2.4 Conjuntos Geradores e Dependência Linear

O segundo dos três caminhos em nossas "três vias" do estudo de sistemas de equações lineares é voltado para as combinações lineares de vetores. Vimos que podemos encarar a resolução de um sistema de equações lineares como uma questão sobre a possibilidade de expressar um vetor como combinação linear de outros vetores dados. Vamos explorar essa idéia em mais detalhes nesta seção. Ela conduz a alguns conceitos muito importantes, que serão encontrados repetidamente em capítulos posteriores.

Conjuntos Geradores

Podemos agora responder facilmente à questão levantada na Seção 1.2: quando um dado vetor é combinação linear de outros vetores dados?

EXEMPLO 1 (a) O vetor $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ é uma combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$?

(b) O vetor $\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ é uma combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$?

SOLUÇÃO: (a) Queremos encontrar escalares x e y tais que

$$x\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

Desenvolvendo, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y &= 2 \\ 3x - 3y &= 3 \end{aligned}$$

cuja matriz completa é

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

(Observe que as colunas da matriz completa são justamente os vetores dados; repare na ordem dos vetores — em particular, qual vetor é o vetor constante.)

A forma escalonada reduzida dessa matriz é

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(Verifique esse fato.) Assim, a solução é $x = 3$, $y = 2$, e a combinação linear correspondente é

$$3\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

(b) Utilizando nossa observação feita no item (a), obtemos um sistema linear cuja matriz completa é

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 3\\3 & -3 & 4\end{array}\right]$$

que se reduz a

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 5\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & -2\end{array}\right]$$

revelando que o sistema não tem solução. Assim, neste caso, $\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ não é uma combinação linear de $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$.

O problema de verificar se um conjunto é gerador está intimamente relacionado com o problema da existência de solução de sistemas lineares. Veja novamente o Exemplo 1. Nele, vimos que um sistema com matriz completa $[A \mid \mathbf{b}]$ tem solução exatamente quando $\mathbf{b}$ é uma combinação linear das colunas de A. Esse é um fato geral, resumido no próximo teorema.

TEOREMA 1

Um sistema de equações lineares com matriz completa $[A \mid \mathbf{b}]$ é possível se, e somente se, $\mathbf{b}$ for uma combinação linear das colunas de A.

Vamos revisitar o Exemplo 4 da Seção 2.2, interpretando-o à luz do Teorema 1.

(a) O sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1\\ x + y &= 3\end{aligned}$$

tem uma única solução $x = 2$, $y = 1$. Assim,

$$2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

Veja a Figura 1(a).

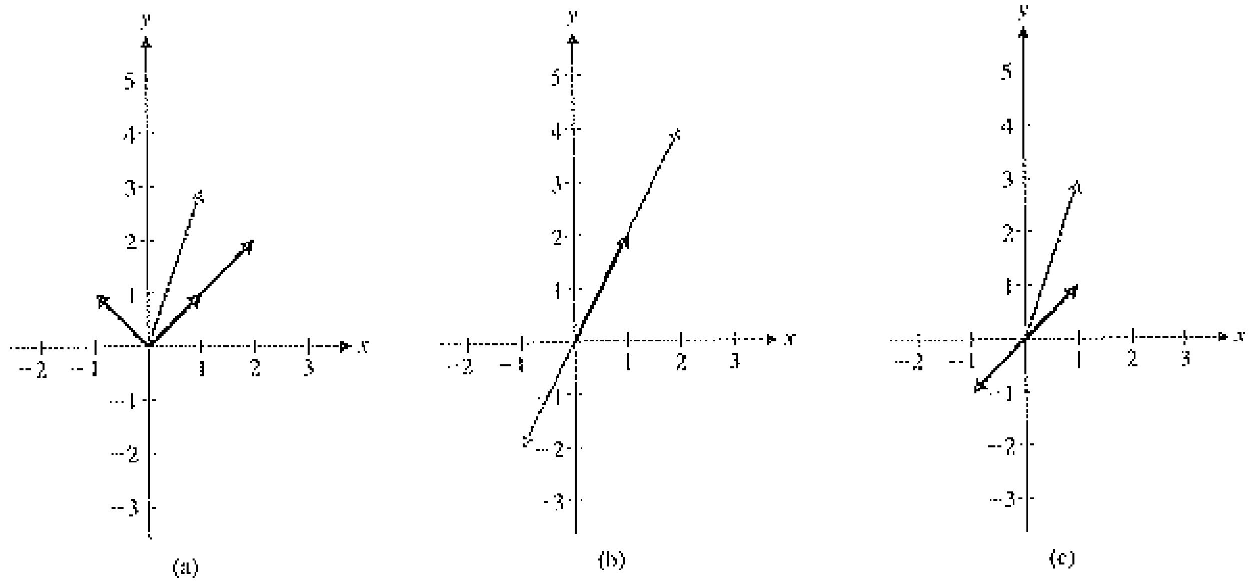

Figura 1

(b) O sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

tem infinitas soluções da forma $x = 2 + t$, $y = t$. Isso significa que

$$(2 + t)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

para todos os valores de t. Geometricamente, os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ são todos paralelos, por isso todos estão alinhados ao longo da mesma reta que passa pela origem [veja a Figura 1(b)].

