para todo $k \geq 2$. Em seguida, mostre que

$$(Q_1Q_2 \ldots Q_k)(R_k \ldots R_2R_1) = A(Q_1Q_2 \ldots Q_{k-1})(R_{k-1} \ldots R_2R_1)$$

[*Sugestão*: use repetidamente a mesma abordagem utilizada para a primeira equação, trabalhando "de dentro para fora".] Finalmente, deduza que $(Q_1Q_2 \ldots Q_k)(R_k \ldots R_2R_1)$ é a fatoração QR de A_k.

5.5 Diagonalização de Matrizes Simétricas

Vimos, no Capítulo 4, que uma matriz quadrada com elementos reais não tem necessariamente autovalores reais. De fato, a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem autovalores complexos i e $-i$. Também descobrimos que nem todas as matrizes quadradas são diagonalizáveis. A situação muda dramaticamente se restringirmos nossa atenção a matrizes *simétricas*. Como veremos nesta seção, todos os autovalores de uma matriz real simétrica são reais, e essa matriz é sempre diagonalizável.

Lembre-se de que uma matriz é simétrica quando é igual à sua transposta. Vamos começar estudando o processo de diagonalização para uma matriz simétrica 2×2.

EXEMPLO 1 Se possível, diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: O polinômio característico de A é $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$, do qual vemos que A tem autovalores $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$. Encontrando os autovetores correspondentes, obtemos

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Então, A é diagonalizável, e, se fizermos $P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$, veremos que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = D$.

Entretanto, podemos fazer melhor. Observe que $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são ortogonais. Assim, normalizamo-os para obter autovetores unitários

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

e então tomando

$$Q = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

também temos que $Q^{-1}AQ = D$. Mas agora Q é uma matriz *ortogonal*, pois $\{\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\}$ é um conjunto ortonormal de vetores. Então, $Q^{-1} = Q^T$, e temos que $Q^TAQ = D$. (Note que verificar isso é fácil, pois calcular Q^{-1} envolve apenas tomar transpostas!)

A situação do Exemplo 1 é uma das que nos interessam. É suficientemente importante para garantir uma nova definição.

Definição: Uma matriz quadrada A é ***ortogonalmente diagonalizável*** se existem uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tais que $Q^TAQ = D$.

Estamos interessados em encontrar condições sob as quais uma matriz é ortogonalmente diagonalizável. O Teorema 1 nos diz onde procurar.

◆ TEOREMA 1

Se A é ortogonalmente diagonalizável, então A é simétrica.

DEMONSTRAÇÃO: Se A é ortogonalmente diagonalizável, então existem uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tais que $Q^TAQ = D$. Como $Q^{-1} = Q^T$, temos que $Q^TQ = I = QQ^T$, e assim

$$QDQ^T = QQ^TAQQ^T = IAI = A$$

Mas então

$$A^T = (QDQ^T)^T = (Q^T)^TD^TQ^T = QDQ^T = A$$

pois toda matriz diagonal é simétrica. Logo, A é simétrica. ◆

Observação: ◆ O Teorema 1 mostra que as matrizes ortogonalmente diagonalizáveis só podem ser encontradas *entre* as matrizes simétricas. Ele *não* diz que toda matriz simétrica tem que ser ortogonalmente diagonalizável. Entretanto, esse fato notável é realmente verdadeiro! Encontrar uma solução para esse fato surpreendente ocupará muito do restante desta seção.

a + bi Provaremos a seguir que não precisamos nos preocupar com autovalores *complexos* quando trabalhamos com matrizes simétricas com elementos *reais*.

◆ TEOREMA 2

Se A é uma matriz real simétrica, então seus autovalores são reais.

Lembre-se de que o *conjugado complexo* de um número complexo $z = a + bi$ é o número $\bar{z} = a - bi$ (veja o Apêndice C). Para mostrar que z é real, precisamos provar que $b = 0$. Um dos modos de fazer isso é provar que $z = \bar{z}$, pois então $bi = -bi$ (ou $2bi = 0$), e disso segue que $b = 0$.

