Investigação

A Fatoração *LU*

Assim como é natural (e esclarecedor) fatorar um número natural em um produto de outros números naturais — por exemplo, $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ —, também é útil, freqüentemente, fatorar uma matriz em um produto de outras matrizes. Qualquer representação de uma matriz como um produto de duas ou mais matrizes é chamado de ***fatoração de matriz***. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

é uma fatoração de matriz.

É desnecessário dizer que algumas fatorações são mais úteis que outras. Nesta Investigação, consideramos uma fatoração de matriz que surge na resolução de sistemas de equações lineares pelo método da eliminação de Gauss e é particularmente adequada para implementação em computadores. Nos capítulos subseqüentes, encontraremos outras fatorações de matrizes igualmente úteis. Na verdade, esse tópico é muito rico; livros inteiros e cursos têm sido dedicados a ele.

Considere um sistema de equações lineares da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que A é uma matriz $n \times n$. Nosso objetivo é mostrar que o método de eliminação de Gauss implicitamente fatora A em um produto de matrizes e, dessa forma, nos permite facilmente resolver o sistema dado (e qualquer outro sistema que tenha a mesma matriz de coeficientes).

Para começar, consideremos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

O escalonamento sobre as linhas de A fica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U \qquad (1)$$

1. Encontre as três matrizes elementares E_1, E_2 e E_3 que promovem essa redução de A até sua forma escalonada U:

$$E_3E_2E_1A = U \qquad (2)$$

2. Encontre A usando a equação (2) e obtenha uma equação da forma

(3)

Observe que, neste exemplo, U é uma *matriz triangular superior* (veja os Exercícios da Seção 3.3), enquanto L é uma *matriz triangular inferior unitária* — isto é, L tem a forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

com zeros acima da diagonal principal e 1s na diagonal principal.

3. (a) Prove que um produto de matrizes triangulares inferiores unitárias é uma matriz triangular inferior unitária.

(b) Prove que toda matriz triangular inferior é invertível, e sua inversa é também triangular inferior unitária. (*Sugestão*: este seria um bom momento para usar o Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis.[6])

A fatoração em (3) é uma ***fatoração LU*** de A. Felizmente, L pode ser calculada diretamente do processo de escalonamento sobre as linhas da matriz, como na equação (1); não há necessidade de encontrar as matrizes elementares, como acabamos de fazer.

4. Examine as colunas das matrizes que surgem no processo de escalonamento sobre as linhas de $A \to A_1 \to U$. Mostre como os elementos abaixo da diagonal principal de L podem ser obtidos a partir dos elementos das colunas de A e de A_1.

Observação: Perceba que os cálculos descritos funcionam porque *nenhuma permutação de linhas* foi necessária no escalonamento sobre as linhas de A. Se um zero tivesse aparecido em algum dos pivôs em qualquer passo, precisaríamos ter trocado linhas para obtermos pivôs não nulos e, neste caso, L não seria mais triangular inferior unitária. Comentaremos mais, a seguir, sobre essa observação. (Você consegue achar uma matriz na qual permutações de linhas sejam necessárias?)

5. Se A puder ser reduzida à sua forma escalonada sem permutação de suas linhas, escreva os passos de um algoritmo para calcular uma fatoração LU de A. Aplique seu algoritmo às matrizes a seguir. Confira seus resultados verificando que $A = LU$.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

A fatoração *LU* foi introduzida em 1948 pelo grande matemático inglês Alan M. Turing (1912–1954), em um artigo chamado "Rounding-off errors in matrix processes" *(Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1 (1948), p. 287–308). Durante a Segunda Guerra Mundial, Turing trabalhou na quebra do código alemão "Enigma". Entretanto, ele é mais conhecido por seu trabalho em lógica matemática, onde criou a base teórica para o desenvolvimento do computador digital e da área moderna da inteligência artificial. O "teste de Turing" que ele propôs em 1950 ainda é usado como uma das referências sobre a questão da possibilidade de um computador ser considerado "inteligente".

No Capítulo 2, observamos que a forma escalonada por linhas de uma matriz não é única. Entretanto, se o escalonamento sobre as linhas de uma matriz invertível A puder ser expresso por uma fatoração LU, $A = LU$, então essa fatoração é única.

6. Prove que, se $L_1U_1 = L_2U_2$ (com L_1 e L_2 triangulares inferiores unitárias, U_1 e U_2 triangulares superiores e invertíveis), então $L_1 = L_2$ e $U_1 = U_2$. (*Sugestão*: reescreva a equação com os L's de um lado e os U's do outro, e então faça uso do Problema 3, que acabamos de ver, e do Exercício 29 da Seção 3.3.)

Investigamos agora como a fatoração LU facilita a resolução de um sistema linear. Se reescrevermos o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ na forma $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

[6] "Nunca traga um canhão para o palco no Ato I, a não ser que você tenha a intenção de abrir fogo no Ato III" – Henrik Ibsen.

podemos definir $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ para obter dois sistemas lineares, tendo cada um deles uma matriz de coeficientes triangular e, portanto, sendo de resolução direta. Primeiro, encontramos $\mathbf{y}$ por *substituição de frente para trás* em $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ (veja os Exercícios 25 e 26 da Seção 2.2). Em seguida, achamos $\mathbf{x}$, que é o que queremos, usando *substituição de trás para a frente* em $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

7. Use esse método para resolver os seguintes sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que uma fatoração LU é dada.

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

Observação: ◆ Do ponto de vista computacional, a fatoração LU é muito compacta, já que podemos *sobrescrever* os elementos de A a partir dos elementos de L e de U assim que eles são calculados. Por exemplo, em (1), você viu que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

Isso pode ser armazenado como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

com os elementos colocados na ordem (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3). (Verifique que isso funciona!)

A fatoração LU nos dá ainda uma outra visão do processo do método de eliminação de Gauss. Lembre-se de que a expansão em produto externo do produto de duas matrizes expressa esse produto como uma soma de matrizes, tendo cada uma posto 1. Se aplicarmos essa observação à fatoração $A = LU$, veremos que o que o escalonamento pelo método de Gauss faz é escrever sistematicamente A como a soma de matrizes de posto 1. (Veja o Exercício 56 da Seção 3.5.)

8. Use a fatoração LU do Problema 5 para escrever cada uma das matrizes A como uma soma de matrizes de posto 1.

Investigamos agora o problema de adaptar a fatoração LU para lidarmos em casos nos quais são necessárias permutações das linhas durante o escalonamento pelo método de Gauss. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Um escalonamento direto por linhas produz

que não é uma matriz triangular superior. Entretanto, podemos facilmente converter essa matriz em uma matriz triangular superior apenas trocando as linhas 2 e 3 de B para obtermos

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Alternativamente, podemos trocar primeiro as linhas 2 e 3 de A. Para isso, considere P como a matriz elementar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

correspondente à permutação das linhas 2 e 3, e E como o produto das matrizes elementares que reduzem PA a U desse modo. Assim, $EPA = U$ e $PA = E^{-1}U = LU$.

9. Prove que, se P é uma matriz elementar correspondente a uma permutação de linhas, $P^{-1} = P^T$.

Provamos que podemos escrever $A = P^{-1}LU = P^TLU$, o que resolve o caso de uma permutação *simples* de linhas. Em geral, P será o produto $P = P_k \ldots P_2P_1$ de todas as matrizes de permutação de linhas P_1, P_2, $\ldots$, P_k (em que P_1 é obtida em primeiro lugar, e assim por diante). Essa matriz P é chamada de ***matriz de permutação***. Observe que uma matriz de permutação surge da permutação das linhas de uma matriz identidade em alguma ordem.

10. Prove que existem exatamente $n!$ matrizes de permutação $n \times n$.

11. Escreva as matrizes de permutação a seguir como produtos de matrizes (de permutação de linhas) elementares.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. Prove que, se P é uma matriz de permutação, $P^{-1} = P^T$.

Em geral, uma matriz invertível A $n \times n$ tem uma fatoração P^TLU, em que P é uma matriz de permutação, L é triangular inferior unitária e U é triangular superior. Uma vez determinada P, L e U são únicas.

13. Encontre uma fatoração P^TLU para cada uma das matrizes a seguir.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Observações:

- Embora tenhamos discutido apenas as fatorações LU e P^TLU para matrizes quadradas (invertíveis também), os procedimentos podem ser generalizados para serem aplicados a matrizes $m \times n$.
- Se A é $n \times n$, o número total de operações (multiplicações e divisões) necessárias para resolver um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando $A = LU$ (como no Problema 7) é $T(n) \approx n^3/3$, o mesmo número necessário para o escalonamento pelo método de Gauss. (Veja Investigação: Contando Operações, no Capítulo 2.) Isso não é surpreendente, já que a fase de eliminação direta produz a fatoração LU em aproximadamente $n^3/3$ passos, enquanto ambas as substituições de frente para trás e de trás para a frente precisam de aproximadamente $n^2/2$ passos. Portanto, para valores grandes de n, o termo $n^3/3$ é dominante.
- Se você possui um CAS (ou MATLAB) que tenha a fatoração LU instalada, pode notar algumas diferenças entre seus cálculos de mão e a saída do computador. Isso ocorre porque a maioria dos sistemas algébricos dos computadores tenta automaticamente fazer um pivoteamento parcial para reduzir os erros de arredondamento. (Veja Investigação: Pivoteamento Parcial, no Capítulo 2.) O artigo de Turing traz uma grande discussão de tais erros no contexto de fatorações de matrizes.

Esta investigação introduziu uma das fatorações de matrizes mais úteis. Nos capítulos subseqüentes, encontraremos outras fatorações igualmente úteis.

4

VALORES E VETORES PRÓPRIOS

Quase todas as combinações dos adjetivos *próprio, característico, auto* e *secular* com os substantivos *raízes, valor* e *número* têm sido utilizadas na literatura para o que chamamos de valor próprio.

– Paul R. Halmos, *Espaços vetoriais de dimensão finita* (2. ed.)
Van Nostrand, 1958, p. 102

4.1 Introdução: Um Sistema Dinâmico sobre Grafos

CAS

Vimos, no último capítulo, que iterar a multiplicação de matrizes produz seguidamente resultados interessantes. As cadeias de Markov e os modelos de Leslie para crescimento populacional exibem estados estacionários em algumas situações. Uma das metas deste capítulo é ajudar você a compreender esse comportamento. Primeiro, examinaremos um outro processo iterativo, ou ***sistema dinâmico***, que também emprega matrizes. (Nos problemas a seguir, será útil, para facilitar os cálculos, usar um CAS ou uma calculadora que opere com matrizes.)

Nosso exemplo envolve grafos (ver Seção 3.7). Um ***grafo completo*** é um grafo onde cada vértice é adjacente a todos os outros vértices. Denotamos por K_n um grafo completo com n vértices. Por exemplo, a Figura 1 mostra uma representação de K_4.

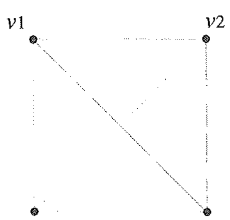


Figura 1 K_4

Problema 1: Considere um vetor qualquer $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^4$, com coordenadas não negativas, e utilize tais coordenadas para nomear os vértices de K_4 de maneira que v_1 seja chamado de x_1, e assim por diante. Determine a matriz de vértices A de K_4 e renomeie os vértices do grafo com as coordenadas correspondentes de $A\mathbf{x}$. Repita o procedimento para vários vetores $\mathbf{x}$ e explique, em termos do grafo, como os novos nomes podem ser determinados a partir dos velhos.

Problema 2: Agora, *faça uma iteração* do processo descrito no Problema 1 – ou seja, para uma dada escolha de $\mathbf{x}$, renomeie os vértices como antes e em seguida aplique A novamente (depois de novo, e de novo) até que surja um padrão. Como as coordenadas dos vetores se tornarão números bastante elevados, faremos uma *mudança de escala*, dividindo cada vetor pelo valor correspondente à sua *maior coordenada* depois de cada iteração. Assim, se os cálculos nos fornecerem o vetor

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

nós o substituiremos por

$$\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Observe que esse processo garante que a maior coordenada de cada vetor ficará sempre igual a 1. Faça isso para K_4, depois para K_3 e para K_5. Itere pelo menos dez vezes, dando os resultados com precisão de, no mínimo, até a segunda casa decimal. O que parece acontecer?

Problema 3: Você deve ter notado que, em cada caso, os vetores obtidos no processo de iteração se aproximam de um determinado vetor (um vetor em estado estacionário!). Nomeie os vértices do grafo completo com as coordenadas desse vetor e aplique mais uma vez a matriz de vértices A (sem mudanças de escala). Qual a relação entre as novas coordenadas e as anteriores?

Problema 4: Faça uma conjectura para o caso geral K_n. Qual será o vetor em estado estacionário? O que acontecerá se nomearmos K_n com as coordenadas desse último vetor e aplicarmos a matriz de adjacência A, sem mudanças de escala?

Problema 5: Na Figura 2, mostramos o ***grafo de Petersen***. Repita o procedimento dos Problemas de 1 a 3 com esse grafo.

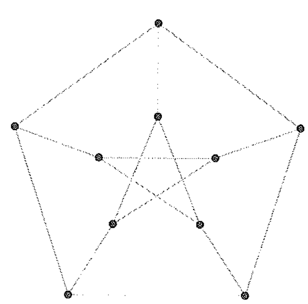


Figura 2

Vamos agora explorar o procedimento descrito anteriormente com outros tipos de grafos para ver se eles se comportam da mesma forma. O ***ciclo*** C_n é o grafo de n vértices apresentado em um formato cíclico. Por exemplo, C_5 é o grafo mostrado na Figura 3.

Problema 6: Repita o procedimento descrito nos Problemas de 1 a 3 com ciclos C_n, para alguns valores ímpares de n, e estabeleça uma conjectura para o caso geral.

Problema 7: Repita o Problema 6, utilizando valores pares de n. O que acontece?

Um grafo bipartido é um ***grafo bipartido completo*** (veja os Exercícios de 56 a 60 da Seção 3.7) se seus vértices admitem uma partição em conjuntos U e V de maneira que cada vértice de U seja adjacente a todos os vértices de V, e vice-versa. Se U e V tiverem, cada um, n vértices, o grafo será denotado por $K_{n,n}$. Por exemplo, $K_{3,3}$ é o grafo da Figura 4.

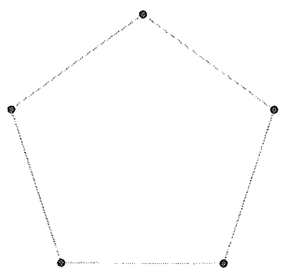


Figura 3

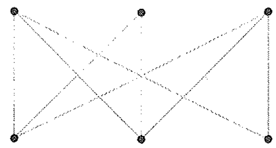


Figura 4

Problema 8: Repita o procedimento descrito nos Problemas de 1 a 3 para grafos bipartidos completos $K_{n,n}$ para vários valores de n. O que acontece?

No final deste capítulo, você terá condições de explicar as observações que fez nesta Introdução.

4.2 Introdução aos Valores e Vetores Próprios

O adjetivo germânico *eigen** significa "próprio" ou "característico de". Valores e vetores próprios, ou autovalores e autovetores, são característicos de uma matriz no sentido de conterem informações importantes sobre a natureza da matriz. A letra λ (lambda), letra grega equivalente ao L em português, é utilizada para designar autovalores porque anteriormente esses números também eram chamados de *valores latentes*. A pronúncia fonética do prefixo alemão *eigen* é "áiguen".**

No Capítulo 3, encontramos a noção de vetor em estado estacionário, no contexto de duas aplicações: cadeias de Markov e modelos de Leslie para o crescimento populacional. Para uma cadeia de Markov com matriz de transição P, um vetor em estado estacionário $\mathbf{x}$ satisfazia a equação $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$; para uma matriz de Leslie L, um vetor em estado estacionário correspondia a um vetor população $\mathbf{x}$ satisfazendo $L\mathbf{x} = r\mathbf{x}$, onde r representava a taxa de crescimento do estado estacionário. Por exemplo, vimos que

$$\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = 1{,}5\begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neste capítulo, investigamos esse fenômeno de forma mais geral. Para uma matriz quadrada A, investigamos a existência de vetores não nulos $\mathbf{x}$ tais que o valor de $A\mathbf{x}$ seja um múltiplo de $\mathbf{x}$. Esse é o *problema de autovalor*, um dos mais centrais da álgebra linear. Esse tipo de problema tem aplicações por todas as áreas da matemática, e fora dela também.

* N.T.: De *eigenvalue*, em inglês, e autovalor, em português.

** N.T.: Na literatura especializada em português, também são empregados, como sinônimos de valores e vetores próprios, as expressões valores e vetores característicos, ou autovalores e autovetores. Ao longo do livro, empregaremos preferencialmente esta última designação.

Definição Considere A uma matriz $n \times n$. Um escalar λ é chamado de ***autovalor*** de A se existe um vetor não nulo $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Tal vetor é chamado de um ***autovetor*** de A correspondente a λ.