(c) O sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

não tem soluções, e, portanto, não existem valores x e y que satisfazem

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ são paralelos, mas $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ não está alinhado ao longo da mesma reta que passa pela origem e sobre a qual se alinham os outros vetores [veja a Figura 1(c)].

Estaremos freqüentemente interessados na coleção de *todas* as combinações lineares de um dado conjunto de vetores.

Definição Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$, o conjunto de todas as combinações lineares de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ é chamado ***conjunto gerado por*** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ e é denotado por $\text{ger}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$, ou $\text{ger}(S)$. Se $\text{ger}(S) = \mathbb{R}^n$, S é chamado de ***conjunto gerador*** de $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLO 2 Mostre que $\mathbb{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.

SOLUÇÃO: Precisamos mostrar que um vetor arbitrário $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; precisamos, portanto, mostrar que a equação $x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ pode sempre ser resolvida para x e y (em termos de a e b), independentemente dos valores de a e b.

A matriz completa é $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ -1 & 3 & b \end{array}\right]$, e a redução por linhas produz

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ -1 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & b \\ 2 & 1 & a \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & b \\ 0 & 7 & a + 2b \end{array}\right]$$

de modo que fica claro que o sistema tem uma (única) solução. (Por quê?) Se continuarmos, obteremos

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & b \\ 0 & 1 & (a + 2b)/7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & (b - 3a)/7 \\ 0 & 1 & (a + 2b)/7 \end{array}\right]$$

de onde veremos que $x = (3a - b)/7$ e $y = (a + 2b)/7$. Assim, para qualquer escolha de a e b, teremos

$$\left(\frac{3a - b}{7}\right)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\frac{a + 2b}{7}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

(Verifique isso.)

Observação: É verdade também que $\mathbb{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}\right)$. Se, dado $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, pudermos encontrar x e y tais que $x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, então nós também teremos $x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. De fato, qualquer conjunto de vetores que *contenha* um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$ será também um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$ (veja o Exercício 20).

O próximo exemplo é um caso importante (e fácil) de um conjunto gerador. Encontraremos versões dele muitas vezes.

EXEMPLO 3 Sejam $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ os vetores unitários canônicos em $\mathbb{R}^3$. Para qualquer vetor $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

Portanto, $\mathbb{R}^3 = \text{ger}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Você não deverá ter dificuldade para verificar que, em geral, $\mathbb{R}^n = \text{ger}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Quando o conjunto gerado por um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ não for todo o $\mathbb{R}^n$, será razoável procurar por uma descrição do conjunto gerado.

EXEMPLO 4 Encontre o conjunto gerado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. (Veja o Exemplo 1.)

SOLUÇÃO: Raciocinando do ponto de vista geométrico, podemos ver que o conjunto de todas as combinações lineares de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ é justamente o plano que passa pela origem e tem $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ como vetores diretores (Figura 2). A equação vetorial desse plano é $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, e essa é apenas uma outra maneira de dizer que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é gerado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Suponha que queiramos obter a equação geral desse plano. Há várias maneiras. Uma é usar o fato de que a equação $ax + by + cz = 0$ deve ser satisfeita pelos pontos $(1, 0, 3)$ e $(-1, 1, -3)$ determinados pelos vetores diretores. A substituição nos leva a um sistema de equações em a, b e c. (Veja o Exercício 17.)

Uma outra maneira é usar o sistema de equações originado pela equação vetorial:

$$\begin{aligned} s - t &= x \\ t &= y \\ 3s - 3t &= z \end{aligned}$$

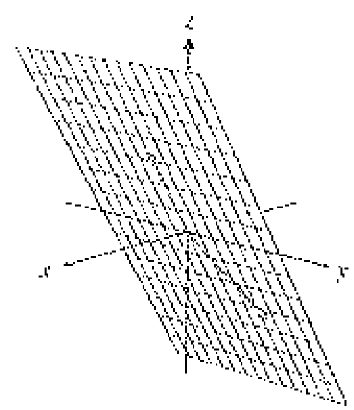

Figura 2 Dois vetores não paralelos geram um plano

Se reduzirmos a matriz completa, obteremos

$$\left[\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -3 & z \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - 3x \end{array}\right]$$

Sabemos agora que esse sistema é possível, já que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o conjunto gerado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Assim, *devemos* ter $z - 3x = 0$ (ou $3x - z = 0$, na forma mais usual), fornecendo-nos a equação geral que procuramos.

Dependência Linear

No exemplo 1, vimos que $3\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$. Vamos abreviar essa equação para $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = \mathbf{w}$. O vetor $\mathbf{w}$ "depende" de $\mathbf{u}$ e de $\mathbf{v}$ por ser uma combinação linear deles. Dizemos que um conjunto de vetores é ***linearmente dependente*** se um dos vetores do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais. Note que também temos $\mathbf{u} = -\frac{2}{3}\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mathbf{w}$ e $\mathbf{v} = -\frac{3}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$. Para contornar a questão de descobrir qual dos vetores é expresso em termos dos restantes, a definição formal é colocada da seguinte maneira:

Definição Um conjunto de vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ é ***linearmente dependente*** quando existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$, *pelo menos um dos quais não nulo*, tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Um conjunto de vetores não linearmente dependente é chamado ***linearmente independente***.