Podemos também estender a noção de conjugado complexo a vetores e matrizes definindo, por exemplo, $\bar{A}$ como a matriz cujos elementos são os complexos conjugados dos elementos de A — isto é, se $A = [a_{ij}]$, então $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$. As propriedades da conjugação complexa são facilmente estendidas para matrizes; em particular, temos $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ para matrizes compatíveis A e B.

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que λ seja um autovalor de A com autovetor correspondente $\mathbf{v}$. Então, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, e, tomando conjugados complexos, temos $\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}}$. Mas então

$$A\bar{\mathbf{v}} = \bar{A}\bar{\mathbf{v}} = \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$$

pois A é real. Tomando transpostas e usando o fato de que A é simétrica, temos

$$\bar{\mathbf{v}}^TA = \bar{\mathbf{v}}^TA^T = (A\bar{\mathbf{v}})^T = (\bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}})^T = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T$$

Logo,

$$\lambda(\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{v}}^T(\lambda\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{v}}^T(A\mathbf{v}) = (\bar{\mathbf{v}}^TA)\mathbf{v} = (\bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T)\mathbf{v} = \bar{\lambda}(\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v})$$

ou $(\lambda - \bar{\lambda})(\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v}) = 0$.

Agora, se $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix}$, então $\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 i \\ \vdots \\ a_n - b_n i \end{bmatrix}$, e assim:

$$\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v} = (a_1^2 + b_1^2) + \cdots + (a_n^2 + b_n^2) \neq 0$$

já que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (porque é um autovetor). Concluímos que $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, ou $\lambda = \bar{\lambda}$. Logo, λ é real. ◆

O Teorema 5 da Seção 4.4 mostra que, para toda matriz quadrada, autovetores correspondentes a autovalores distintos são linearmente independentes. Para matrizes simétricas, vale um resultado mais forte: esses autovetores são *ortogonais*.

◆ TEOREMA 3

Se A é uma matriz simétrica, então dois autovetores quaisquer, correspondentes a autovalores distintos de A, são ortogonais.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ autovetores correspondentes aos autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de modo que $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ e $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$. Usando $A^T = A$ e o fato de que $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ para dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ quaisquer em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) &= (\lambda_1\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T\mathbf{v}_2 \\ &= (\mathbf{v}_1^TA^T)\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1^TA)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T(A\mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{v}_1^T(\lambda_2\mathbf{v}_2) = \lambda_2(\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2) = \lambda_2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

Logo, $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) = 0$. Mas $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, por isso $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0$, como queríamos provar. ◆

EXEMPLO 2 Verifique o resultado do Teorema 3 para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: O polinômio característico de A é $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda - 4)\cdot(\lambda - 1)^2$, e disso se conclui que os autovalores de A são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$. Os subespaços característicos correspondentes são

$$E_4 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{e} \quad E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

(Cheque isso.) Podemos verificar facilmente que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

do que segue que todo vetor em E_4 é ortogonal a todo vetor em E_1. (Por quê?)

Observação: ◆ Note que $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$

Logo, autovetores correspondentes ao *mesmo* autovalor não são necessariamente ortogonais.

Podemos agora provar o resultado central desta seção. Ele é chamado Teorema Espectral, já que o conjunto dos autovalores de uma matriz é, algumas vezes, chamado o ***espectro*** da matriz. (Tecnicamente, deveríamos chamar o Teorema 4 de Teorema Espectral *Real*, já que existe um resultado correspondente para matrizes complexas.)

Spectrum é uma palavra latina que significa "imagem". Quando átomos vibram, eles emitem luz. Quando a luz passa através de um prisma, ela se espalha em um espectro — uma faixa de cores do arco-íris. As freqüências de vibração correspondem aos autovalores de um certo operador e são visíveis como retas brilhantes em um espectro de luz emitido através de um prisma. Podemos literalmente ver os autovalores de um átomo em seu espectro, e, por essa razão, é razoável que a palavra *spectrum* seja usada para designar o conjunto dos autovalores de uma matriz (ou operador).