EXEMPLO 1 Mostre que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e encontre o autovalor correspondente.

SOLUÇÃO: Fazendo os cálculos,

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\mathbf{x}$$

de onde segue que $\mathbf{x}$ é um autovetor de A que corresponde ao autovalor 4.

EXEMPLO 2 Mostre que 5 é um autovalor de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e determine todos os autovetores correspondentes a esse autovalor.

SOLUÇÃO: Precisamos mostrar que existe um vetor *não nulo* $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$. Mas essa equação é equivalente à equação $(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, assim, basta determinar o subespaço anulado pela matriz $A - 5I$. Concluímos que

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Como as colunas dessa matriz são linearmente dependentes, o Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis implica que o subespaço por ela anulado é diferente de $\{\mathbf{0}\}$. Assim, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ tem solução não trivial, e, portanto, 5 é um autovalor de A. Encontramos seus autovetores determinando o subespaço anulado pela matriz $A - 5I$:

$$[A - 5I \mid \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, se $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ é um autovetor correspondente ao autovalor 5, suas coordenadas satisfazem $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$, ou $x_1 = \frac{1}{2}x_2$, logo, esses autovetores são da forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ou seja, os autovetores são os múltiplos não nulos de $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ (ou, equivalentemente, os múltiplos não nulos de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$).

O conjunto de todos os autovetores correspondentes a um autovalor λ de uma matriz A $n \times n$ é exatamente o conjunto dos vetores *não nulos* do subespaço anulado por $A - \lambda I$. Daí decorre que, se ao conjunto dos autovetores juntarmos o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$, obteremos o subespaço anulado por $A - \lambda I$.

Definição Considere A uma matriz $n \times n$ e λ, um autovalor de A. A coleção de todos os autovetores correspondentes a λ, acrescida do vetor nulo, é chamada de ***auto-subespaço*** de λ, e é denotada por E_λ.

Portanto, no Exemplo 2, temos que $E_5 = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

EXEMPLO 3 Mostre que $\lambda = 6$ é um autovalor de $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e encontre uma base para o seu auto-subespaço.

SOLUÇÃO: Como no Exemplo 2, determinamos o subespaço anulado por $A - 6I$. Depois, por meio de escalonamento nas linhas, obtemos

$$A - 6I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de onde podemos ver que o subespaço anulado por $A - 6I$ é não nulo. Logo, 6 é um autovalor de A, e os autovetores correspondentes a ele satisfazem a equação $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, ou $x_1 = -x_2 + 2x_3$. Conclui-se, com isso, que

$$E_6 = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Em $\mathbb{R}^2$, podemos dar uma interpretação geométrica à noção de autovetor. A equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ diz que os vetores $A\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}$ são paralelos. Assim, $\mathbf{x}$ é um autovetor de A se, e somente se. A transforma $\mathbf{x}$ em um vetor paralelo [ou, equivalentemente, se, e somente se, $T_A(\mathbf{x})$ é paralelo a $\mathbf{x}$, onde T_A é a transformação correspondente a A].

EXEMPLO 4 Encontre geometricamente os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Podemos observar que A é a matriz de uma reflexão F relativa ao eixo x (veja o Exemplo 2 na Seção 3.6). Os únicos vetores que F transforma em vetores paralelos a si mesmos são aqueles paralelos ao eixo y (ou seja, múltiplos de $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$), que são invertidos nos seus sentidos (autovalor -1), e os vetores paralelos ao eixo x (ou seja, múltiplos de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$), que são levados neles mesmos (autovalor 1) (veja a Figura 1). Correspondendo a essa interpretação geométrica, temos que $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$ são os autovalores de A, e seus auto-subespaços correspondentes são

$$E_{-1} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{e} \quad E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

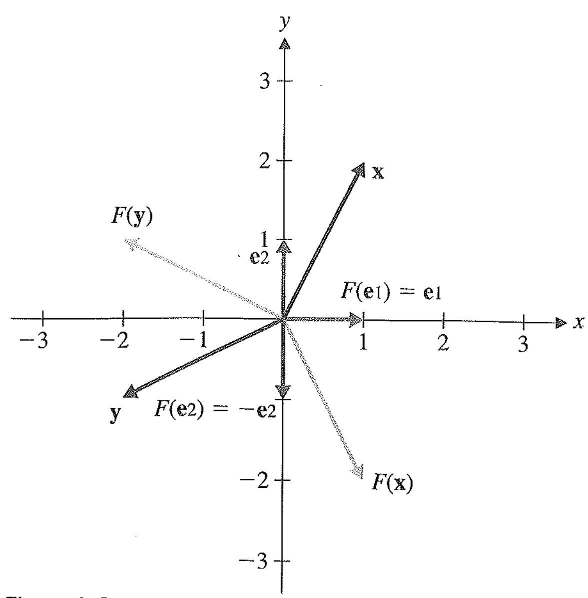


Figura 1 Os autovetores de uma reflexão

Uma outra maneira de pensar geometricamente em autovetores é por meio de desenhos de $\mathbf{x}$ e $A\mathbf{x}$ colocados lado a lado.[1] Nessa situação, $\mathbf{x}$ será um autovetor de A se, e somente se, $\mathbf{x}$ e $A\mathbf{x}$ ficarem alinhados. Na Figura 2, $\mathbf{x}$ é um autovetor de A, mas $\mathbf{y}$ não é.

Se $\mathbf{x}$ é um autovetor de A correspondente ao autovalor λ, então todo múltiplo não nulo de $\mathbf{x}$ também o é. Logo, para procurar geometricamente autovetores, basta considerar o efeito de A sobre vetores *unitários*. A Figura 3(a) mostra o que acontece quando transformamos vetores por meio da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ do Exemplo 1 e desenhamos os vetores transformados colocando sua origem sobre a extremidade final dos respectivos vetores iniciais, como na Figura 2.

Podemos ver que o vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ é um autovetor, mas também podemos observar que parece haver mais um autovetor no segundo quadrante. De fato isso ocorre, sendo ele o vetor $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

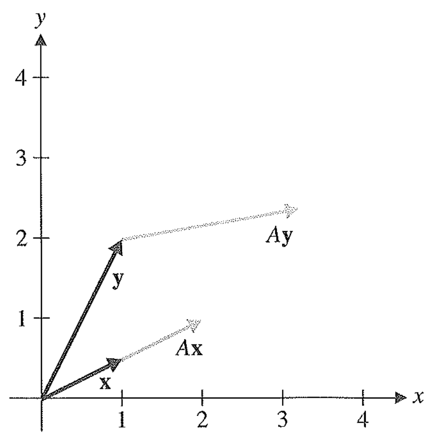


Figura 2

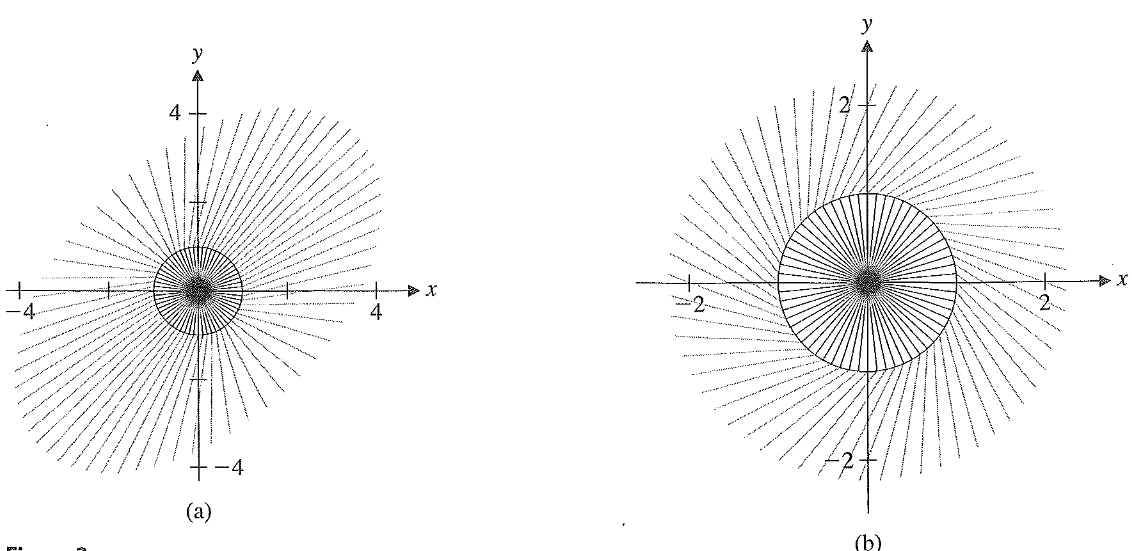


Figura 3

[1] A discussão a seguir é baseada no artigo "Eigenpictures: Picturing the eigenvector problem", de Steven Schonefeld, publicado em *The college mathematics journal 26* (1996), pp. 316-319.

Na Figura 3(b), vemos o que acontece quando usamos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Neste caso, não há nenhum autovetor!

Agora já sabemos como encontrar autovetores, considerando que sejam conhecidos seus correspondentes autovalores, e temos também uma interpretação geométrica para eles – mas ainda resta uma questão: como encontrar o primeiro autovalor de uma matriz? A chave é observar que λ é um autovalor de A se, e somente se, o subespaço anulado por $A - \lambda I$ for não trivial.

Lembremos, da Seção 3.4, que o determinante de uma matriz 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é dado pela expressão det $A = ad - bc$, e A é invertível se, e somente se, det A não for nulo. Além disso, o Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis garante que a matriz determina um subespaço anulado não trivial se, e somente se, ela for não invertível – portanto, se, e somente se, o seu determinante for igual a zero. Colocando juntos todos esses fatos, vemos que (pelo menos para matrizes 2×2) λ é um autovalor de A se, e somente se, det $(A - \lambda I) = 0$. Esse fato caracteriza os autovalores, e a seguir iremos generalizá-lo para matrizes quadradas de tamanho arbitrário. No momento, entretanto, vejamos como usá-lo com matrizes 2×2.

EXEMPLO 5 Encontre todos os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ do Exemplo 1.

SOLUÇÃO: As observações anteriores mostram que precisamos determinar todas as soluções λ da equação det $(A - \lambda I) = 0$. Como

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

precisamos resolver a equação do segundo grau $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$. Encontramos facilmente os valores $\lambda = 4$ e $\lambda = 2$ como soluções dessa equação. São esses, portanto, os autovalores de A. [Você vê como eles aparecem na Figura 3(a)?]

Observação ◆ Você deve lembrar que uma equação polinomial com coeficientes reais (como a equação do segundo grau do Exemplo 5) pode não admitir raízes reais; neste caso, ela possui raízes *complexas*. (Veja o Apêndice C.) Também é possível calcular autovalores e autovetores quando os elementos da matriz são de $\mathbb{Z}_p$, com p primo. Assim, é importante especificar o contexto no qual pretendemos trabalhar antes de determinar os autovalores de uma matriz. A menos que seja expresso o contrário, consideraremos como números *reais* os autovalores de uma matriz composta igualmente por reais.

EXEMPLO 6 Interprete a matriz do Exemplo 5 como uma matriz sobre $\mathbb{Z}_3$ e encontre autovalores nesse corpo.

SOLUÇÃO: A resolução procede exatamente como antes, exceto pelo fato de trabalharmos com inteiros módulo 3. Portanto, a equação $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ se transforma em $\lambda^2 + 2 = 0$. Esta última é equivalente a $\lambda^2 = -2 = 1$, e obtemos $\lambda = 1$ e $\lambda = -1 = 2$ como autovalores em $\mathbb{Z}_3$. (Confira que obteríamos a mesma resposta se *primeiramente* reduzíssemos A, módulo 3, para obter $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e depois trabalhássemos com essa matriz.)

EXEMPLO 7 Determine os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (a) sobre $\mathbb{R}$ e (b) sobre os números complexos $\mathbb{C}$.

SOLUÇÃO: Precisamos resolver a equação

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

a + bi (a) Sobre $\mathbb{R}$, ela não admite soluções, logo, A não possui autovalores reais.

(b) Sobre $\mathbb{C}$, as soluções são $\lambda = i$ e $\lambda = -i$. (Veja o Apêndice C.)

Na próxima seção, estenderemos a noção de determinante de matrizes 2×2 a matrizes $n\times n$, o que nos permitirá determinar autovalores para matrizes quadradas arbitrárias. (De fato, isso não é bem verdade, mas poderemos ao menos ser capazes de encontrar, para cada matriz especificada, uma equação polinomial cujas soluções sejam os autovalores da matriz.)

◆ EXERCÍCIOS 4.2 ◆

Nos Exercícios de 1 a 6, mostre que $\mathbf{v}$ *é um autovetor de* A *e determine o autovalor correspondente.*

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 7 a 12, mostre que λ *é um autovalor de* A *e encontre um autovetor correspondente a esse* λ.

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \lambda = 3$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \lambda = -2$

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \lambda = 1$

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \lambda = 4$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = -1$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = 2$

Nos Exercícios de 13 a 18, encontre os autovalores e autovetores de A *geometricamente.*

13. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (reflexão relativa ao eixo y)

14. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (reflexão relativa à reta $y = x$)

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (projeção sobre o eixo x)

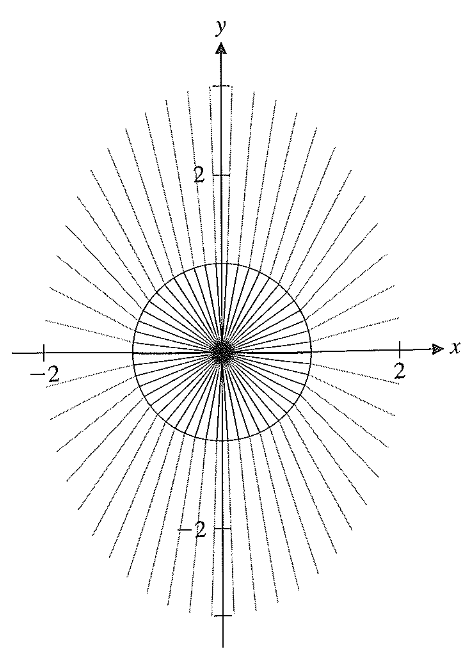
16. $A = \begin{bmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$ (projeção sobre a reta que passa pela origem e tem vetor diretor $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$)

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (ampliação por um fator 2 horizontalmente e por um fator 3 verticalmente)

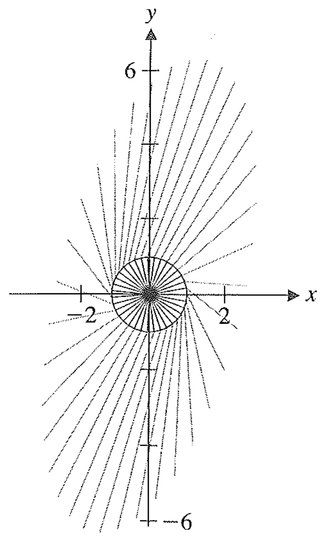
18. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (rotação de 90° a partir da origem e no sentido anti-horário)

Nos Exercícios de 19 a 22, os vetores unitários $\mathbf{x}$ *do* $\mathbb{R}^2$ *e suas imagens* $A\mathbf{x}$ *sob a ação da matriz* 2×2 A *estão desenhados como na Figura 3: colocando-se as origens dos segundos de forma a coincidir com a extremidade final dos primeiros. Faça uma estimativa para os autovalores e autovetores de* A *de cada "autofigura".*

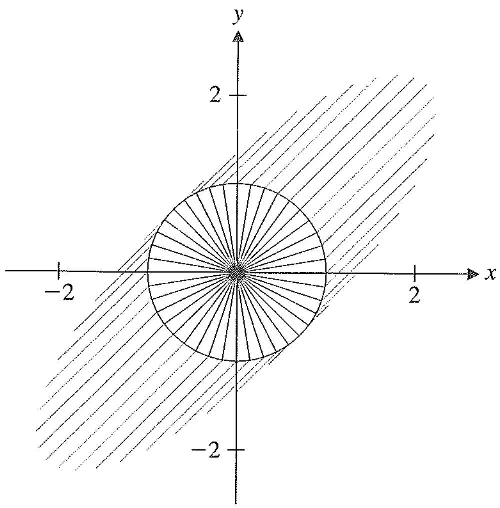
19.



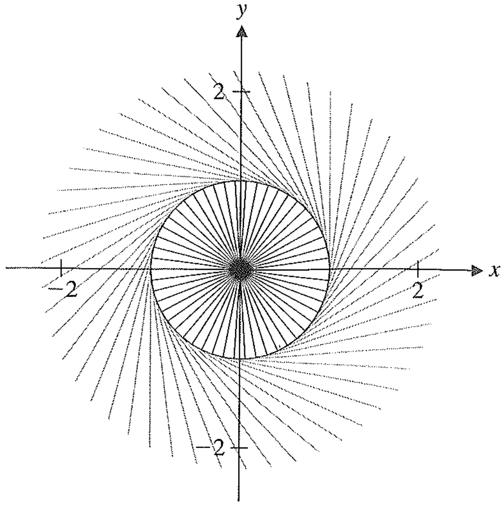
20.



