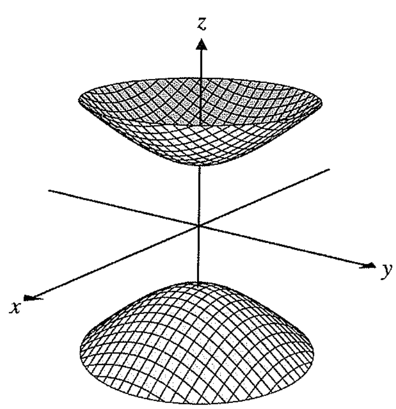
Elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



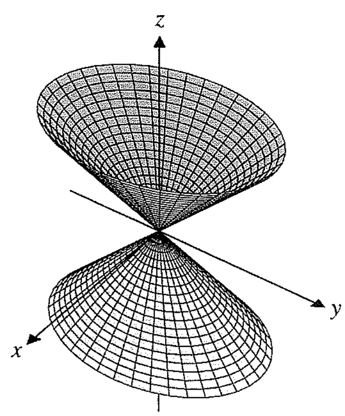
Hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



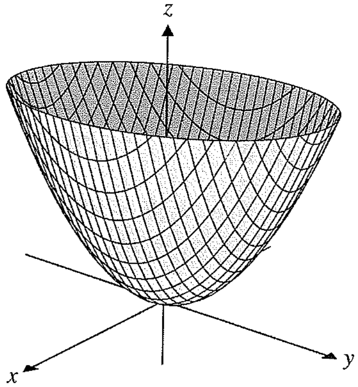
Hiperbolóide de duas folhas: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$



Cone elíptico: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



Parabolóide elíptico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



Parabolóide hiberbólico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

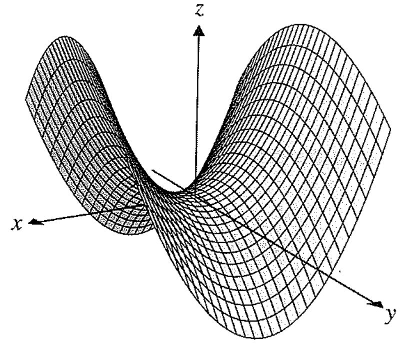


Figura 8 Superfícies quádricas

EXEMPLO 14 Identifique a superfície quádrica cuja equação é

$$5x^2 + 11y^2 + 2z^2 + 16xy + 20xz - 4yz = 36$$

SOLUÇÃO: A equação pode ser escrita na forma matricial como $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 36$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 8 & 11 & -2 \\ 10 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontramos os autovalores de A, que são 18, 9 e -9, com os correspondentes autovetores ortogonais

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Eles são normalizados para obtermos

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

e formamos a matriz ortogonal

$$Q = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Note que, para que Q seja a matriz de uma rotação, exigimos que det $Q = 1$, o que é verdadeiro neste caso. (Caso contrário, det $Q = -1$, e permutar duas colunas mudaria o sinal do determinante.) Logo,

$$Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

e, com a mudança de variáveis $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$, obtemos $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (\mathbf{x}')^T D\mathbf{x}' = 36$, de modo que

$$18(x')^2 + 9(y')^2 - 9(z')^2 = 36 \quad \text{ou} \quad \frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{4} - \frac{(z')^2}{4} = 1$$

Na Figura 8, reconhecemos essa equação como a equação de um hiperbolóide de uma folha. Os eixos x', y' e z' estão nas direções dos autovetores $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ e $\mathbf{q}_3$, respectivamente. O gráfico é exibido na Figura 9.

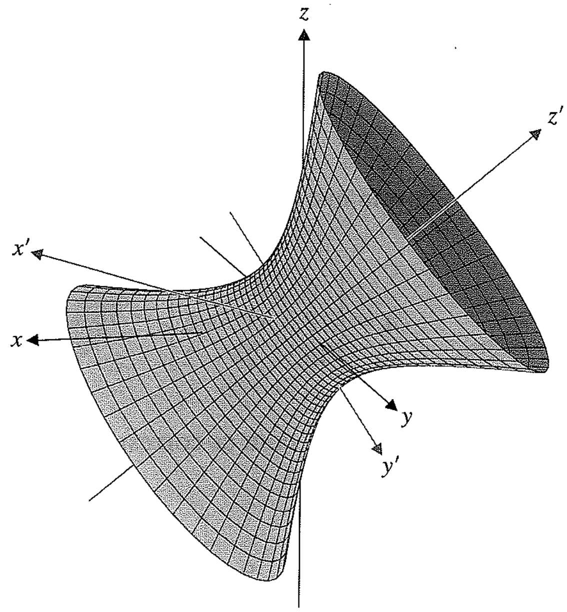


Figura 9 Um hiperbolóide de uma folha que não está na posição padrão ◆

Também podemos identificar e esboçar os gráficos de quádricas que não estão na posição padrão usando o "método de completar quadrados" dos Exemplos 11 e 13. Pediremos que você faça isso nos exercícios.