◆ TEOREMA 4 O Teorema Espectral

Seja A uma matriz real $n \times n$. Então, A será simétrica se, e somente se, for ortogonalmente diagonalizável.

DEMONSTRAÇÃO: Já provamos a parte "se" como o Teorema 1. Para provar a implicação "somente se", procedemos por indução em n. Para $n = 1$, não há nada a fazer, já que toda matriz 1×1 já está na forma diagonal. Assuma agora que toda matriz $k \times k$ real, simétrica e com autovalores reais seja ortogonalmente diagonalizável. Considere $n = k + 1$ e A como uma matriz real simétrica $n \times n$ com autovalores reais.

Seja λ_1 um dos autovalores de A, e seja $\mathbf{v}_1$ um autovetor correspondente.

Então $\mathbf{v}_1$ é um vetor real (por quê?), e podemos assumir que $\mathbf{v}_1$ é um vetor unitário, porque, se não fosse, poderíamos normalizá-lo e ainda teríamos um autovetor correspondente a λ_1. Usando o processo de Gram-Schmidt, podemos estender $\mathbf{v}_1$ a uma base ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Agora formamos a matriz

$$Q_1 = [\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2 \ldots \; \mathbf{v}_n]$$

Então, Q_1 é ortogonal, e

$$\begin{aligned} Q_1^T A Q_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} A[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} [A\mathbf{v}_1 \quad A\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{v}_n] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} [\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad A\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{v}_n] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline \mathbf{0} & A_1 \end{array}\right] = B \end{aligned}$$

pois $\mathbf{v}_1^T(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1(\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1) = \lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) = \lambda_1$ e $\mathbf{v}_i^T(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1(\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_1) = \lambda_1(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1) = 0$ para $i \neq 1$, pois $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto ortonormal.

Mas

$$B^T = (Q_1^T A Q_1)^T = Q_1^T A^T (Q_1^T)^T = Q_1^T A Q_1 = B$$

e, portanto, B é simétrica. Logo, B tem a forma de blocos

$$B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A_1 \end{array}\right]$$

e A_1 é simétrica. Além disso, B é semelhante a A (por quê?), por isso o polinômio característico de B é igual ao polinômio característico de A, pelo Teorema 2 da Seção 4.5. Pelo Exercício 39 da Seção 4.4, o polinômio característico de A_1 divide o polinômio característico de A. Segue que os autovalores de A_1 também são autovalores de A, e são, portanto, reais. Também vemos que os elementos de A_1 são reais. (Por quê?) Assim, A_1 é uma matriz $k \times k$ simétrica, real e com autovalores reais, e então a hipótese de indução aplica-se a ela. Logo, existe uma matriz ortogonal P_2 tal que $P_2^T A_1 P_2$ é uma matriz diagonal — digamos, D_1. Agora, considere

$$Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & P_2 \end{array}\right]$$

Então, Q_2 é uma matriz ortogonal $(k+1)\times(k+1)$, e, conseqüentemente, $Q = Q_1 Q_2$ também é. Assim,

Em uma conferência ministrada na Universidade de Göttingen, em 1905, o matemático alemão David Hilbert (1862–1943) considerou operadores lineares agindo em certos espaços vetoriais de dimensão infinita. Nessa conferência, surgiu a noção de formas quadráticas em infinitas variáveis, e esse foi o contexto em que Hilbert usou pela primeira vez o termo *spectrum* com o significado de conjunto completo de autovetores. Os espaços em questão são chamados *espaços de Hilbert*. Hilbert fez grandes contribuições a muitas áreas da matemática — entre elas, equações integrais, teoria de números, geometria e fundamentos da matemática. Em 1900, no Segundo Congresso Internacional de Matemática, em Paris, Hilbert apresentou o artigo "Os problemas de matemática". Nele, desafiava matemáticos a resolver 23 problemas de importância fundamental para o século seguinte. Vários problemas foram resolvidos — foi provado que alguns eram verdadeiros, e outros, falsos —, e alguns podem nunca ser resolvidos. Entretanto, a conferência de Hilbert deu energia à comunidade matemática e é freqüentemente considerada a mais influente palestra dada em matemática.