21.



22.



Nos Exercícios de 23 a 26, utilize o método do Exemplo 5 para determinar todos os autovalores da matriz A. Explicite bases para cada um dos auto-subespaços correspondentes.

23. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **24.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **26.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 27 a 30, encontre todos os autovalores da matriz A sobre os números complexos $\mathbb{C}$. Determine bases para cada um dos auto-subespaços correspondentes.

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **28.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ **30.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 31 a 34, encontre todos os autovalores da matriz A sobre o $\mathbb{Z}_p$ indicado.

31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_3$ **32.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

33. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_5$ **34.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

35. (a) Mostre que os autovalores da matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

são soluções da equação do segundo grau $\lambda^2 - \text{tr}(A)\,\lambda + \det A = 0$, onde $\text{tr}(A)$ é o traço de A. (Veja o Exercício 43 na Seção 3.3.)

(b) Mostre que os autovalores da matriz A da parte (a) são

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\left(a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right)$$

36. Considere novamente a matriz A do Exercício 35. Descubra condições sobre a, b, c e d de forma que A tenha: (a) dois autovalores distintos, (b) um autovalor real e (c) nenhum autovalor real.

37. Mostre que os autovalores da matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

são $\lambda = a$ e $\lambda = d$, e encontre os auto-subespaços correspondentes.

38. Sejam a e b números reais. Encontre os autovalores e os auto-subespaços correspondentes de

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

sobre os números complexos.

4.3 Determinantes

Historicamente, os determinantes precederam as matrizes – um fato curioso à luz da maneira como a álgebra linear é ensinada hoje, com matrizes aparecendo antes de determinantes. Mesmo assim, os determinantes surgiram, de forma independente das matrizes, da solução de muitos problemas práticos, e a teoria dos determinantes já estava bem desenvolvida quase dois séculos antes de o estudo de matrizes despertar interesse por si só. No final desta seção, apresentamos uma pequena sinopse da história dos determinantes.

Lembremos que o determinante da matriz 2×2 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Encontramos primeiramente essa expressão ao determinar maneiras de calcular a inversa de uma matriz. Em particular, encontramos que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

O determinante de uma matriz A é também denotado por $|A|$, logo, para a matriz 2×2 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ também podemos escrever

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Aviso: Essa notação para o determinante é uma reminiscência da notação de valor absoluto. É fácil confundir $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, a notação de determinante, com $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, a notação da própria matriz. Não troque essas notações. Felizmente, o contexto usualmente deixa claro sobre de qual se trata.

Definimos o determinante de uma matriz 1×1 $A = [a]$ como

$$\det A = |a| = a$$

(Observe que temos que ser realmente cuidadosos com a notação aqui: neste caso, $|a|$ *não* indica o valor absoluto de a.) Como então poderíamos definir o determinante de uma matriz 3×3? Se você pedir ao seu CAS a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

a resposta será equivalente a

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

onde $\Delta = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$. Observe que

$$\begin{aligned} \Delta &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

e que cada um dos elementos da matriz que aparece na expressão anterior de A^{-1} nada mais é do que o determinante de uma submatriz 2×2 de A. De fato, isso é verdade, e é a base da definição de determinante de uma matriz 3×3. A definição é *recursiva*: o determinante de uma matriz 3×3 é definido em termos de determinantes de matrizes 2×2.

Definição Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Então, o ***determinante*** de A é o escalar

$$\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1}$$

Observe que cada determinante 2×2 multiplicado por um elemento da matriz A é obtido retirando de A a linha e a coluna que o contêm. Por exemplo, a primeira parcela é a_{11} multiplicado pelo determinante da submatriz obtida retirando-se de A a linha 1 e a coluna 1. Observe também que os sinais de mais e menos se alternam na equação (1). Se chamarmos de A_{ij} a submatriz de uma matriz A obtida pela eliminação da linha i e da coluna j, então podemos abreviar assim a equação (1):

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} \\ &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \end{aligned}$$

Para toda matriz quadrada A, $\det A_{ij}$ é chamado de ***(i, j)-menor complementar*** de A.

EXEMPLO 1 Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: Calculamos

$$\begin{aligned} \det A &= 5\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 5(0 - (-2)) + 3(3 - 4) + 2(-1 - 0) \\ &= 5(2) + 3(-1) + 2(-1) = 5 \end{aligned}$$

Com um pouco de prática, você poderá achar que consegue calcular mentalmente determinantes 2×2. Então, será desnecessário escrever a segunda linha na solução que acabamos de ver. ◈

Existe um outro método, para o cálculo do determinante de uma matriz 3×3, que é análogo ao método utilizado no caso de uma matriz 2×2: copie as duas primeiras colunas de A à direita da matriz e efetue os produtos dos elementos que estão nas seis diagonais mostradas a seguir. Atribua o sinal de mais para os produtos correspondentes às diagonais descendentes e o sinal de menos aos produtos das ascendentes (no sentido da esquerda para a direita).

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array} \tag{2}$$

Esse método nos dá

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

No Exercício 19, você será solicitado a verificar que esse resultado é equivalente ao da equação (1) para um determinante 3×3.

EXEMPLO 2 Calcule o determinante da matriz do Exemplo 1 utilizando o método mostrado em (2).

SOLUÇÃO: Acrescentamos a A suas duas primeiras colunas e calculamos os seis produtos indicados:

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} 0 & -10 & -9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 5 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{array} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} 0 & -12 & -2 \end{array} \end{array}$$

Somando os três produtos de baixo e subtraindo os três de cima, obtemos

$$\det A = 0 + (-12) + (-2) - 0 - (-10) - (-9) = 5$$

como antes.

Aviso: Estamos quase definindo determinantes para matrizes arbitrárias. No entanto, *não* existe método análogo ao do Exemplo 2 para matrizes de ordem maior. Ele é válido *somente* para matrizes 3×3.

Determinantes de Matrizes n×n

A definição de determinante de uma matriz 3×3 se estende naturalmente para matrizes quadradas arbitrárias.

Definição Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$, com $n \geqslant 2$. Então, o ***determinante*** de A é o escalar

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \end{aligned} \tag{3}$$

É conveniente combinar um determinante menor complementar com o seu sinal. Com essa finalidade, definimos ***(i, j)-cofator de A*** como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Com essa notação, a definição (3) pode ser reescrita como

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} \tag{4}$$

O Exercício 20 solicitará que você verifique que essa definição fornece corretamente a fórmula para o determinante de uma matriz 2×2 quando $n = 2$.

A definição (4) é freqüentemente referida como ***a expansão de cofatores pela primeira linha***. O fato curioso é que obtemos exatamente o mesmo resultado com a expansão de cofatores por *qualquer* linha (ou mesmo por *qualquer coluna*)! Resumimos esse fato como um teorema, mas deixamos sua prova para o final desta seção (já que ela é meio demorada e interromperia nossa discussão se a apresentássemos aqui).

◆ **TEOREMA 1 Teorema da Expansão de Laplace**

O determinante de uma matriz $n \times n$ $A = [a_{ij}]$, com $n \geqslant 2$, pode ser calculado por

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \end{aligned} \tag{5}$$

(que é a ***expansão de cofatores pela i-ésima linha***), e também por

$$\begin{aligned} \det A &= a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \end{aligned} \tag{6}$$

(a ***expansão de cofatores pela j-ésima coluna***).

Como $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, cada co-fator é igual, a menos do sinal mais ou menos, ao determinante menor complementar correspondente, sendo o sinal correto dado pelo termo $(-1)^{i+j}$. Uma forma rápida para determinar se o sinal é + ou – é lembrar que os sinais compõem um padrão de um "tabuleiro de xadrez":

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 3 Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

utilizando (a) expansão de co-fatores pela terceira linha e (b) expansão de co-fatores pela segunda coluna.

SOLUÇÃO: (a) Calculamos

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= 2\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2(-6) + 8 + 3(3) \\ &= 5 \end{aligned}$$

(b) Neste caso temos

$$\begin{aligned} \det A &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= -(-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3(-1) + 0 + 8 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Observe que na parte (b) do Exemplo 3 precisamos fazer menos quantidade de cálculos do que na parte (a), pois estávamos fazendo a expansão por uma coluna que continha um elemento nulo, a_{22}; portanto, não tivemos que calcular o valor de C_{22}. Ou seja, o Teorema da Expansão de Laplace é muito útil quando a matriz contém uma linha ou uma coluna com vários zeros, pois podemos minimizar o número de co-fatores a calcular, escolhendo convenientemente a linha ou coluna pela qual fazemos a expansão de co-fatores.

Pierre Simon Laplace (1749–1827) nasceu na Normandia, França. Esperava-se que se tornasse padre, até que seus talentos matemáticos foram observados na escola. Fez muitas contribuições importantes para o cálculo, a probabilidade e a astronomia. Foi um dos examinadores de Napoleão Bonaparte no Corpo de Artilharia Real, e depois, quando Napoleão estava no poder, teve uma breve atuação como ministro do Interior e ainda como chanceler do Senado. Foi agraciado com o título de Conde do Império em 1806 e recebeu o título de Marquês de Laplace em 1817.

EXEMPLO 4 Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: Note, primeiramente, que a coluna 3 tem apenas um elemento diferente de zero; devemos, portanto, fazer a expansão de co-fatores por essa coluna. Depois, observe que o padrão +/– atribui o sinal de menos a $a_{23} = 2$. Logo, teremos

$$\begin{aligned} \det A &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34} \\ &= 0(C_{13}) + 2C_{23} + 0(C_{33}) + 0(C_{34}) \\ &= -2\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Prosseguimos agora fazendo a expansão de co-fatores pela terceira linha do determinante anterior (a terceira coluna também teria sido uma boa escolha) para obter

$$\begin{aligned} \det A &= -2\left(-2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) \\ &= -2(-2(-8) - 5) \\ &= -2(11) = -22 \end{aligned}$$

(Observe que o padrão +/– para a matriz 3×3 menor complementar não é o que constava da matriz original, mas o de uma matriz 3×3 em geral.)

A expansão de Laplace é particularmente útil quando a matriz é triangular (superior ou inferior).

EXEMPLO 5 Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: Fazemos a expansão de co-fatores pela primeira coluna para obter

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(Omitimos todos os co-fatores correspondentes aos elementos nulos.) Novamente, fazemos a expansão pela primeira coluna:

$$\det A = 2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Continuamos a fazer expansões pelas primeiras colunas para completar os cálculos:

$$\det A = 2\cdot 3\cdot 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 1\cdot(5(-1) - 2\cdot 0) = 2\cdot 3\cdot 1\cdot 5\cdot(-1) = -30$$

O Exemplo 5 deve tê-lo convencido de que o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da sua diagonal. No Exercício 21, você será convidado a provar esse fato. Recordaremos esse resultado como um teorema.

◆ TEOREMA 2

O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da sua diagonal principal. Especificamente, se $A = [a_{ij}]$ é $n\times n$, então

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Observação:

- Em geral (isto é, a menos que a matriz seja triangular ou tenha alguma outra forma especial), calcular um determinante por expansão de co-fatores não é eficiente. Por exemplo, o determinante de uma matriz 3×3 tem $6 = 3!$ parcelas, cada uma envolvendo duas multiplicações, necessitando ainda cinco adições e subtrações para terminar os cálculos. Para uma matriz $n\times n$, haverá $n!$ parcelas, cada uma com $n - 1$ fatores, com ainda $n! - 1$ adições e subtrações. A quantidade total de operações é, assim,

$$T(n) = (n-1)n! + n! - 1 > n!$$

Mesmo o mais rápido dos supercomputadores não pode calcular o determinante de uma matriz de ordem moderadamente alta usando expansão de co-fatores. Para ilustrar, suponha que precisemos calcular um determinante 50×50. (Matrizes *muito* maiores que 50×50 são utilizadas para armazenar dados de imagens digitais como as que são transmitidas pela Internet ou tiradas por uma câmera digital.) Para calcular diretamente o determinante, precisaríamos, em geral, de mais de $50!$ operações, e $50! \approx 3\times 10^{64}$. Se tivéssemos um computador que pudesse realizar um trilhão (10^{12}) de operações por segundo, ele levaria aproximadamente 3×10^{52} segundos, ou quase 10^{45} anos, para terminar os cálculos. Colocando isso em perspectiva, considere que os astrônomos estimam que a idade do universo seja de pelo menos dez bilhões (10^{10}) de anos. Assim, mesmo para um computador muito rápido, o cálculo por expansão de co-fatores de um determinante 50×50 levaria mais do que quatro vezes a idade do universo!

Afortunadamente, existem outros métodos melhores – e agora passamos a desenvolver métodos computacionalmente mais eficazes para encontrar determinantes. Precisamos, primeiramente, dar uma olhada em algumas propriedades dos determinantes.

Propriedades dos Determinantes

A maneira mais eficiente para calcular determinantes é utilizando escalonamento de linhas. No entanto, nem toda operação elementar com linhas deixa inalterado o valor do determinante de uma matriz. O próximo teorema resume as principais propriedades que você precisa compreender para usar escalonamento de linhas de forma eficaz.

◆ TEOREMA 3

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada.

a. Se A tem uma linha (coluna) só com zeros, então det $A = 0$.
b. Se B é obtida de A pela troca de duas linhas (colunas), então det $B = -$det A
c. Se A tem duas linhas (colunas) idênticas, então det $A = 0$.
d. Se B é obtida pela multiplicação de uma linha (coluna) de A por k, então det $B = k$ det A.
e. Se A, B e C são idênticas, a menos pelo fato de que a i-ésima linha (coluna) de C é a soma das i-ésimas linhas (colunas) de A e B, então det $C =$ det $A +$ det B.
f. Se B difere de A por ter uma linha (coluna) que é a soma de um múltiplo de uma linha (coluna) de A com outra coluna de A, então det $B =$ det A.

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos (b) no Lema 14, ao final da seção. As provas das propriedades (a) e (f) são deixadas como exercícios. Provaremos as demais propriedades para linhas; as provas correspondentes para colunas são análogas.
(c) Se A tem duas linhas idênticas, chamemos de B a matriz obtida pela troca dessas linhas. Claramente, $B = A$, logo, det $B =$ det A. Por outro lado, por (b), det $B = -$det A. Portanto, det $A = -$det A, e assim, det $A = 0$.
(d) Suponha que a linha i de A seja multiplicada por k para produzir B, ou seja, $b_{ij} = ka_{ij}$ para $j = 1, ..., n$. Como os co-fatores C_{ij} dos elementos das i-ésimas linhas de A e de B são idênticos (por quê?), fazer a expansão de co-fatores pela i-ésima linha de B nos dá

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} ka_{ij}C_{ij} = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = k \det A$$

(e) Como em (d), os co-fatores C_{ij} dos elementos da i-ésima linha de A, B e C são idênticos. Além disso, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $j = 1, ..., n$. Fazemos a expansão de co-fatores pela i-ésima linha de C para obter

$$\det C = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}C_{ij} = \det A + \det B$$

◆

Observe que as propriedades (b), (d) e (f) estão relacionadas com operações elementares com linhas. Como a forma escalonada de uma matriz quadrada é necessariamente triangular superior, podemos combinar essas propriedades com o Teorema 2 para calcular determinantes de maneira eficiente. (Veja Investigação: Contagem de Operações — Uma Introdução à Análise de Algoritmos, no Capítulo 2, onde é mostrado que o escalonamento de linhas de uma matriz $n \times n$ emprega cerca de n^3 operações, número muito menor que as $n!$ envolvidas no caso da expansão de co-fatores.) Os próximos exemplos ilustram o cálculo de determinantes por meio de escalonamento de linhas.

EXEMPLO 6 Calcule o det A sendo

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO: (a) Utilizando a propriedade (f) e depois a propriedade (a), temos que

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} \overset{R_3+2R_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Escalonamos A como a seguir (existem outras maneiras de fazer isso):

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1/3}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_3-2R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} \overset{R_2\leftrightarrow R_4}{=} -(-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_3+4R_2 \\ R_4+2R_2}}{=} 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 15 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot 1\cdot(-1)\cdot 15\cdot(-13) = 585$$

Observação:

- Pelo Teorema 3, no processo de calcular determinantes podemos também usar operações elementares com colunas, ou ainda combinar convenientemente operações elementares com linhas e colunas. Por exemplo, no Exemplo 6(a), poderíamos ter começado somando a coluna 3 com a coluna 1 para criar um elemento 1 no canto superior esquerdo. De fato, o método utilizado era mais rápido, mas, em outros exemplos, operações com colunas podem apressar os cálculos. Mantenha isso em mente quando você calcular determinantes manualmente.