◆ EXERCÍCIOS 5.6 ◆

Códigos Duais

Nos Exercícios de 1 a 4, G é uma matriz geradora para um código C. Traga G à forma padrão e determine se o código correspondente é igual a C.

1. $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **2.** $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **4.** $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 5 a 8, P é uma matriz de verificação de paridade para um código C. Traga P à forma padrão e determine se o código correspondente é igual a C.

5. $P = [1 \quad 1 \quad 0]$ **6.** $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **8.** $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 9 a 12, encontre o código dual $C^{\perp}$ do código C.

9. $C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

10. $C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

11. $C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

12. $C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Nos Exercícios de 13 a 16, é dada uma matriz geradora G ou uma matriz de verificação de paridade P para um código C. Encontre uma matriz geradora $G^{\perp}$ e uma matriz de verificação de paridade $P^{\perp}$ para o código dual de C.

13. $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **14.** $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **16.** $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. Encontre matrizes geradora e de verificação de paridade para o dual do código de Hamming (7, 4) do Exemplo 7 da Seção 3.7.

*O **código de paridade par** E_n é o subconjunto de $\mathbb{Z}_2^n$ que consite em todos os vetores de peso par. O **código de repetição de n vezes** Rep_n é o subconjunto de $\mathbb{Z}_2^n$ que consiste apenas nos dois vetores* **0** *e* **1** *(todas as componentes zero e 1, respectivamente).*

18. (a) Encontre matrizes geradora e de verificação de paridade para E_3 e Rep_3.
(b) Mostre que E_3 e Rep_3 são um o dual do outro.

19. Mostre que E_n e Rep_n são um o dual do outro.

20. Se C e D são códigos com $C \subseteq D$, mostre que $D^{\perp} \subseteq C^{\perp}$.

21. Mostre que, se C é um código com uma matriz geradora, então $(C^{\perp})^{\perp} = C$.

22. Encontre um código autodual de comprimento 6.

Formas Quadráticas

Nos Exercícios de 23 a 28, calcule a forma quadrática $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ para A e **x** *dados.*

23. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 29 a 34, encontre a matriz simétrica A associada à forma quadrática dada.

29. $x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_1x_2$ **30.** x_1x_2
31. $3x^2 - 3xy - y^2$ **32.** $x_1^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 6x_2x_3$
33. $5x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
34. $2x^2 - 3y^2 + z^2 - 4xz$

Diagonalize as formas quadráticas nos Exercícios de 35 a 40, encontrando uma matriz ortogonal Q tal que a mudança de variáveis $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ *transforme a forma dada em uma forma sem produtos mistos. Dê Q e a nova forma quadrática.*

35. $2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$ **36.** $x^2 + 8xy + y^2$
37. $7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 16x_2x_3$
38. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2$ **39.** $x^2 + z^2 - 2xy + 2yz$
40. $2xy + 2xz + 2yz$

Classifique cada uma das formas nos Exercícios de 41 a 48 como positiva definida, positiva semidefinida, negativa definida, negativa semidefinida ou indefinida.

41. $x_1^2 + 2x_2^2$ **42.** $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$
43. $-2x^2 - 2y^2 + 2xy$ **44.** $x^2 + y^2 + 4xy$
45. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
46. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ **47.** $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2$
48. $-x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

49. Prove o Teorema 4.

50. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ uma matriz simétrica 2×2. Prove que A é positiva definida se, e somente se, $a > 0$ e $\det A > 0$. [*Sugestão*:

$$ax^2 + 2bxy + dy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(d - \frac{b^2}{a}\right)y^2.]$$

51. Seja B uma matriz invertível. Prove que $A = B^TB$ é positiva definida.

52. Seja A uma matriz simétrica e positiva definida. Mostre que existe uma matriz invertível B tal que $A = B^TB$. (*Sugestão*: use o Teorema Espectral para escrever $A = QDQ^T$. Mostre então que D pode ser fatorada como C^TC para alguma matriz invertível C.)

53. Sejam A e B matrizes $n \times n$ simétricas e positivas definidas, e seja c um escalar. Mostre que as seguintes matrizes são positivas definidas:

(a) cA (b) A^2 (c) $A + B$
(d) A^{-1} (Primeiro mostre que A é necessariamente invertível.)