$$\begin{aligned}
Q^T A Q &= (Q_1 Q_2)^T A (Q_1 Q_2) = (Q_2^T Q_1^T) A (Q_1 Q_2) = Q_2^T (Q_1^T A Q_1) Q_2 = Q_2^T B Q_2 \\
&= \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & P_2^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & P_2 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & P_2^T A_1 P_2 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & D_1 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

que é uma matriz diagonal. Isso completa o passo de indução, e concluímos que, para todo $n \geq 1$, uma matriz simétrica real $n \times n$ com autovalores reais é ortogonalmente diagonalizável. ◆

EXEMPLO 3 Diagonalize ortogonalmente a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: Essa é a matriz do Exemplo 2. Já encontramos os auto-subespaços de A, que são

$$E_4 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) \quad \text{e} \quad E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

Precisamos de três autovetores ortonormais. Primeiro, aplicamos o Processo de Gram-Schmidt a

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

para obter

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

O novo vetor, que foi construído para ser ortogonal a $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, está ainda em E_1 (por quê?), e então é ortogonal a $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. Logo, temos três vetores mutuamente ortogonais, e tudo o que precisamos é normalizá-los e construir uma matriz Q com esses vetores como suas colunas. Vemos que

$$Q = \begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

e verificamos diretamente que

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

O Teorema Espectral permite-nos escrever uma matriz simétrica real A na forma $A = QDQ^T$, onde Q é ortogonal e D é diagonal. Os elementos na diagonal de D são exatamente os autovalores de A, e, se as colunas de Q são os vetores ortonormais $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$, então, usando a representação coluna-linha do produto, temos

$$\begin{aligned} A = QDQ^T &= [\mathbf{q}_1 \ \cdots \ \mathbf{q}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{q}_n^T\end{bmatrix} \\ &= [\lambda_1\mathbf{q}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{q}_n]\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{q}_n^T\end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \lambda_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{q}_n\mathbf{q}_n^T \end{aligned}$$

Isso é chamado de ***decomposição espectral*** de A. Cada um dos termos $\lambda_i\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^T$ é uma matriz de posto 1, pelo Exercício 56 da Seção 3.5, e $\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^T$ é exatamente a matriz da projeção sobre o subespaço gerado por $\mathbf{q}_i$. (Veja o Exercício 25.) Por essa razão, algumas vezes nos referimos à decomposição espectral

$$A = \lambda_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \lambda_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{q}_n\mathbf{q}_n^T$$

como o ***Teorema Espectral na forma de projeções.***

EXEMPLO 4 Encontre a decomposição espectral da matriz A do Exemplo 3.

SOLUÇÃO: Do Exemplo 3, temos que

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 1$$
$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}[1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3}] = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}[-1/\sqrt{2} \quad 0 \quad -1/\sqrt{2}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}[-1/\sqrt{6} \quad 2/\sqrt{6} \quad -1/\sqrt{6}] = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \lambda_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + \lambda_3\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T \\ &= 4\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o que pode ser facilmente verificado.

Neste exemplo, $\lambda_2 = \lambda_3$, de modo que poderíamos combinar os dois últimos termos, $\lambda_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + \lambda_3\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T$, para obter

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

A matriz de posto 2 $\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + \mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T$ é a matriz da projeção sobre o subespaço bidimensional (isto é, o plano) gerado por $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$. (Veja o Exercício 26.) ◆

Observe que a decomposição espectral expressa uma matriz simétrica A explicitamente em termos de seus autovalores e autovetores. Isso nos fornece uma maneira de construir uma matriz com os autovalores e autovetores (ortonormais) dados.

EXEMPLO 5 Encontre uma matriz 2×2 com autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ e autovetores correspondentes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: Começamos normalizando os vetores para obter uma base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$, com

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Agora, calculamos a matriz A, cuja decomposição espectral é

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T \\ &= 3\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \\ &= 3\begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

É fácil verificar que A tem as propriedades desejadas. (Faça isso.)