Determinantes de Matrizes Elementares

Lembre-se, da Seção 3.4, que matriz elementar é toda matriz obtida de uma matriz identidade na qual se faz uma operação elementar com linhas. Tomando $A = I_n$ no Teorema 3, chegamos ao seguinte teorema:

◆ TEOREMA 4

Seja E uma matriz elementar $n\times n$.

a. Se E é obtida pela troca de duas linhas em I_n, então $\det E = -1$.
b. Se E é obtida por multiplicação de uma linha de I_n por k, então $\det E = k$.
c. Se E é obtida pela soma de um múltiplo de uma linha de I_n com outra linha, então $\det E = 1$.

DEMONSTRAÇÃO: Como $\det I_n = 1$, aplicando (b), (d) e (f) do Teorema 3 chega-se imediatamente a (a), (b) e (c) do Teorema 4, respectivamente. ◆

A palavra *lema* é derivada do verbo grego *lambanein*, que significa "compreender". Na matemática, um lema é um "teorema de apoio", utilizado para provar um outro teorema, usualmente mais importante.

A seguir, relembramos que a multiplicação de uma matriz B por uma matriz elementar, *pela esquerda*, provoca, em B, a correspondente operação elementar com linhas. Podemos, portanto, parafrasear (b), (d) e (f) do Teorema 3, sucintamente, no lema a seguir, cuja prova é natural e é objeto do Exercício 43.

◆ LEMA 5

Seja B uma matriz $n \times n$ e E uma matriz elementar $n \times n$. Então:

$$\det(EB) = (\det E)(\det B)$$

Podemos usar o Lema 5 para provar o teorema principal desta seção, que fornece uma caracterização da invertibilidade em termos de determinantes.

◆ TEOREMA 6

Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Considere A como uma matriz $n \times n$ e R como a forma escalonada (escalonamento de linhas) de A. Mostraremos primeiro que $\det A \neq 0$ se, e somente se, $\det R \neq 0$. Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_r$ as matrizes elementares correspondentes às operações elementares com linhas necessárias para transformar A em R. Então:

$$E_r \cdots E_2 E_1 A = R$$

Tomando determinantes dos dois lados e aplicando o Lema 5 sucessivamente, obtemos

$$(\det E_r) \cdots (\det E_2)(\det E_1)(\det A) = \det R$$

Pelo Teorema 4, os determinantes de todas as matrizes elementares são diferentes de zero. Concluímos, assim, que $\det A \neq 0$ se, e somente se, $\det R \neq 0$.

Vamos agora admitir que A é invertível. Então, pelo Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis, $R = I_n$ e $\det R = 1 \neq 0$. Portanto, temos também que $\det A \neq 0$. Reciprocamente, se $\det A \neq 0$, então $\det R \neq 0$, e assim, pelo Teorema 3(a), R não pode conter uma linha formada somente de zeros. Segue daí que R deve ser exatamente I_n (por quê?), e, portanto, A é invertível – novamente pelo Teorema Fundamental citado. ◆

Determinantes e Operações com Matrizes

Agora, tentaremos examinar qual relação existe (se houver) entre determinantes e algumas das operações básicas com matrizes. Especificamente, gostaríamos de encontrar fórmulas para $\det(kA)$, $\det(A + B)$, $\det(AB)$, $\det(A^{-1})$ e $\det(A^T)$ em termos do $\det A$ e do $\det B$.

O Teorema 3(d) *não* diz que $\det(kA) = k \det A$. A relação correta entre a multiplicação de matriz por escalar e determinante é dada pelo teorema a seguir.

◆ TEOREMA 7

Se A é uma matriz $n \times n$, então

$$\det(kA) = k^n \det A$$

No Exercício 44, você será solicitado a demonstrar esse teorema.

Infelizmente, não existe fórmula simples para $\det(A + B)$, e, em geral, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$. (Escolha duas matrizes 2×2 e verifique esse fato.) É, assim, uma grata surpresa a descoberta de que os determinantes são bastante compatíveis com a multiplicação de matrizes. De fato, temos a bela fórmula a seguir, devida a Cauchy.

◆ TEOREMA 8

Se A e B são matrizes $n \times n$, então

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

DEMONSTRAÇÃO: Consideramos dois casos: A invertível e A não invertível.

Se A é invertível, então, pelo Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis, A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares – digamos,

$$A = E_1E_2 \cdots E_k$$

Então, $AB = E_1E_2...E_kB$, por isso, k aplicações do Lema 5 nos dão

$$\det(AB) = \det(E_1E_2 \cdots E_kB) = (\det E_1)(\det E_2) \cdots (\det E_k)(\det B)$$

Continuando a aplicar o Lema 5, obtemos

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) nasceu em Paris e estudou engenharia, mas mudou para a matemática por causa de sua saúde débil. Foi um matemático brilhante e prolífico. Publicou cerca de 700 artigos, muitos versando sobre problemas bastante difíceis. Seu nome pode ser encontrado em vários teoremas e definições nas áreas de equações diferenciais, séries infinitas, teorias das probabilidades, álgebra e física. Ele se destaca por ter introduzido o rigor no Cálculo diferencial e integral, lançando os fundamentos para o ramo da matemática hoje conhecido como análise. Politicamente conservador, Cauchy era monarquista, e, em 1830, seguiu Charles X no exílio. Retornou à França em 1838, mas não à sua posição na Sorbonne, até a universidade descartar sua norma de exigir um juramento de lealdade ao novo rei.

$$\det(AB) = \det(E_1E_2 \cdots E_k)\det B = (\det A)(\det B)$$

Por outro lado, se A não é invertível, então AB também não é, pelo Exercício 47 da Seção 3.4. Assim, pelo Teorema 6, $\det A = 0$ e $\det(AB) = 0$. Conseqüentemente, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, já que os dois lados valem zero. ◆

EXEMPLO 7 Aplicando o Teorema 8 a $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e a $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, vemos que

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 16 & 5 \end{bmatrix}$$

e $\det A = 4$, $\det B = 3$ e $\det(AB) = 12 = 4 \cdot 3 = (\det A)(\det B)$, como esperado. (Confira essas afirmações!)

O próximo teorema fornece uma bela relação entre o determinante de uma matriz invertível e o determinante de sua inversa.

◆ TEOREMA 9

Se A é invertível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

DEMONSTRAÇÃO: Como A é invertível, $AA^{-1} = I$, logo, $\det(AA^{-1}) = \det I = 1$. Portanto, $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$, pelo Teorema 8, e como $\det A \neq 0$ (por quê?), a divisão por $\det A$ nos dá o resultado. ◆

EXEMPLO 8 Confirme o Teorema 9 para a matriz A do Exemplo 7.

SOLUÇÃO: Calculamos

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

logo,

$$\det A^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{\det A}$$

Observação: ◆ A beleza do Teorema 9 vem do fato de, algumas vezes, não precisarmos conhecer *qual é* a inversa de uma matriz, mas somente se ela *existe*, ou ainda saber o valor do seu determinante. Para a matriz A dos últimos dois exemplos, uma vez calculado que $\det A = 4 \neq 0$, imediatamente podemos deduzir que A é invertível e que $\det A^{-1} = \frac{1}{4}$, não sendo necessário o cálculo de A^{-1}.

Passamos a relacionar o determinante de uma matriz A ao determinante de sua transposta A^T. Como as linhas de A^T são exatamente as colunas de A, calcular $\det A^T$ pela expansão de co-fatores pela primeira linha é o mesmo que calcular $\det A$ pela expansão de co-fatores pela primeira coluna, o que o Teorema da Expansão de Laplace nos permite fazer. Assim, obtemos o resultado a seguir.

◆ TEOREMA 10

Para qualquer matriz quadrada A,

$$\det A = \det A^T$$

A Regra de Cramer e a Matriz Adjunta

Gabriel Cramer (1704–1752) foi um matemático suíço. A regra que leva seu nome foi publicada em 1750, em seu livro *Introdução à análise de curvas algébricas*. No entanto, já em 1730, casos especiais da regra eram do conhecimento de outros matemáticos, incluindo o escocês Colin Maclaurin (1698–1746), talvez o maior dos matemáticos britânicos que foram os "sucessores de Newton".

Nesta seção, vamos desenvolver duas fórmulas úteis que relacionam determinantes às soluções de sistemas lineares e à inversa de uma matriz. A primeira delas, a ***Regra de Cramer***, dá uma fórmula que descreve a solução de um certo tipo de sistemas de n equações lineares com n variáveis, inteiramente em termos de determinantes. Mesmo esse resultado tendo pouco valor prático para além dos sistemas 2×2, ele tem uma importância teórica muito grande.

Vamos precisar de algumas notações novas para esse resultado e sua prova. Para uma matriz $n\times n$ A e para um vetor $\mathbf{b}$ do $\mathbb{R}^n$, denotamos por $A_i(\mathbf{b})$ a matriz obtida pela troca da i-ésima coluna de A por $\mathbf{b}$. Ou seja,

$$A_i(\mathbf{b}) = [\mathbf{a}_1 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Coluna } i}}{\mathbf{b}} \cdots \mathbf{a}_n]$$

◆ TEOREMA 11 A Regra de Cramer

Sejam A uma matriz $n\times n$ invertível e $\mathbf{b}$ um vetor do $\mathbb{R}^n$. Então, a única solução $\mathbf{x}$ do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é dada por

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det A} \quad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

DEMONSTRAÇÃO: As colunas da matriz identidade $I = I_n$ são os vetores unitários canônicos do $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então

$$\begin{aligned} AI_i(\mathbf{x}) &= A[\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{x} \ \cdots \ \mathbf{e}_n] = [A\mathbf{e}_1 \ \cdots \ A\mathbf{x} \ \cdots \ A\mathbf{e}_n] \\ &= [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{b} \ \cdots \ \mathbf{a}_n] = A_i(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 8,

$$(\det A)(\det I_i(\mathbf{x})) = \det(AI_i(\mathbf{x})) = \det(A_i(\mathbf{b}))$$

Mas

$$\det I_i(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i$$

como pode ser verificado por meio da expansão de co-fatores pela i-ésima linha. Assim, $(\det A)x_i = \det(A_i(\mathbf{b}))$, e o resultado é obtido pela divisão dos dois lados por $\det A$ (que não é zero, já que A é invertível). ◆

EXEMPLO 9 Utilize a Regra de Cramer para resolver o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: Calculamos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad \det(A_1(\mathbf{b})) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \quad \text{e} \quad \det(A_2(\mathbf{b})) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Pela Regra de Cramer,

$$x_1 = \frac{\det(A_1(\mathbf{b}))}{\det A} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\det(A_2(\mathbf{b}))}{\det A} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

◆

Observação: ◆ Como foi apontado antes, a Regra de Cramer é ineficiente, do ponto de vista computacional, para sistemas de equações que não sejam pequenos, pois envolve o cálculo de vários determinantes. O esforço para calcular esses determinantes, mesmo por métodos muito eficientes, seria mais bem empregado ao utilizarmos o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema diretamente.

O resultado final desta seção é uma fórmula que fornece a inversa de uma matriz em termos de determinantes. Essa fórmula é sugerida pela fórmula da inversa de uma matriz 3×3, a qual foi dada sem demonstração no início desta mesma seção. Assim, chegamos a um círculo vicioso inconveniente.

Tentemos descobrir a fórmula diretamente. Se A é uma matriz invertível $n \times n$, então sua inversa é a (única) matriz X que satisfaz a equação $AX = I$. Resolvendo uma por uma as n equações geradas por coluna, e sendo

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}$$

então, $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ ($j = 1, \ldots, n$) e, pela Regra de Cramer,

$$x_{ij} = \frac{\det(A_i(\mathbf{e}_j))}{\det A}$$

No entanto,

$$\begin{array}{c} \\ \det(A_i(\mathbf{e}_j)) = \end{array} \begin{array}{c} \hphantom{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad} i\text{-ésima coluna} \\ \hphantom{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad} \downarrow \hphantom{\text{-ésima coluna}} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & 1 & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} = (-1)^{j+i} \det A_{ji} = C_{ji}$$

que é o (j, i)-co-fator de A.

Daí segue que $x_{ij} = (1/\det A)C_{ji}$, logo, $A^{-1} = X = (1/\det A)\,[C_{ji}] = (1/\det A)\,[C_{ij}]^T$. Em palavras, a matriz inversa de A é a *transposta* da matriz dos co-fatores de A, dividida pelo determinante de A.

A matriz

$$[C_{ji}] = [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada de ***matriz adjunta*** de A e é denotada por adj A. O resultado que acabamos de provar pode ser enunciado como a seguir.

◆ TEOREMA 12

Considere A como uma matriz invertível $n \times n$. Então:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

EXEMPLO 10 Utilize o método da matriz adjunta para calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: Calculamos $\det A = -2$ e os nove co-fatores

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -18 \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10 \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3 \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6 \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

A matriz adjunta é a *transposta* da matriz dos co-fatores – a saber,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -18 & 10 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 10 & -6 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -18 & 3 & 10 \\ 10 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -18 & 3 & 10 \\ 10 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -\frac{3}{2} & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

que é a mesma resposta que obtivemos no Exemplo 8 (com menos esforço) da Seção 3.4. ◈

Demonstração do Teorema da Expansão de Laplace

Infelizmente, não há nenhuma prova curta e fácil do Teorema da Expansão de Laplace. A prova que damos a seguir tem o mérito de ser relativamente natural. Vamos quebrá-la em vários passos, sendo o primeiro deles o que prova serem iguais as expansões de co-fatores pela primeira linha ou pela primeira coluna de uma dada matriz.

◆ LEMA 13

Seja A uma matriz $n \times n$. Então:

$$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n} = \det A = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \cdots + a_{n1}C_{n1} \tag{7}$$

DEMONSTRAÇÃO: Provamos esse lema por indução em n. Para $n = 1$, o resultado é trivial. Assumimos agora ser verdadeiro o resultado para matrizes $(n-1)\times(n-1)$: essa é a nossa hipótese de indução. Observe que, pela definição de co-fator (ou de menor complementar), todos os termos com a_{11} estão incluídos na parcela $a_{11}C_{11}$. Podemos, assim, ignorar os termos que contêm a_{11}.

A i-ésima parcela na expressão à direita da equação (7) é $a_{i1}C_{i1} = a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1}$. Façamos agora a expansão de co-fatores do det A_{i1} pela primeira linha:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

O j-ésimo termo nessa expansão do det A_{i1} é $a_{1j}(-1)^{1+j-1}$ det $A_{1i,1j}$, onde a notação $A_{kl,rs}$ denota a submatriz de A obtida pela supressão das linhas k e l e das colunas r e s. Combinando tudo isso, vemos que o termo que contém $a_{i1}a_{1j}$ na expressão à direita da equação (7) é

$$a_{i1}(-1)^{i+1}a_{1j}(-1)^{1+j-1} \det A_{1i,1j} = (-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j} \det A_{1i,1j}$$

Qual é o termo que contém $a_{i1}a_{1j}$ na expressão à esquerda da equação (7)? O fator a_{1j} ocorre na j-ésima parcela, $a_{1j}C_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j}$ det A_{1j}. Pela hipótese de indução, podemos fazer a expansão de co-fatores do det A_{1j} pela primeira coluna:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

O i-ésimo termo nessa expansão do det A_{1j} é $a_{i1}(-1)^{(i-1)+1}$ det $A_{1i,1j}$, logo, o termo que contém $a_{i1}a_{1j}$ na expressão à esquerda da equação (7) é

$$a_{1j}(-1)^{1+j}a_{i1}(-1)^{(i-1)+1} \det A_{1i,1j} = (-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j} \det A_{1i,1j}$$

o que estabelece que as expressões à esquerda e à direita da equação (7) são equivalentes. ◆

Provaremos agora a propriedade (b) do Teorema 3.

◆ LEMA 14

Seja A uma matriz $n\times n$ e seja B obtida pela troca de duas linhas (colunas) de A, uma com a outra. Então:

$$\det B = -\det A$$

DEMONSTRAÇÃO: Mais uma vez, a prova é por indução em n. O resultado pode ser facilmente verificado diretamente quando $n = 2$. Vamos assumir agora que ele seja verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Provamos que o resultado é verdadeiro para matrizes $n\times n$. Primeiro, mostramos que ele vale quando duas linhas adjacentes são trocadas – digamos, linhas r e $r+1$.

Pelo Lema 13, podemos encontrar o valor do det B fazendo sua expansão de co-fatores pela primeira coluna. O i-ésimo termo dessa expansão é $(-1)^{1+i}b_{i1}$ det B_{i1}. Se $i \neq r$ e $i \neq r+1$, então $b_{i1} = a_{i1}$ e B_{i1} é uma submatriz $(n-1)\times(n-1)$ idêntica a A_{i1}, exceto pelo fato de que duas linhas adjacentes foram intercambiadas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Assim, pela hipótese de indução, det $B_{i1} = -$det A_{i1}, se $i \neq r$ e $i \neq r+1$.