54. Seja A uma matriz simétrica e positiva definida. Mostre que existe uma matriz simétrica e positiva definida B tal que $A = B^2$. (Essa matriz B é chamada de ***raiz quadrada*** de A.)

Nos Exercícios de 55 a 58, encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática $f(\mathbf{x})$ no exercício dado, sujeitos à restrição $\|\mathbf{x}\| = 1$, e determine os valores de $\mathbf{x}$ em que eles ocorrem.

55. Exercício 42 **56.** Exercício 44

57. Exercício 45 **58.** Exercício 46

59. Termine a demonstração do Teorema 5 (a).

60. Prove o Teorema 5 (c).

Esboçando Gráficos de Formas Quadráticas

Nos Exercícios de 61 a 66, identifique o gráfico de cada uma das equações dadas.

61. $x^2 + 5y^2 = 25$ **62.** $x^2 - y^2 - 4 = 0$
63. $x^2 - y - 1 = 0$ **64.** $2x^2 + y^2 - 8 = 0$
65. $3x^2 = y^2 - 1$ **66.** $x = -2y^2$

Nos Exercícios de 67 a 72, use uma translação de eixos para colocar a cônica na posição padrão. Identifique o gráfico, dê sua equação no sistema de coordenadas transladado e esboce a curva.

67. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
68. $4x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 6 = 0$
69. $9x^2 - 4y^2 - 4y = 37$ **70.** $x^2 + 10x - 3y = -13$
71. $2y^2 + 4x + 8y = 0$
72. $2y^2 - 3x^2 - 18x - 20y + 11 = 0$

Nos Exercícios de 73 a 76, use uma rotação de eixos para colocar a cônica na posição padrão. Identifique o gráfico, dê sua equação no sistema de coordenadas rotacionado e esboce a curva.

73. $x^2 + xy + y^2 = 6$ **74.** $4x^2 + 10xy + 4y^2 = 9$
75. $4x^2 + 6xy - 4y^2 = 5$ **76.** $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$

Nos Exercícios de 77 a 80, identifique a cônica cuja equação é dada e dê sua equação na forma padrão.

77. $3x^2 - 4xy + 3y^2 - 28\sqrt{2}x + 22\sqrt{2}y + 84 = 0$
78. $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 20x - 10y - 5 = 0$
79. $2xy + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$
80. $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x - 4 = 0$

Algumas vezes, o gráfico de uma equação quadrática é uma linha reta, um par de retas ou um único ponto. Referimo-nos a esses gráficos como ***cônicas degeneradas****. Também é possível que uma equação não seja satisfeita por nenhum valor das variáveis, e, nesses casos, não há gráfico; referimo-nos à cônica como* ***cônica imaginária****. Nos Exercícios de 81 a 86, identifique a cônica da equação dada como cônica degenerada ou imaginária e, se possível, esboce seu gráfico.*

81. $x^2 - y^2 = 0$ **82.** $x^2 + 2y^2 + 2 = 0$
83. $3x^2 + y^2 = 0$ **84.** $x^2 + 2xy + y^2 = 0$
85. $x^2 - 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$
86. $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 6 = 0$

87. Seja A uma matriz simétrica 2×2, e seja k um escalar. Prove que o gráfico da equação $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = k$ é
(a) Uma hipérbole, se $k \neq 0$ e $\det A < 0$
(b) Uma elipse, um círculo ou uma cônica imaginária, se $k \neq 0$ e $\det A > 0$
(c) Um par de linhas retas ou uma cônica imaginária, se $k \neq 0$ e $\det A = 0$
(d) Um par de linhas retas ou um único ponto, se $k = 0$ e $\det A \neq 0$
(e) Uma linha reta, se $k = 0$ e $\det A = 0$
(*Sugestão*: use o Teorema dos Eixos Principais.)

Nos Exercícios de 88 a 95, identifique a quádrica cuja equação é dada e dê sua equação na forma padrão.

88. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 8$
89. $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1$
90. $-x^2 - y^2 - z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 12$
91. $2xy + z = 0$
92. $16x^2 + 100y^2 + 9z^2 - 24xz - 60x - 80z = 0$
93. $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xy - 2xz + 2yz - x + y + z = 0$
94. $10x^2 + 25y^2 + 10z^2 - 40xz + 20\sqrt{2}x + 50y + 20\sqrt{2}z = 15$
95. $11x^2 + 11y^2 + 14z^2 + 2xy + 8xz - 8yz - 12x + 12y + 12z = 6$