◆ EXERCÍCIOS 5.5 ◆

Diagonalize ortogonalmente as matrizes nos Exercícios de 1 a 10, encontrando uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D de modo que que $Q^TAQ = D$.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. Se $b \neq 0$, diagonalize ortogonalmente a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

12. Se $b \neq 0$, diagonalize ortogonalmente a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}.$$

13. Sejam A e B matrizes ortogonalmente diagonalizáveis $n \times n$, e c um escalar. Use o Teorema Espectral para provar que as seguintes matrizes são ortogonalmente diagonalizáveis:

(a) $A + B$ (b) cA (c) A^2

14. Se A é uma matriz invertível ortogonalmente diagonalizável, mostre que A^{-1} é ortogonalmente diagonalizável.

15. Se A e B são matrizes ortogonalmente diagonalizáveis com $AB = BA$, prove que AB é ortogonalmente diagonalizável.

16. Se A é uma matriz simétrica, mostre que todo autovalor de A é não negativo se, e somente se, $A = B^2$ para alguma matriz simétrica B.

Nos Exercícios de 17 a 20, encontre a decomposição espectral da matriz no exercício dado.

17. Exercício 1 **18.** Exercício 2

19. Exercício 5 **20.** Exercício 8

Nos Exercícios 21 e 22, encontre uma matriz simétrica 2×2 com autovalores λ_1 e λ_2 e autovetores ortogonais correspondentes $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

21. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

22. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 23 e 24, encontre uma matriz simétrica 3×3 com os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 e autovetores ortogonais correspondentes $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

23. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$

$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

24. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -4, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$

$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

25. Sejam $\mathbf{q}$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^n$ e W o subespaço gerado por $\mathbf{q}$. Mostre que a projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{v}$ sobre W (como definida nas Seções 1.3 e 5.3) é dada por

$$\text{proj}_W(\mathbf{v}) = (\mathbf{q}\mathbf{q}^T)\mathbf{v}$$

e que a matriz da projeção é $\mathbf{q}\mathbf{q}^T$. (*Sugestão*: lembre-se de que, para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$.)

26. Sejam $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\}$ um conjunto ortonormal de vetores em $\mathbb{R}^n$ e W o subespaço gerado por esse conjunto.

(a) Prove que a matriz da projeção ortogonal sobre W é dada por

$$P = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \cdots + \mathbf{q}_k\mathbf{q}_k^T$$

(b) Prove que a matriz da projeção ortogonal P da parte (a) é simétrica e satisfaz $P^2 = P$.

(c) Seja $Q = [\mathbf{q}_1 \; \ldots \; \mathbf{q}_k]$ a matriz $n \times k$ cujas colunas formam a base ortonormal de W. Mostre que $P = QQ^T$ e deduza que posto$(P) = k$.

27. Seja A uma matriz real $n \times n$, cujos autovalores são todos reais. Prove que existe uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior T tais que $Q^TAQ = T$. Esse resultado muito útil é conhecido como ***Teorema de Triangularização de Schur***. (*Sugestão*: adapte a demonstração do Teorema Espectral.)

5.6 Aplicações

Códigos Duais

Existem muitas maneiras de construir novos códigos através dos antigos. Nesta seção, consideraremos o mais importante deles.

Primeiro, precisamos generalizar os conceitos de matriz geradora e de uma matriz de verificação de paridade para um código. Lembre-se de que (Seção 3.7) uma matriz geradora padrão para um código é uma matriz $n \times m$ da forma

$$G = \left[\begin{array}{c} I_m \\ \hdashline A \end{array}\right]$$

e uma matriz de verificação de paridade padrão é uma matriz $(n - m) \times n$ da forma

$$P = [B \;\vdots\; I_{n-m}]$$

Observe que, pela forma dessas matrizes, podemos garantir que as colunas de G e as linhas de P são linearmente independentes. (Por quê?) Ao provarmos o Teorema 1 da Seção 3.7, provamos que