Se $i = r$, $b_{i1} = a_{r+1,1}$ e $B_{i1} = A_{r+1,1}$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Linha } i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Portanto, a r-ésima parcela do det B é

$$(-1)^{r+1}b_{r1}\det B_{r1} = (-1)^{r+1}a_{r+1,1}\det A_{r+1,1} = -(-1)^{(r+1)+1}a_{r+1,1}\det A_{r+1,1}$$

Analogamente, se $i = r + 1$, então $b_{i1} = a_{r1}$, $B_{i1} = A_{r1}$ e a $(r + 1)$-ésima parcela no det B é

$$(-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}\det B_{r+1,1} = (-1)^{r}a_{r1}\det A_{r1} = -(-1)^{r+1}a_{r1}\det A_{r1}$$

Em outras palavras, os r e $(r + 1)$-ésimos termos na expansão de co-fatores do det B pela sua primeira coluna *têm os sinais opostos* aos dos $(r + 1)$ e r-ésimos termos, respectivamente, na expansão de co-fatores do det A também por sua primeira coluna.

Substituindo todos esses resultados no det B e usando novamente o Lema 13, obtemos

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}\det B_{i1}\\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}\det B_{i1} + (-1)^{r+1}b_{r1}\det B_{r1} + (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}\det B_{r+1,1}\\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}(-\det A_{i1}) - (-1)^{(r+1)+1}a_{r+1,1}\det A_{r+1,1} - (-1)^{r+1}a_{r1}\det A_{r1}\\
&= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1}\\
&= -\det A
\end{aligned}$$

Isso prova o enunciado para matrizes $n\times n$ quando linhas adjacentes são intercambiadas. Para ver que o resultado vale para intercâmbios arbitrários de duas linhas, precisamos somente notar que, por exemplo, as linhas r e s, com $r < s$, podem ser trocadas efetuando-se $2(s - \mathrm{r}) - 1$ intercâmbios de linhas adjacentes (veja o Exercício 67). Como o número de intercâmbios é sempre *ímpar* e cada um deles troca o sinal do determinante, o efeito final será sempre o da troca do sinal inicial, como dito no enunciado.

A prova para trocas de colunas é inteiramente análoga, exceto pelo fato de fazermos as expansões pela linha 1 no lugar da coluna 1. ◈

Podemos agora provar o Teorema da Expansão de Laplace.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1: Seja B a matriz obtida a partir de A pelo ato de mover a linha i de A para o topo, usando $i - 1$ intercâmbios de linhas adjacentes. Pelo Lema 14, det $B = (-1)^{i-1}$ det A. Mas $b_{1j} = a_{ij}$ e $B_{1j} = A_{ij}$ para $j = 1, \dots, n$.

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Assim,

$$\det A = (-1)^{i-1} \det B = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_{1j}$$
$$= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

o que fornece a fórmula para a expansão de co-fatores do det A pela linha i.

A prova para a expansão por coluna é análoga, envolvendo o Lema 13 para que possamos usar a expansão por coluna no lugar da expansão por linha (veja o Exercício 68). ◆

Criança prodígio autodidata, Takakazu Seki Kowa (1642–1708) era descendente de uma família de guerreiros samurais. Além de ter descoberto os determinantes, ele escreveu sobre equações diofantinas, quadrados mágicos e números de Bernoulli (antes de Bernoulli), além de, aparentemente, ter feito descobertas em cálculo.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) nasceu em Leipzig e estudou Direito, Teologia, Filosofia e Matemática. É provavelmente mais conhecido por ter desenvolvido (como Newton, independentemente) as principais idéias do cálculo diferencial e integral. No entanto, também são impressionantes suas contribuições para outros ramos da matemática. Ele desenvolveu a noção de determinante, conhecia versões da Regra de Cramer e do Teorema da Expansão de Laplace antes que outros tivessem dado os créditos a eles e lançou os fundamentos para a teoria de matrizes, por meio do trabalho que fez sobre as formas quadráticas. Leibniz foi também o primeiro a desenvolver o sistema de numeração binária da aritmética. Acreditava na importância de uma boa notação e, além da notação familiar para derivadas e integrais, introduziu uma espécie de notação com índices subscritos para os coeficientes de um sistema linear, que é, essencialmente, a notação que usamos hoje.

Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898) é muito mais conhecido por seu codinome, Lewis Carroll, com o qual assinou os livros *Alice no país das maravilhas* e *Através do espelho*. Ele também escreveu vários livros de matemática e coleções de quebra-cabeças lógicos.

Uma Breve História dos Determinantes

Como observado no início desta seção, a história dos determinantes precede a das matrizes. De fato, determinantes foram introduzidos primeiro, de forma independente, por Seki, em 1683, e por Leibniz, em 1693. Em 1748, determinantes apareceram no *Tratado sobre álgebra*, de Maclaurin, incluindo um tratamento da Regra de Cramer até o caso 4×4. Em 1750, o próprio Cramer provou o caso geral de sua regra, aplicando-a ao ajuste de curvas, e, em 1772, Laplace deu uma prova de seu teorema de expansão.

O termo *determinante* só foi cunhado em 1801, quando utilizado por Gauss. Cauchy foi o primeiro a usar determinantes no sentido moderno, em 1812. Ele foi, de fato, o responsável pelo desenvolvimento de grande parte da teoria inicial de determinantes, incluindo muitos resultados importantes que já mencionamos: a regra do produto para determinantes, o polinômio característico e a noção de matriz diagonalizável. Determinantes só ficaram amplamente conhecidos a partir de 1841, quando Jacobi os popularizou, embora no contexto de funções de várias variáveis, que encontramos em um segundo curso de cálculo. (Sylvester, por volta de 1850, chamou de "jacobianos" esses tipos de determinantes – termo utilizado até hoje.)

No final do século XIX, a teoria dos determinantes havia se desenvolvido a ponto de livros inteiros serem dedicados a ela, incluindo, em 1867, o livro *Uma teoria elementar de determinantes*, de Dodgson, e uma coleção monumental de cinco volumes de Thomas Muir, que apareceu no início do século XX. Mesmo que sua história seja fascinante, determinantes hoje têm um interesse mais teórico do que prático. A Regra de Cramer é um método incorrigivelmente ineficaz na resolução de sistemas de equações lineares, enquanto métodos numéricos substituíram todo o uso que antes era feito de determinantes no cálculo de autovalores. Os determinantes são, no entanto, empregados para propiciar aos estudantes uma compreensão inicial do polinômio característico (como nas Seções 4.2 e 4.4).

◆ EXERCÍCIOS 4.3 ◆

Calcule os determinantes dos Exercícios de 1 a 6 usando expansão de co-fatores pela primeira linha e pela primeira coluna.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Calcule os determinantes dos Exercícios de 7 a 15 usando expansão de co-fatores por qualquer linha ou coluna que pareça conveniente.

7. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \operatorname{tg}\theta \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ a & 0 & b \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \end{vmatrix}$

Nos Exercícios de 16 a 18, calcule os determinantes 3×3 indicados, usando o método do Exemplo 2.

16. O determinante do Exercício 6.

17. O determinante do Exercício 8.

18. O determinante do Exercício 11.

19. Verifique que o método indicado em (2) coincide com a equação (1) para um determinante 3×3.

20. Verifique que a definição (4) coincide com a definição de um determinante 2×2, quando $n = 2$.

21. Prove o Teorema 2. (*Sugestão*: seria apropriada uma prova por indução neste caso.)

Nos Exercícios de 22 a 25, encontre o determinante indicado usando operações elementares com linhas e/ou colunas e o Teorema 3 para reduzir a matriz a uma matriz escalonada.

22. O determinante do Exercício 1.

23. O determinante do Exercício 9.

24. O determinante do Exercício 13.

25. O determinante do Exercício 14.

Nos Exercícios de 26 a 34, empregue propriedades de determinantes para calcular o valor do determinante indicado por inspeção direta. Explique seu raciocínio.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Nos Exercícios de 35 a 40, encontre os determinantes, assumindo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

35. $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ **36.** $\begin{vmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ **38.** $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix}$

41. Prove o Teorema 3(a). **42.** Prove o Teorema 3(f).

43. Prove o Lema 5. **44.** Prove o Teorema 7.

Nos Exercícios 45 e 46, utilize o Teorema 6 para encontrar todos os valores de k para os quais A é invertível.

45. $A = \begin{bmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix}$ **46.** $A = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 2 & k \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 47 a 52, assuma que A e B sejam matrizes n×n com det A = 3 e det B = –2. Ache os determinantes indicados.

47. $\det(AB)$ **48.** $\det(A^2)$ **49.** $\det(B^{-1}A)$

50. $\det(2A)$ **51.** $\det(3B^T)$ **52.** $\det(AA^T)$

Nos Exercícios de 53 a 56, A e B são matrizes n×n.

53. Prove que $\det(AB) = \det(BA)$.

54. Se B é invertível, prove que $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$.

55. Se A é idempotente (ou seja, se $A^2 = A$), ache todos os possíveis valores do $\det(A)$.

56. Uma matriz quadrada A é chamada de ***nilpotente*** se $A^m = 0$ para algum $m > 1$. (A palavra *nilpotente* vem do latim *nil*, que significa "nenhum", e *potere*, que significa "potência". Uma matriz nilpotente, assim, tem a propriedade de virar "uma nulidade" – ou seja, a matriz nula – quando elevada a alguma potência.) Ache todos os valores possíveis do $\det(A)$, se A for nilpotente.

Nos Exercícios de 57 a 60, use a Regra de Cramer para resolver os sistemas de equações lineares dados.

57. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$ **58.** $\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}$

59. $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ y + z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$ **60.** $\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x - y \quad &= 3 \end{aligned}$

Nos Exercícios de 61 a 64, use o Teorema 12 para calcular a inversa da matriz dos coeficientes para os exercícios mencionados.

61. Exercício 57 **62.** Exercício 58

63. Exercício 59 **64.** Exercício 60

65. Se A é uma matriz $n\times n$ invertível, mostre que adj A também é invertível e que

$$(\text{adj } A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A = \text{adj } (A^{-1})$$

66. Se A é uma matriz $n\times n$, prove que

$$\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$$

67. Verifique que, se $r < s$, então as linhas r e s de uma matriz podem ser intercambiadas com a realização de $2(s - r) - 1$ intercâmbios de linhas adjacentes.

68. Prove que o Teorema da Expansão de Laplace se verifica para a expansão de co-fatores pela j-ésima coluna.

69. Seja A uma matriz quadrada que pode ser decomposta como

$$A = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline O & S \end{array}\right]$$

onde P e S são matrizes quadradas. Diz-se que essa matriz está na ***forma de bloco triangular (superior)***.

Prove que

$$\det A = (\det P)(\det S)$$

(*Sugestão*: tente uma prova por indução no número de linhas de P.)

70. (a) Dê um exemplo para mostrar que, se A pode ser repartida como

$$A = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right]$$

onde P, Q, R e S são todas matrizes quadradas, então não é necessariamente verdadeiro que

$$\det A = (\det P)(\det S) - (\det Q)(\det R)$$

(b) Assuma que A seja decomposta como na parte (a), e que P seja invertível. Considere

$$B = \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & O \\ \hline -RP^{-1} & I \end{array}\right]$$

Calcule o $\det(BA)$ utilizando o Exercício 69 e use o resultado para mostrar que

$$\det A = \det P \det(S - RP^{-1}Q)$$

A matriz $S - RP^{-1}Q$ é denominada ***complemento de Schur*** de P em A, em referência a Issai Schur (1875–1941), que nasceu em Belarus mas viveu a maior parte de sua vida na Alemanha. Ele é conhecido principalmente pelo seu trabalho fundamental na teoria de representações de grupos, mas também trabalhou em teoria dos números, em análise e em outras áreas.

Investigação

Aplicações Geométricas de Determinantes

Esta investigação revelará algumas das aplicações curiosas dos determinantes à geometria. Em particular, veremos que determinantes estão intimamente relacionados com as fórmulas de área e volume, e podem ser utilizados para produzir equações de retas, de planos e de algumas outras curvas. A maioria dessas idéias surgiu quando a teoria dos determinantes estava sendo desenvolvida como um tema independente.

O Produto Vetorial

Relembre que, na Investigação do Capítulo 1, o produto vetorial entre $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ foi denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

Se escrevermos esse produto vetorial na forma $(u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3$, onde $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ são os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$, veremos que o *formato* dessa expressão pode ser dado por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \mathbf{e}_3 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}$$

se expandirmos o determinante pela primeira coluna. (Esse, evidentemente, não é um determinante propriamente dito, já que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ são vetores e não escalares; porém, a última igualdade nos fornece uma maneira de lembrar facilmente a fórmula das coordenadas do produto vetorial, que é meio estranha. Ela também nos permite utilizar propriedades dos determinantes para verificar algumas das propriedades do produto vetorial.)

Vamos agora repassar alguns dos exercícios do Capítulo 1.

1. Utilize a versão com determinante do produto vetorial para calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. Se $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, mostre que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

3. Utilize propriedades dos determinantes (e o Problema 2 anterior, se necessário) para provar as seguintes propriedades do produto vetorial:

(a) $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (b) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(c) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (d) $\mathbf{u} \times k\mathbf{v} = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

(e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ (*f*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ e $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

(g) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ (a ***identidade do produto misto***)

Área e Volume

Podemos agora dar uma interpretação geométrica para os determinantes de matrizes 2×2 e 3×3. Lembre que, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$, então a área $\mathcal{A}$ do paralelogramo determinado por esses vetores é dada por $\mathcal{A} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. (Veja Investigação: O Produto Vetorial, no Capítulo 1.)

4. Considere $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Mostre que a área $\mathcal{A}$ do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é dada por

$$\mathcal{A} = \left|\det\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}\right|$$

(*Sugestão*: escreva $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.)

5. Deduza geometricamente a fórmula de área do Problema 4, utilizando a Figura 1 como guia. (*Sugestão*: subtraia áreas do maior retângulo até que reste somente o paralelogramo.) De onde aparece a necessidade do valor absoluto neste caso?

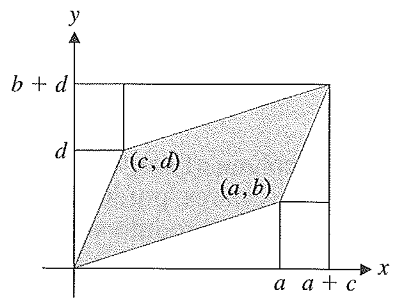


Figura 1

6. Encontre a área do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

Fazendo uma generalização dos Problemas de 4 a 6, considere um ***paralelepípedo***, ou seja, um sólido tridimensional parecido com um tijolo "inclinado", cujas seis faces são paralelogramos com faces opostas paralelas e congruentes (Figura 2). Seu volume é dado pelo produto da área da sua base por sua altura.

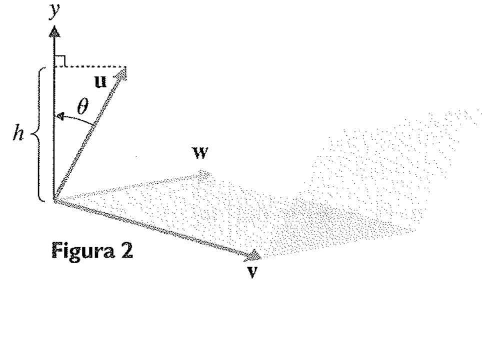


Figura 2

7. Prove que o volume $\mathcal{V}$ do paralelepípedo determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é dado pelo valor absoluto do determinante da matriz $3 \times 3\,[\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}]$, onde $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são as colunas. Assim,

$$\mathcal{V} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

(*Sugestão*: você pode observar, na Figura 2, que a altura h pode ser expressa como $h = \|\mathbf{u}\|\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.)

8. Mostre que o volume $\mathcal{V}$ do tetraedro determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (Figura 3) é dado por

$$\mathcal{V} = \tfrac{1}{6}|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

[*Sugestão*: sabemos, da geometria, que o volume de um sólido desses é $\mathcal{V} = \frac{1}{3}$(área da base)(altura).]

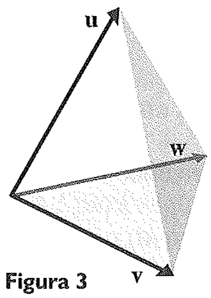


Figura 3

Vejamos agora essas interpretações geométricas de um ponto de vista de transformações. Seja A uma matriz $2{\times}2$ e seja P o paralelogramo determinado pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Vamos considerar o efeito da transformação T_A sobre a área de P. Denotemos por $T_A(P)$ o paralelogramo determinado por $T_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, e $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

9. Prove que a área de $T_A(P)$ é dada por $|\det A|$(área de P).

10. Seja A uma matriz $3{\times}3$ e seja P o paralelepípedo determinado pelos vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Denotemos por $T_A(P)$ o paralelepípedo determinado por $T_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ e $T_A(\mathbf{w}) = A\mathbf{w}$. Prove que o volume de $T_A(P)$ é dado por $|\det A|$(volume de P).

Os problemas anteriores ilustram que o determinante de uma matriz captura aquilo que a transformação correspondente da matriz faz com a área ou com o volume das figuras sobre as quais a transformação atua. (Mesmo que tenhamos considerado somente certos tipos particulares de figura, o resultado é perfeitamente geral e pode ser provado rigorosamente. Não faremos isso aqui.)

Retas e Planos

Suponha que tomemos dois pontos distintos, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), em um plano. Existe então uma única reta passando por esses pontos, e sua equação é da forma

$$ax + by + c = 0$$

Como os dois pontos considerados estão sobre essa reta, suas coordenadas satisfazem a equação. Assim,

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

As três equações juntas podem ser vistas como um sistema de equações lineares nas variáveis a, b e c.

Como existe uma solução não trivial (pois a reta existe), a matriz dos coeficientes

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}$$

não pode ser invertível pelo Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis. Conseqüentemente, seu determinante deve ser zero, pelo Teorema 6 da Seção 4.3. A expansão desse determinante fornece a equação da reta.

A equação da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

11. Use o método descrito anteriormente para encontrar a equação da reta que passa pelos pontos dados.

(a) $(2, 3)$ e $(-1, 0)$ (b) $(1, 2)$ e $(4, 3)$

12. Prove que os três pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são colineares (estão sobre uma mesma reta) se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

13. Mostre que a equação do plano que passa pelos três pontos não colineares (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

O que acontecerá se os três pontos *forem* colineares? Explique o que acontece quando aplicamos escalonamento de linhas para calcular o determinante.

14. Prove que os quatro pontos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) e (x_4, y_4, z_4) são coplanares (estão sobre um mesmo plano) se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ajustando curvas

Quando dados experimentais são obtidos na forma de pontos (x, y) que podem ser colocados no plano cartesiano, é freqüentemente interessante encontrar uma relação entre as variáveis x e y. Idealmente, gostaríamos de encontrar uma função cujo gráfico passasse por todos os pontos obtidos do experimento. Algumas vezes queremos somente aproximações (veja a Seção 7.4), mas resultados exatos também são possíveis em certas situações.

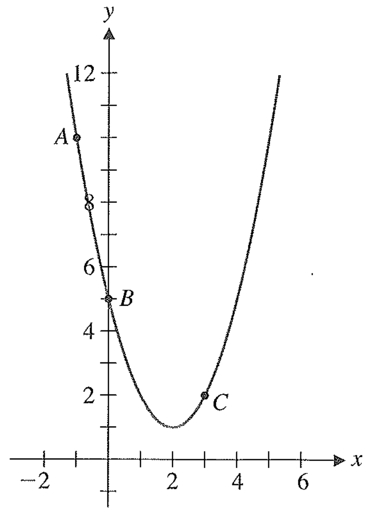


Figura 4

15. A Figura 4 sugere a possibilidade de encontrar uma parábola que passe pelos pontos $A(-1, 10)$, $B(0, 5)$ e $C(3, 2)$. A equação dessa parábola é da forma $y = a + bx + cx^2$. A substituição das coordenadas dos pontos dados nessa equação nos fornece um sistema de três equações lineares nas incógnitas a, b e c. *Sem resolver o sistema*, utilize o Teorema 6 da Seção 4.3 para argumentar que deve haver uma única solução.

Depois, resolva o sistema para encontrar a equação da parábola da Figura 4.

16. Repita o Problema 15 para os pontos $A(-1, -3)$, $B(1, -1)$ e $C(3, 1)$.

17. Generalizando as idéias dos Problemas 15 e 16, suponha que a_1, a_2 e a_3 sejam três números reais distintos. Para quaisquer números reais b_1, b_2 e b_3, queremos mostrar que existe uma única parábola, com equação da forma $y = a + bx + cx^2$, que passa pelos pontos (a_1, b_1), (a_2, b_2) e (a_3, b_3). Faça isso demonstrando que a matriz dos coeficientes do sistema de equações lineares associado tem o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

o qual é necessariamente não nulo. (Por quê?)

18. Sejam a_1, a_2, a_3 e a_4 números reais distintos. Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \neq 0$$

Para quaisquer números reais b_1, b_2, b_3 e b_4, use esse resultado para provar que existe uma única curva cúbica, com equação $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ que passa pelos quatro pontos (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) e (a_4, b_4). (*Não* determine os valores de a, b, c e d.)

19. Considere os n números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Prove que

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

onde $\Pi_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ representa o produto de todos os termos da forma $(a_j - a_i)$, onde $i < j$ e i e j estão entre 1 e n. [O determinante de uma matriz dessa forma (ou de sua transposta) é chamado de ***determinante de Vandermonde***, nome do matemático francês A. T. Vandermonde (1735–1796).]

Deduza que, para n pontos no plano cartesiano, cujas coordenadas x sejam todas distintas, existe um único polinômio de grau $n - 1$ cujo gráfico passa pelos pontos dados.

4.4 Valores e Vetores Próprios de Matrizes n×n

Agora que definimos o determinante de uma matriz $n \times n$, podemos continuar nossa discussão sobre valores e autovetores em um contexto geral. Relembre, da Seção 4.2, que λ é um autovalor de A se, e somente se, $A - \lambda I$ for não invertível. Pelo Teorema 6 da Seção 4.3, isso é verdade se, e somente se, $\det(A - \lambda I) = 0$. Em resumo:

Os autovalores de uma matriz A são precisamente as soluções λ da equação

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Quando desenvolvemos $\det(A - \lambda I)$, obtemos um polinômio em λ, chamado de ***polinômio característico*** de A. A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é chamada de ***equação característica*** de A. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, seu polinômio característico é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

Se A for uma matriz $n \times n$, seu polinômio característico será de grau n. O Teorema Fundamental da Álgebra (veja o Apêndice D) diz que um polinômio de grau n, com coeficientes reais ou complexos, tem no máximo n raízes distintas. Aplicando esse fato ao polinômio característico, vemos que uma matriz $n \times n$, com elementos reais ou complexos, tem no máximo n autovalores distintos.

Vamos fazer um resumo do procedimento que seguiremos (a partir de agora) para determinar autovalores e autovetores (auto-subespaços) de uma matriz.

Seja A uma matriz $n \times n$.

1. Encontre o polinômio característico $\det(A - \lambda I)$ de A.
2. Ache os autovalores de A determinando os valores de λ na equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$.
3. Para cada autovalor λ, determine o subespaço anulado pela matriz $A - \lambda I$. Esse é o auto-subespaço E_λ, formado pelos autovetores de A (não nulos) que correspondem a λ.
4. Encontre uma base para cada auto-subespaço.

EXEMPLO 1 Encontre os autovalores e os correspondentes auto-subespaços de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: Vamos seguir o procedimento delineado anteriormente. O polinômio característico é

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & -5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) - (-2) \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{aligned}$$

Para encontrar os autovalores, precisamos determinar o valor de λ na equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$. O polinômio característico, fatorado, é $-(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. (O Teorema da Fatoração é útil aqui; veja o Apêndice D.) Assim, a equação característica é $-(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$, cujas soluções são, sem dúvida, $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Como $\lambda = 1$ é uma raiz múltipla e $\lambda = 2$ é uma raiz simples, vamos nomear os autovalores como $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.

Para procurar os autovetores correspondentes a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, encontramos o subespaço anulado por

$$A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Um escalonamento de linhas produz

$$[A - I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(Sabíamos antecipadamente que a matriz reduzida *obrigatoriamente* teria uma linha de zeros. Por quê?)

Assim, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ pertence ao subespaço E_1 se, e somente se, $x_1 - x_3 = 0$ e $x_2 - x_3 = 0$. Fazendo a variável livre $x_3 = t$,

vemos que $x_1 = t$ e $x_2 = t$, de onde segue que

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} \right\} = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Para determinar os autovetores correspondentes a $\lambda_3 = 2$, encontramos o subespaço anulado por $A - 2I$ por meio de escalonamento de linhas:

$$[A - 2I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Logo, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ pertence ao auto-subespaço E_2 se, e somente se, $x_1 = \frac{1}{4}x_3$ e $x_2 = \frac{1}{2}x_3$. Fazendo a variável livre

$x_3 = t$, temos

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t \\ \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} \right\} = \left\{ t\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{ger}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$$

onde eliminamos os denominadores da expressão da base, multiplicando todas as coordenadas pelo denominador comum 4. (Por que isso é permitido?)

Observação:

- Note que, no Exemplo 1, A é uma matriz 3×3 mas tem somente autovalores distintos. No entanto, se contarmos com as multiplicidades, A terá exatamente três autovalores ($\lambda = 1$ duplo e $\lambda = 2$ simples). Isso é o que o Teorema Fundamental da Álgebra garante. Vamos definir a ***multiplicidade algébrica*** de um autovalor como a sua multiplicidade como raiz da equação característica. Assim, $\lambda = 1$ tem multiplicidade algébrica 2, e $\lambda = 2$ tem multiplicidade algébrica 1.

A seguir, observe que cada auto-subespaço tem uma base que contém somente um vetor. Em outras palavras, $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$. Vamos definir a ***multiplicidade geométrica*** de um autovalor λ como $\dim E_\lambda$, a dimensão do auto-subespaço associado a λ. Como você verá na Seção 4.5, é importante uma comparação entre essas duas noções de multiplicidade.

EXEMPLO 2 Encontre os autovalores e os correspondentes auto-subespaços de

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: A equação característica é

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 2)$$

Portanto, os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -2$. Por isso, o autovalor 0 tem multiplicidade algébrica 2 e o autovalor -2 tem multiplicidade algébrica 1.

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, calculamos

$$[A - 0I \mid 0] = [A \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

de onde segue que um autovetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ em E_0 satisfaz $x_1 = x_3$. Portanto, tanto x_2 como x_3 são livres.

Fazendo $x_2 = s$ e $x_3 = t$, temos

$$E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \end{bmatrix} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Para $\lambda_3 = -2$,

$$[A - (-2)I \mid 0] = [A + 2I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

logo, $x_3 = t$ é livre e $x_1 = -x_3 = -t$ e $x_2 = 3x_3 = 3t$. Conseqüentemente,

$$E_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} \right\} = \left\{ t\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Segue daí que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ tem multiplicidade geométrica 2, e $\lambda_3 = -2$ tem multiplicidade geométrica 1. (Observe que a multiplicidade algébrica é igual à geométrica para todos os autovalores.)

Em algumas situações, os autovalores de uma matriz são muito fáceis de determinar. Se A é uma matriz triangular, então $A - \lambda I$ também é, e, nesse caso, o Teorema 2 da Seção 4.3 diz que $\det(A - \lambda I)$ é exatamente o produto dos elementos na diagonal, o que implica que sua equação característica é

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = 0$$

de onde segue imediatamente que os autovalores são $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$, ..., $\lambda_n = a_{nn}$. A seguir, resumimos esse resultado como um teorema e o ilustramos com um exemplo.

◆ TEOREMA 1

Os autovalores de uma matriz triangular são os elementos da sua diagonal principal.

EXEMPLO 3 Os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = -2$, pelo Teorema 1. [De fato, o polinômio característico é $(2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda)$.]

Observe que matrizes diagonais são casos particulares do Teorema 1, já que uma matriz diagonal é ao mesmo tempo triangular superior e inferior.

Autovalores capturam muitas das informações importantes sobre o comportamento de uma matriz. Quando conhecemos os autovalores de uma matriz, podemos deduzir muitas coisas sem nenhum trabalho suplementar. O próximo teorema é um dos mais importantes a esse respeito.

◆ TEOREMA 2

Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, 0 *não* for um autovalor de A.

DEMONSTRAÇÃO: Seja A uma matriz quadrada. Pelo Teorema 6 da Seção 4.3, A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Mas $\det A \neq 0$ é equivalente a $\det(A - 0I) \neq 0$, o que diz que 0 não é uma raiz da equação característica de A (isto é, 0 não é um autovalor de A). ◆

Podemos agora estender o Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis incluindo os resultados provados neste capítulo.

◆ TEOREMA 3 O Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis: Versão 3

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

a. A é invertível.
b. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução para todo $\mathbf{b}$ no $\mathbb{R}^n$.
c. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admite somente a solução trivial.
d. A matriz escalonada obtida por escalonamento de linhas de A é I_n.
e. A é um produto de matrizes elementares.
f. posto$(A) = n$
g. nulidade$(A) = 0$
h. Os vetores coluna de A são linearmente independentes.
i. Os vetores coluna de A geram $\mathbb{R}^n$.
j. Os vetores coluna de A formam uma base para $\mathbb{R}^n$.
k. Os vetores linha de A são linearmente independentes.
l. Os vetores linha de A geram $\mathbb{R}^n$.
m. Os vetores linha de A formam uma base para $\mathbb{R}^n$.
n. $\det A \neq 0$
o. 0 não é um autovalor de A.

DEMONSTRAÇÃO: A equivalência (a) $\Leftrightarrow$ (n) é o Teorema 6 da Seção 4.3, e acabamos de mostrar (a) $\Leftrightarrow$ (o) no Teorema 2. ◆

Existem fórmulas simpáticas para os autovalores de potências e da inversa de uma matriz.

◆ TEOREMA 4

Seja A uma matriz quadrada com autovalor λ e um correspondente autovetor $\mathbf{x}$.

(a) Para qualquer inteiro positivo n, λ^n é um autovalor de A^n correspondente ao autovetor $\mathbf{x}$.
(b) Se A é invertível, então $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1} correspondente ao autovetor $\mathbf{x}$.
(c) Para qualquer número inteiro n, λ^n é um autovalor de A^n correspondente ao autovetor $\mathbf{x}$.

DEMONSTRAÇÃO: É dado que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
(a) Faremos uma prova por indução em n. Para $n = 1$, o resultado coincide com o que foi dado. Vamos assumir que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, ou seja, que, para algum inteiro positivo k, $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$. Precisamos provar o resultado para $n = k + 1$. Mas

$$A^{k+1}\mathbf{x} = A(A^k\mathbf{x}) = A(\lambda^k\mathbf{x})$$

pela hipótese de indução. Utilizando a propriedade (d) do Teorema 2 da Seção 3.3, temos que

$$A(\lambda^k\mathbf{x}) = \lambda^k(A\mathbf{x}) = \lambda^k(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^{k+1}\mathbf{x}$$

Assim, $A^{k+1}\mathbf{x} = \lambda^{k+1}\mathbf{x}$, como desejado. Por indução, o resultado é verdadeiro para todos os inteiros $n \geq 1$.

(b) Você deverá provar essa propriedade no Exercício 13.
(c) Você deverá provar essa propriedade no Exercício 14. ◆

O próximo exemplo mostra uma aplicação desse teorema.

EXEMPLO 4 Calcule $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{10}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$; então, o que queremos encontrar é $A^{10}\mathbf{x}$. Os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$, com seus respectivos autovetores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Ou seja,

$$A\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$$

(Comprove isso.) Como $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ forma uma base para $\mathbb{R}^2$ (por quê?), podemos escrever $\mathbf{x}$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. De fato, como se pode verificar facilmente, $\mathbf{x} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$.
Portanto, utilizando o Teorema 4(a), temos

$$\begin{aligned} A^{10}\mathbf{x} &= A^{10}(3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2) = 3(A^{10}\mathbf{v}_1) + 2(A^{10}\mathbf{v}_2) \\ &= 3(\lambda_1^{10})\mathbf{v}_1 + 2(\lambda_2^{10})\mathbf{v}_2 \\ &= 3(-1)^{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2(2^{10})\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2^{11} \\ -3 + 2^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.051 \\ 4.093 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Isso é certamente muito mais fácil que calcular primeiro A^{10}; de fato, não é necessário fazer nenhuma multiplicação de matrizes! ◆

Sempre que pode ser usado, o método do Exemplo 4 é bastante geral. Vamos resumi-lo assim:

Suponha que a matriz $n \times n$ A tenha autovetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ correspondentes, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Se $\mathbf{x}$ é um vetor do $\mathbb{R}^n$ que pode ser expresso como uma combinação linear desses autovetores – digamos,

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$$

então, para qualquer inteiro k,

$$A^k\mathbf{x} = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m$$

Aviso: A hipótese (o "se") da última afirmação não pode ser menosprezada. Não há nenhuma garantia de que tal combinação linear seja possível, em geral. A melhor situação seria se existisse uma base do $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A; exploraremos essa possibilidade em mais detalhes na próxima seção. No entanto, como um passo nessa direção, temos o teorema a seguir, que afirma que os autovalores correspondentes a autovetores *distintos* são linearmente independentes.

◆ TEOREMA 5

Seja A uma matriz $n \times n$ e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ distintos autovalores de A com os respectivos autovetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Então, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente independentes.

DEMONSTRAÇÃO: A prova é indireta. Vamos assumir que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente *dependentes* e mostrar que essa hipótese nos leva a uma contradição.

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes, então um desses vetores deve poder ser expresso como uma combinação linear dos vetores precedentes (na ordem dos índices). Seja $\mathbf{v}_{k+1}$ o primeiro dos vetores $\mathbf{v}_i$ que podem assim ser expressos. Em outras palavras, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são linearmente independentes, mas existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que

$$\mathbf{v}_{k+1} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \tag{1}$$

Multiplicando por A, à esquerda, os dois lados da equação (1) e utilizando o fato de $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ para cada i, temos

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_{k+1} &= A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k)\\ &= c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2 + \cdots + c_kA\mathbf{v}_k\\ &= c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\mathbf{v}_k\end{aligned} \tag{2}$$

Agora, multiplicamos os dois lados da equação (1) por λ_{k+1} para obter

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = c_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_{k+1}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_{k+1}\mathbf{v}_k \tag{3}$$

Quando subtraímos a equação (3) da equação (2), obtemos

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k$$

A independência linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ implica que

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \cdots = c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

Como os autovalores λ_i são todos distintos entre si, os termos entre parênteses ($\lambda_i - \lambda_{k+1}$, $i = 1, \ldots, k$) são todos não nulos. Logo, $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. Isso implica que

$$\mathbf{v}_{k+1} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

o que é impossível, pois o autovetor $\mathbf{v}_{k+1}$ não pode ser zero. Assim, temos uma contradição, o que significa que a hipótese assumida de que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes é falsa. Daí segue que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ têm que ser linearmente independentes. ◆

◆ EXERCÍCIOS 4.4 ◆

Nos Exercícios de 1 a 12, determine: (a) o polinômio característico de A, (b) os autovalores de A, (c) uma base para cada um dos subespaços próprios de A e (d) as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

13. Prove o Teorema 4(b).

14. Prove o Teorema 4(c). [*Sugestão*: faça uma combinação das partes (a) e (b) e veja a quarta Observação que segue o Teorema 4 na Seção 3.4.]

Nos Exercícios 15 e 16, A é uma matriz 2×2 com autovetores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *correspondendo, respectivamente, aos autovalores* $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ *e* $\lambda_2 = 2$, *e* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

15. Determine $A^{10}\mathbf{x}$.

16. Determine $A^k\mathbf{x}$. O que acontece quando k aumenta muito (ou seja, $k \to \infty$)?

Nos Exercícios 17 e 18, A é uma matriz 3×3 com autovetores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, *correspondentes, respectivamente, aos autovalores* $\lambda 1 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, *e* $\lambda_3 = 1$, *e* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

17. Determine $A^{20}\mathbf{x}$.

18. Determine $A^k\mathbf{x}$. O que acontece quando k aumenta muito (ou seja, $k \to \infty$)?

19. (a) Mostre que, para qualquer matriz quadrada A, A^T e A têm o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores.

(b) Dê um exemplo de uma matriz 2×2 A no qual A^T e A tenham auto-subespaços distintos.

20. Mostre que $\lambda = 0$ é o único autovalor de uma matriz nilpotente (ou seja, uma matriz que se anula quando elevada a alguma potência).

21. Mostre que $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ são os únicos autovalores possíveis para uma matriz idempotente (ou seja, uma matriz cujo quadrado é igual a si própria).

22. Se $\mathbf{v}$ é um autovetor de A com o correspondente autovalor λ e c é um escalar, mostre que $\mathbf{v}$ é um autovetor de $A - cI$ com o autovalor correspondente $\lambda - c$.

23. (a) Determine os autovalores e os auto-subespaços de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Usando o Teorema 4 e o Exercício 22, encontre os autovalores e os auto-subespaços de A^{-1}, $A - 2I$ e $A + 2I$.

24. Sejam A e B matrizes $n \times n$ com autovalores λ e μ, respectivamente.

(a) Dê um exemplo para mostrar que $\lambda + \mu$ não é necessariamente autovalor de $A + B$.
(b) Dê um exemplo para mostrar que $\lambda\mu$ não é necessariamente autovalor de AB.
(c) Suponha que λ e μ correspondam ao mesmo autovetor $\mathbf{x}$. Mostre que, neste caso, $\lambda + \mu$ é um autovalor de $A + B$ e $\lambda\mu$ é um autovalor de AB.

25. Se A e B são duas matrizes equivalentes por reduções por linhas, elas têm necessariamente os mesmos autovalores? Prove que têm ou dê um contra-exemplo.

Seja $p(x)$ o polinômio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

A ***matriz companheira*** *de $p(x)$ é a matriz $n \times n$*

$$C(p) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

26. Encontre a matriz companheira de $p(x) = x^2 - 7x + 12$ e depois determine o polinômio característico de $C(p)$.

27. Encontre a matriz companheira de $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 12$ e depois determine o polinômio característico de $C(p)$.

28. (a) Mostre que a matriz companheira $C(p)$ de $p(x) = x^2 + ax + b$ tem polinômio característico $\lambda^2 + a\lambda + b$.

(b) Mostre que, se λ é um autovalor da matriz companheira $C(p)$ da parte (a), então $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $C(p)$ correspondente a l.

29. (a) Mostre que a matriz companheira $C(p)$ de $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem polinômio característico $-(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)$.

(b) Mostre que, se λ é um autovalor da matriz companheira $C(p)$ da parte (a), então $\begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $C(p)$ correspondente a λ.

30. Construa uma matriz 2×2 não diagonal, com autovalores 2 e 5. (*Sugestão*: use o Exercício 28.)

31. Construa uma matriz 3×3 não diagonal, com autovalores -2, 1 e 3. (*Sugestão*: use o Exercício 29.)

32. (a) Prove, por indução, que, para $n \geq 2$, a matriz companheira $C(p)$ de $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ tem polinômio característico igual a $(-1)^n p(\lambda)$. [*Sugestão*: faça a expansão de co-fatores ao longo da última coluna. Você poderá achar útil introduzir o polinômio $q(x) = (p(x) - a_0)/x$.]
(b) Mostre que, se λ é um autovalor da matriz companheira $C(p)$ na equação (4), então o autovetor correspondente a λ é dado por

$$\begin{bmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ e A é uma matriz quadrada, podemos definir a matriz quadrada $p(A)$ por

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I$$

33. Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Ou seja, determine o polinômio característico $c_A(\lambda)$ de A e mostre que $c_A(A) = 0$.

Um teorema importante de álgebra linear avançada afirma que, se $c_A(\lambda)$ é o polinômio característico da matriz A, então $c_A(A) = 0$ (em palavras, toda matriz satisfaz sua equação característica). Esse é o célebre ***Teorema de Cayley-Hamilton****, em homenagem a Arthur Cayley (1821–1895) e a Sir William Rowan Hamilton (veja a página 2). Cayley provou esse teorema em 1858. Hamilton o descobriu, independentemente, em seu trabalho sobre os quatérnios, que são uma generalização dos números complexos.*

34. Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O Teorema de Cayley-Hamilton pode ser usado para determinar potências e inversas de matrizes. Por exemplo, se A é uma matriz 2×2 com polinômio característico $c_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, então $A^2 + aA + bI = 0$, e assim

$$A^2 = -aA - bI$$

e

$$\begin{aligned} A^3 &= AA^2 = A(-aA - bI) \\ &= -aA^2 - bA \\ &= -a(-aA - bI) - bA \\ &= (a^2 - b)A + abI \end{aligned}$$

É fácil ver que, por aplicações sucessivas desse procedimento, podemos expressar qualquer potência positiva de A como uma combinação linear de I e A. De $A^2 + aA + bI = 0$, também obtemos $A(A + aI) = -bI$, e assim

$$A^{-1} = -\frac{1}{b}A - \frac{a}{b}I$$

desde que $b \neq 0$.

35. Utilize o Teorema de Cayley-Hamilton para encontrar A^2, A^3 e A^4 para a matriz A do Exercício 33.

36. Utilize o Teorema de Cayley-Hamilton para encontrar A^2, A^3 e A^4 para a matriz A do Exercício 34.

37. Utilize o Teorema de Cayley-Hamilton para encontrar A^{-1} e A^{-2} para a matriz A do Exercício 33.

38. Utilize o Teorema de Cayley-Hamilton para encontrar A^{-1} e A^{-2} para a matriz A do Exercício 34.

39. Mostre que, se a matriz quadrada A pode ser decomposta na forma

$$A = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline O & S \end{array}\right]$$

onde P e S são matrizes quadradas, então o polinômio característico de A é $c_A(\lambda) = c_P(\lambda)\, c_S(\lambda)$. (*Sugestão*: use o Exercício 69 da Seção 4.3.)

40. Seja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ um sistema completo de autovalores (incluindo repetições) da matriz $n \times n$ A. Prove que

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n \quad \text{e} \quad \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

[*Sugestão*: o polinômio característico de A se fatora da seguinte maneira:

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

Encontre o termo constante e o coeficiente de λ^{n-1} nos lados esquerdo e direito dessa equação.]

41. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Prove que a soma de *todos* os autovalores de $A + B$ é a soma de todos os autovalores de A com os de B individualmente. Prove que o produto de *todos* os autovalores de AB é o produto de todos os autovalores de A com os de B individualmente. (Compare este exercício com o Exercício 24.)

4.5 Semelhança e Diagonalização

Como vimos na última seção, matrizes triangulares e matrizes diagonais são interessantes no sentido de que seus autovalores se manifestam de forma transparente. Seria agradável se pudéssemos sempre relacionar uma matriz a outra matriz triangular ou diagonal de forma que ambas tivessem exatamente os mesmos autovalores. Evidentemente, já conhecemos um procedimento para a conversão de uma matriz quadrada em uma forma triangular – o método da eliminação de Gauss. Infelizmente, esse processo não preserva os autovalores da matriz. Nesta seção, vamos considerar um tipo diferente de transformação de uma matriz que é, sim, bem comportada em relação aos autovalores.

Matrizes Semelhantes

Definição Sejam A e B matrizes $n \times n$. Dizemos que A ***é semelhante a*** B se existir uma matriz $n \times n$ invertível P tal que $P^{-1}AP = B$. Se A é semelhante a B, escrevemos $A \sim B$.

Observações:

- Se $A \sim B$, podemos escrever também $A = PBP^{-1}$ ou $AP = PB$, condições equivalentes à da definição.
- Semelhança é uma *relação* entre matrizes quadradas, no mesmo sentido que "menor ou igual a" (ordem não estrita) é uma relação entre inteiros. Note que há um *sentido* (ou uma *ordem*) implícito na definição. Assim como $a \leq b$ não implica necessariamente $b \leq a$, não devemos assumir que $A \sim B$ implique $B \sim A$. (De fato, isso *é verdade*, como demonstraremos no próximo teorema, mas o fato não segue imediatamente da definição.)
- A matriz P depende de A e de B. Ela não é única para um dado par de matrizes semelhantes A e B. Para comprovarmos, basta tomar $A = B = I$, caso em que $I \sim I$, já que $P^{-1}IP = I$ para *qualquer* matriz invertível P.

EXEMPLO 1 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Então, $A \sim B$, já que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, $AP = PB$ com $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (Observe que não é necessário calcular P^{-1}. Veja a primeira Observação anterior.) ◆

◆ TEOREMA 1

Sejam A, B e C matrizes $n \times n$.

a. $A \sim A$.
b. Se $A \sim B$, então $B \sim A$.
c. Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Essa propriedade decorre do fato de que $I^{-1}AI = A$.
(b) Se $A \sim B$, então $P^{-1}AP = B$ para alguma matriz invertível P. Como diz a primeira das observações anteriores, isto é equivalente a $PBP^{-1} = A$. Fazendo $Q = P^{-1}$, temos $Q^{-1}BQ = (P^{-1})^{-1} = PBP^{-1} = A$. Portanto, pela definição, $B \sim A$.
(c) Você será chamado a provar a propriedade (c) no Exercício 30. ◆

Observação:

- Toda relação que satisfaça essas três propriedades do Teorema 1 é chamada de ***relação de equivalência***. Relações de equivalência aparecem freqüentemente em matemática, e objetos relacionados por meio de uma relação de equivalência usualmente partilham propriedades importantes. Veremos a seguir que isso é verdade para matrizes semelhantes.

◆ TEOREMA 2

Sejam A e B matrizes $n \times n$ com $A \sim B$. Então:

a. $\det A = \det B$
b. A é invertível se, e somente se, B for invertível.
c. A e B têm o mesmo posto.
d. A e B têm o mesmo polinômio característico.
e. A e B têm os mesmos autovalores.

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos (a) e (d), deixando as demais propriedades para serem provadas como exercício. Se $A \sim B$, então $P^{-1}AP = B$ para alguma matriz invertível P.
(a) Tomando determinantes nos dois lados da igualdade, temos

$$\begin{aligned}\det B &= \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P)\\ &= \left(\frac{1}{\det P}\right)(\det A)(\det P) = \det A\end{aligned}$$

(d) O polinômio característico de B é

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I)\\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP)\\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P)\\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(A - \lambda I)\end{aligned}$$

onde a última passagem é análoga à do item (a). Assim, $\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$; ou seja, os polinômios característicos de A e de B são iguais. ◈

Observação: Duas matrizes podem ter as propriedades de (a) a (e) (e outras mais) em comum mesmo não sendo semelhantes. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ têm, as duas, determinante igual a 1 e posto 2, são invertíveis e possuem polinômio característico $(1 - \lambda)^2$ e autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Mas A não é semelhante a B, já que $P^{-1}AP = P^{-1}IP = I \neq B$ para qualquer matriz invertível P.

O Teorema 2 é bastante útil para provar que duas matrizes *não* são semelhantes, já que A e B não podem ser semelhantes se alguma das propriedades de (a) a (e) falhar.

EXEMPLO 2 (a) $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ não são semelhantes, já que $\det A = -3$, mas $\det B = 3$.

(b) $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ não são semelhantes, já que o polinômio característico de A é $\lambda^2 - 3\lambda - 4$, enquanto o de B é $\lambda^2 - 4$. (Confira isso.) Observe que A e B têm, no entanto, o mesmo determinante e o mesmo posto. ◈

Diagonalização

Temos a melhor situação possível quando uma matriz quadrada é semelhante a uma matriz diagonal. Como veremos logo a seguir, a possibilidade de isso ocorrer está relacionada estreitamente com os valores e autovetores da matriz.

Definição: Uma matriz $n \times n$ A é ***diagonalizável*** se existe uma matriz diagonal D tal que A seja semelhante a D, ou seja, se existe uma matriz P $n \times n$ invertível tal que $P^{-1}AP = D$.

EXEMPLO 3 $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ é diagonalizável, pois, se $P = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, então $P^{-1}AP = D$, como pode ser facilmente verificado. (De fato, é mais rápido verificar a propriedade equivalente $AP = PD$, pois ela não exige a determinação de P^{-1}.) ◈

O Exemplo 3 suscita a questão: de onde vieram as matrizes P e D? Observe que os elementos 4 e -1 da diagonal de D são autovalores de A, pois são as raízes do seu polinômio característico, que encontramos no Exemplo 2(b). A origem da matriz P é menos óbvia, mas, como iremos demonstrar a seguir, seus elementos são obtidos a partir dos autovetores de A. O Teorema 3 torna precisa essa conexão.

◆ TEOREMA 3

Seja A uma matriz $n \times n$. Então, A será **diagonalizável** se, e somente se, tiver n autovetores linearmente independentes.

Mais precisamente, existem uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D de maneira que $P^{-1}AP = D$ se, e somente se, as colunas de P forem n autovetores de A, linearmente independentes, e os elementos da diagonal de D forem os autovalores correspondentes àqueles, colocados na mesma ordem.

DEMONSTRAÇÃO: Primeiro, suponha que A seja semelhante à matriz diagonal D via $P^{-1}AP = D$, ou equivalentemente, $AP = PD$. Sejam $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ os vetores coluna de P, e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, os elementos da diagonal de D. Então:

$$A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

ou

$$[A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n] = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n] \tag{2}$$

onde o lado direito da equação é exatamente a representação coluna-linha do produto PD. Temos, assim, n equações, uma para cada coluna:

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n$$

o que comprova que os vetores coluna de P são autovetores de A cujos autovalores correspondentes são os elementos da diagonal de D, na mesma ordem. Como P é invertível, seus vetores coluna são linearmente independentes pelo Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis.

Reciprocamente, se A tem n autovetores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ linearmente independentes, com os autovalores correspondentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, então

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n$$

Isso acarreta a equação (2) anterior, a qual é equivalente à equação (1). Conseqüentemente, se chamamos de P a matriz $n \times n$ com colunas $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$, então a equação (1) pode ser escrita como $AP = PD$. Como as colunas de P são linearmente independentes, o Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis implica que P é invertível, logo, $P^{-1}AP = D$. Portanto, A é diagonalizável. ◆

EXEMPLO 4 Sendo possível, determine a matriz P que diagonaliza

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: Estudamos essa matriz no Exemplo 1 da Seção 4.4, onde descobrimos que seus autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. Os auto-subespaços têm as seguintes bases:

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, E_1 tem base $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Para $\lambda_3 = 2$, E_2 tem base $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Como todos os outros autovetores são somente múltiplos de algum desses dois vetores da base, não podem existir três autovetores linearmente independentes. Pelo Teorema 3, portanto, A não é diagonalizável. ◈

EXEMPLO 5 Sendo possível, encontre a matriz P que diagonaliza

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: Essa é a matriz do Exemplo 2 da Seção 4.4. Lá, vimos que os autovalores de A são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -2$, com a seguinte base para os auto-subespaços:

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, E_0 tem como base $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Para $\lambda_3 = -2$, E_{-2} tem como base $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Uma verificação direta mostra que esses três vetores são linearmente independentes. Assim, se tomarmos

$$P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

então P será invertível. Além disso,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D$$

como pode ser verificado facilmente. (Se você estiver calculando à mão, será muito mais fácil verificar a equação equivalente $AP = PD$.) ◈

Observações: ◆ Quando temos autovetores em quantidade suficiente, podemos colocá-los nas colunas de P em qualquer ordem. Porém, devemos colocar os autovalores de D na mesma ordem dos seus correspondentes autovetores em P. Por exemplo, se escolhermos

$$P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_3 \quad \mathbf{p}_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

então veremos que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆ No Exemplo 5, solicitamos que você verificasse se $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$ eram linearmente independentes. Seria necessário fazer essa verificação? Sabíamos que $\{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\}$ era linearmente independente, pois era uma base do auto-subespaço E_0. Também sabíamos que os conjuntos $\{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_3\}$ e $\{\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3\}$ eram linearmente independentes, devido ao Teorema 5 da Seção 4.4. Mas *não* podíamos concluir daí que $\{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3\}$ fosse linearmente independente. O próximo teorema, no entanto, garante que a independência linear seja preservada quando bases de diferentes auto-subespaços são combinadas.

TEOREMA 4

Seja A uma matriz $n\times n$ e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ autovalores distintos de A. Se $\mathcal{B}_i$ é uma base do auto-subespaço $E_{\lambda i}$, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$ (isto é, a coleção completa dos vetores das bases de todos os auto-subespaços) é linearmente independente.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{B}_i = \{\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \ldots, \mathbf{v}_{in_i}\}$ para $i = 1, \ldots,$ k. Precisamos mostrar que

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \ldots, \mathbf{v}_{1n_1}, \mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \ldots, \mathbf{v}_{2n_2}, \ldots, \mathbf{v}_{k1}, \mathbf{v}_{k2}, \ldots, \mathbf{v}_{kn_k}\}$$

é linearmente independente. Suponha que alguma combinação não trivial desses vetores seja o vetor nulo – digamos,

$$(c_{11}\mathbf{v}_{11} + \cdots + c_{1n_1}\mathbf{v}_{1n_1}) + (c_{21}\mathbf{v}_{21} + \cdots + c_{2n_2}\mathbf{v}_{2n_2}) + \cdots + (c_{k1}\mathbf{v}_{k1} + \cdots + c_{kn_k}\mathbf{v}_{kn_k}) = \mathbf{0} \tag{3}$$

Denotando as somas entre parênteses, respectivamente, por $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, podemos reescrever a equação (3) como

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \tag{4}$$

Mas cada $\mathbf{x}_i$ está em $E_{\lambda i}$ (por quê?), sendo, portanto, um autovetor correspondente a λ_i ou $\mathbf{0}$. No entanto, como os autovalores λ_i são distintos entre si, se *alguma* das parcelas $\mathbf{x}_i$ for um autovetor, então eles serão linearmente independentes, de acordo com o Teorema 5 da Seção 4.4. Mas a equação (4) estabelece uma relação de *dependência* linear; temos aí uma contradição. Concluímos que a equação (3) deve ser trivial; ou seja, todos os seus coeficientes são zero. Portanto, $\mathcal{B}$ é linearmente independente. ◆

Existe um caso no qual a diagonalização é automática: o caso de uma matriz $n\times n$ com n autovalores distintos entre si.

◆ **TEOREMA 5**

Se A é uma matriz $n\times n$ com n autovalores distintos entre si, então A é diagonalizável.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ autovetores correspondentes aos n distintos autovalores de A. (Por que não poderia haver mais de n desses autovetores?) Pelo Teorema 5 da Seção 4.4, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes, assim, pelo Teorema 3, A é diagonalizável. ◆

EXEMPLO 6 A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tem autovalores $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ e $\lambda_3 = -1$, pelo Teorema 1 da Seção 4.4. Como esses são três autovalores distintos de uma matriz 3×3, A é diagonalizável, pelo Teorema 5. (Se quiséssemos de fato a matriz P tal que $P^{-1}AP$ fosse diagonal, seria necessário ainda determinar bases para os auto-subespaços, como no Exemplo 2 da Seção 4.4 e no Exemplo 5 anterior.) ◈

O último teorema desta seção é um resultado importante que caracteriza matrizes diagonalizáveis em termos das duas noções de multiplicidade introduzidas após o Exemplo 1 da Seção 4.4. Ele dá condições precisas sob as quais uma matriz $n\times n$ pode ser diagonalizada, mesmo quando ela tem menos do que n autovalores, como no Exemplo 5. Antes, provamos um lema que tem validade sendo ou não a matriz diagonalizável.

◆ LEMA 6

Se A é uma matriz $n\times n$, então a multiplicidade geométrica de cada autovalor é menor ou igual à sua multiplicidade algébrica.

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que λ_1 seja um autovalor de A com multiplicidade geométrica p, ou seja, dim $E_{\lambda_1} = p$. Especificamente, vamos admitir que E_{λ_1} tem base $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. Seja Q uma matriz n×n qualquer, invertível, e que tenha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ como suas primeiras p colunas – digamos,

$$Q = [\mathbf{v}_1 \;\cdots\; \mathbf{v}_p \;\; \mathbf{v}_{p+1} \;\cdots\; \mathbf{v}_n]$$

ou, na notação de matriz bipartida,

$$Q = [U \mid V]$$

Seja

$$Q^{-1} = \left[\begin{array}{c} C \\ \hline D \end{array}\right]$$

onde C é matriz $p\times n$.

Como as colunas de U são autovetores correspondentes a λ_1, $AU = \lambda_1 U$. Também temos

$$\left[\begin{array}{c|c} I_p & O \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right] = I_n = Q^{-1}Q = \left[\begin{array}{c} C \\ \hline D \end{array}\right][U \mid V] = \left[\begin{array}{c|c} CU & CV \\ \hline DU & DV \end{array}\right]$$

de onde obtemos $CU = I_p$, $CV = O$, $DU = O$ e $DV = I_{n-p}$. Portanto,

$$Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{c} C \\ \hline D \end{array}\right]A[U \mid V] = \left[\begin{array}{c|c} CAU & CAV \\ \hline DAU & DAV \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 CU & CAV \\ \hline \lambda_1 DU & DAV \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_p & CAV \\ \hline O & DAV \end{array}\right]$$

Pelo Exercício 69 da Seção 4.3, temos que

$$\det(Q^{-1}AQ - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^p \det(DAV - \lambda I) \tag{5}$$

Mas $\det(Q^{-1}AQ - \lambda I)$ é o polinômio característico de $Q^{-1}AQ$, que é o mesmo polinômio característico de A, pelo Teorema 2(d). Assim, a equação (5) implica que a multiplicidade algébrica de λ_1 é pelo menos p, sua multiplicidade geométrica. ◈

TEOREMA 7 O Teorema da Diagonalização

Seja A uma matriz $n \times n$ com autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Os seguintes enunciados são equivalentes:

a. A é diagonalizável.
b. A união $\mathcal{B}$ das bases dos auto-subespaços de A (como no Teorema 4) contém n vetores.
c. A multiplicidade algébrica de cada autovalor é igual à sua multiplicidade geométrica.

DEMONSTRAÇÃO: (a) $\Rightarrow$ (b) Se a matriz A é diagonalizável, então ela tem n autovetores linearmente independentes, pelo Teorema 3. Se n_i desses autovetores correspondem ao autovalor λ_i, então $\mathcal{B}_i$ contém pelo menos n_i vetores. (Já sabemos que esses n_i vetores são linearmente independentes; o único impedimento para que formem uma base é que eles podem não gerar o subespaço.) Assim, $\mathcal{B}$ contém pelo menos n vetores. Mas, pelo Teorema 4, $\mathcal{B}$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ linearmente independente; logo, ele contém exatamente n vetores.

(b) $\Rightarrow$ (c) Seja $d_i = \dim E_{\lambda i}$ a multiplicidade geométrica de λ_i e seja m_i sua multiplicidade algébrica. Pelo Lema 6, $d_i \leq m_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Assuma agora que vale a propriedade (b). Com isso, temos

$$n = d_1 + d_2 + \cdots + d_k \leq m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$

Mas $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, já que a soma das multiplicidades algébricas dos autovalores de A é exatamente o grau do polinômio característico de A, a saber, n.

Daí segue que $d_1 + d_2 + \cdots + d_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$, o que implica

$$(m_1 - d_1) + (m_2 - d_2) + \cdots + (m_k - d_k) = 0 \tag{6}$$

Usando novamente o Lema 6, sabemos que $m_i - d_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, k$, de onde podemos deduzir que cada parcela da equação (6) é zero; ou seja, $m_i = d_i$ para $i = 1, \ldots, k$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Se a multiplicidade algébrica m_i e a multiplicidade geométrica d_i são iguais para cada autovalor λ_i de A, então $\mathcal{B}$ tem $d_1 + d_2 + \cdots + d_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ vetores, que são linearmente independentes pelo Teorema 4. Assim, temos n autovetores de A linearmente independentes e, portanto, A é diagonalizável pelo Teorema 3. ◆

EXEMPLO 7 (a) A matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ do Exemplo 1 da Seção 4.4 tem dois autovalores distintos, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.

Como o autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tem multiplicidade algébrica igual a 2 mas multiplicidade geométrica igual a 1, A não é diagonalizável, de acordo com o Teorema da Diagonalização. (Veja também o Exemplo 4.)

(b) A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ do Exemplo 2 da Seção 4.4 também tem dois valores próprios distintos, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -2$. O autovalor 0 tem multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 2, e o autovalor -2 as tem iguais a 1. Assim, essa matriz é diagonalizável, de acordo com o Teorema da Diagonalização. (Isso está de acordo com o que encontramos no Exemplo 5.)

Concluímos esta seção com uma aplicação de diagonalização no cálculo de potências de uma matriz.

EXEMPLO 8 Calcule A^{10} para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: No Exemplo 4 da Seção 4.4, encontramos que essa matriz tem autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$, com autovetores correspondentes $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Daí segue (de alguns dos teoremas desta seção) que A é diagonalizável e $P^{-1}AP = D$, onde

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Isolando A, obtemos $A = PDP^{-1}$, o que torna mais fácil encontrar a potência desejada. Calculamos

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDIDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

e, em geral, $A^n = PD^nP^{-1}$ para todo $n \geq 1$. (A prova desse fato é feita por indução – faça! Observe que tal propriedade é verdadeira para *qualquer* matriz diagonalizável, não somente essa do exemplo.)

Como

$$D^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{2(-1)^n + 2^n}{3} & \dfrac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} \\ \dfrac{2(-1)^{n+1} + 2^{n+1}}{3} & \dfrac{(-1)^{n+2} + 2^{n+1}}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como foi solicitado somente A^{10}, isso é mais do que necessitávamos. Mas agora podemos simplesmente fazer $n = 10$ para encontrar $A^{10} = \begin{bmatrix} \dfrac{2(-1)^{10} + 2^{10}}{3} & \dfrac{(-1)^{11} + 2^{10}}{3} \\ \dfrac{2(-1)^{11} + 2^{11}}{3} & \dfrac{(-1)^{12} + 2^{11}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 342 & 341 \\ 682 & 683 \end{bmatrix}$

◆ EXERCÍCIOS 4.5 ◆

Nos Exercícios de 1 a 4, mostre que A e B não são matrizes semelhantes.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 5 a 7, é dada uma diagonalização da matriz A na forma $P^{-1}AP = D$. Explicite os autovalores de A e bases para os correspondentes auto-subespaços.

5. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 8 a 15, determine se A é diagonalizável e, quando for, encontre uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 16 a 23, utilize o método do Exemplo 8 para calcular a potência indicada da matriz.

16. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^9$

17. $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{10}$

18. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-6}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k$

20. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^8$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2002}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-5}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^k$

Nos Exercícios de 24 a 29, ache todos os valores (reais) de k para os quais A é diagonalizável.

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$

30. Prove o Teorema 1(c).

31. Prove o Teorema 2(b).

32. Prove o Teorema 2(c).

33. Prove o Teorema 2(e).

34. Se A e B são matrizes invertíveis, mostre que AB e BA são semelhantes.

35. Prove que, se A e B são matrizes semelhantes, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$. (*Sugestão*: descubra uma maneira de usar o Exercício 45 da Seção 3.3.)

Em geral, é difícil mostrar que duas matrizes são semelhantes. No entanto, se duas matrizes semelhantes são diagonalizáveis, a tarefa começa a ficar mais fácil. Nos Exercícios de 36 a 39, mostre que A e B são semelhantes indicando que elas são semelhantes a uma mesma matriz diagonal. Depois, encontre uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = B$.

36. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

37. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

40. Prove que, se A é semelhante a B, A^T é semelhante a B^T.

41. Prove que, se A é diagonalizável, A^T também é.

42. Seja A uma matriz invertível. Prove que, se A é diagonalizável, A^{-1} também é.

43. Prove que, se A é uma matriz diagonalizável com um único autovalor λ, A tem a forma $A = \lambda I$. (Uma matriz dessas é chamada de ***matriz escalar***.)

44. Sejam A e B matrizes $n \times n$, cada uma com n autovalores distintos. Prove que A e B têm os mesmos autovalores se, e somente se, $AB = BA$.

45. Sejam A e B matrizes semelhantes. Prove que as multiplicidades algébricas dos autovalores de A e de B são iguais.

46. Sejam A e B matrizes semelhantes. Prove que as multiplicidades geométricas dos autovalores de A e de B são iguais. (*Sugestão*: mostre que, se $B = P^{-1}AP$, então todo autovetor de B tem a forma $P^{-1}\mathbf{v}$ para algum autovetor $\mathbf{v}$ de A.)

4.6 Métodos Iterativos para o Cálculo de Autovalores

Até aqui, o único método que temos para o cálculo de autovalores de uma matriz é achar as soluções da sua equação característica. No entanto, esse método enfrenta vários problemas que o tornam praticável somente em um número pequeno de exemplos. O primeiro problema é que ele depende do cálculo de um determinante, o que, para matrizes grandes, é um processo muito demorado. O segundo problema é que a equação característica é uma equação polinomial, e não existem fórmulas para determinar as soluções de equações polinomiais de grau maior do que 4 (equações dos graus 2, 3 e 4 podem ser solucionadas utilizando a fórmula quadrática e suas análogas). Assim, somos forçados a encontrar valores *aproximados* para os autovalores na maioria dos problemas práticos. Infelizmente, métodos para a determinação de raízes aproximadas de uma equação polinomial não são em geral confiáveis por não garantirem uma margem de erro desejável.

Em 1824, o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802–1829) provou que uma equação polinomial genérica do quinto grau (uma qüíntica) não é *solúvel por radicais* – ou seja, não há fórmula que determine suas soluções e que empregue somente as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes n-ésimas. Em um artigo escrito em 1830 e publicado postumamente em 1846, o matemático francês Evariste Galois (1811–1832) fez uma teoria mais completa que estabeleceu condições sob as quais uma equação polinomial arbitrária pode ser solúvel por radicais. O trabalho de Galois foi o instrumento que estabeleceu o ramo da álgebra chamado de *teoria de grupos*; sua própria abordagem das equações polinomiais é hoje conhecida como *teoria de Galois*.

Tomaremos um outro caminho para contornar as dificuldades com os polinômios característicos. Vamos primeiro aproximar autovetores e depois usá-los para encontrar seus correspondentes autovalores. Nesta seção, vamos explorar algumas variações de um desses métodos baseado em uma técnica iterativa simples.

O Método da Potência

O método da potência se aplica a matrizes $n \times n$ que tenham um ***autovalor dominante*** λ_1, ou seja, um autovalor cujo valor absoluto seja maior que todos os outros autovalores. Por exemplo, se uma matriz tem autovalores $-4, -3, 1$ e 3, então -4 é o autovalor dominante, já que $4 = |-4| > |-3| \geq |3| \geq |1|$. Por outro lado, uma matriz com autovalores $-4, -3, 3$ e 4 não tem autovalor dominante.

O método da potência procede de forma iterativa para produzir uma seqüência de escalares que converge para λ_1 e uma seqüência de vetores que converge para o autovetor correspondente $\mathbf{v}_1$, o ***autovetor dominante***. Por simplicidade, vamos assumir que a matriz A é diagonalizável. O Teorema seguinte fornece a base para o método da potência.

◆ TEOREMA 1

Seja A uma matriz $n \times n$ diagonalizável com autovalor dominante λ_1. Então, existe um vetor $\mathbf{x}_0$ não nulo tal que a seqüência de vetores $\mathbf{x}_k$ definida por

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}, \ldots$$

tende a um autovetor dominante de A.