Observações:

- Na definição de dependência linear, o requisito de que pelo menos um dos escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ seja não nulo abre a possibilidade de algum ser zero. No exemplo que acabamos de ver, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente dependentes, já que $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$, e, de fato, *todos* os escalares são não nulos. Por outro lado,

$$\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

  logo, $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ são linearmente dependentes, já que pelo menos um (de fato, dois) dos três escalares 1, -2 e 0 é não nulo. (Note que a dependência verdadeira vem simplesmente do fato de o primeiro vetor ser múltiplo do segundo.) (Veja o Exercício 44.)

- Como $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ para *quaisquer* vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, a dependência linear diz essencialmente que o vetor nulo pode ser expresso como uma combinação linear *não trivial* de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Portanto, independência linear significa que o vetor nulo pode ser expresso como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *apenas* da maneira trivial: $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ somente se $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

A relação entre a noção intuitiva de dependência e a definição formal é dada no próximo teorema. Felizmente, as duas noções são equivalentes!

TEOREMA 2

Vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ em $\mathbb{R}^n$ são linearmente dependentes se, e somente se, pelo menos um dos vetores puder ser escrito como uma combinação linear dos demais.

DEMONSTRAÇÃO: Se um dos vetores — digamos, $\mathbf{v}_1$ — for uma combinação linear dos demais, então existem escalares $c_2, \ldots, c_m$ tais que $\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$. Rearranjando, obtemos $\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 - \cdots - c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$, o que implica que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes, pois pelo menos um dos escalares (a saber, o coeficiente 1 de $\mathbf{v}_1$) é não nulo.

Reciprocamente, suponha que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ sejam linearmente dependentes. Então existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, não todos nulos, tais que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$. Suponha que $c_1 \neq 0$. Então:

$$c_1\mathbf{v}_1 = -c_2\mathbf{v}_2 - \cdots - c_m\mathbf{v}_m$$

e podemos multiplicar ambos os lados da equação por $1/c_1$ para obter $\mathbf{v}_1$ como uma combinação linear dos outros vetores:

$$\mathbf{v}_1 = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{v}_2 - \cdots - \left(\frac{c_m}{c_1}\right)\mathbf{v}_m$$

Nota: Pode parecer que estamos trapaceando um pouco nessa demonstração. Afinal de contas, não sabemos ao certo se $\mathbf{v}_1$ é uma combinação linear dos outros vetores, nem se c_1 é não nulo. Entretanto, o argumento é análogo para algum outro vetor $\mathbf{v}_j$ ou para um escalar c_j. Podemos, alternativamente, apenas renomear os índices de modo que eles funcionem como na demonstração. Em uma situação como essa, um matemático pode começar dizendo "Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mathbf{v}_1$ é uma combinação linear dos outros vetores", e então continuar como acabamos de ver.

EXEMPLO 5 Qualquer conjunto de vetores que contenha o vetor nulo é linearmente dependente. Se $\mathbf{0}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ estão em $\mathbb{R}^n$, podemos encontrar uma combinação linear não trivial da forma $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ colocando $c_1 = 1$ e $c_2 = c_3 = \ldots = c_m = 0$.

EXEMPLO 6 Determine se os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes:

(a) $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}$

SOLUÇÃO: Ao responder a qualquer questão desse tipo, uma boa idéia é ver se você pode determinar por inspeção se um dos vetores é uma combinação linear dos outros. Com um pouco de observação, é possível economizar muitas contas!

(a) O único modo de dois vetores serem linearmente dependentes é quando um é múltiplo do outro. (Por quê?) Os vetores dados obviamente não são múltiplos, logo, são linearmente independentes.

(b) Não há uma relação de dependência óbvia neste caso, por isso, tentamos encontrar escalares c_1, c_2, c_3 tais que

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

O sistema linear correspondente é

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

e a matriz completa é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Novamente, fazemos a observação fundamental de que as colunas dos coeficientes da matriz são exatamente os vetores em questão!

A forma escalonada reduzida é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(verifique), logo, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Portanto, os vetores dados são linearmente independentes.

(c) Uma pequena reflexão revela que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto, os três vetores são linearmente dependentes. [Monte um sistema linear como na parte (b) para verificar isso algebricamente.]

(d) Novamente, observamos que não há dependência óbvia. Logo, passamos imediatamente à redução a um sistema linear homogêneo cuja matriz completa tem como colunas os vetores dados:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se chamarmos os escalares de c_1, c_2 e c_3, teremos

$$\begin{aligned} c_1 \quad + 3c_3 &= 0 \\ c_2 - 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

de onde vemos que o sistema tem infinitas soluções. Em particular, deverá existir uma solução não nula e, portanto, os vetores dados são linearmente dependentes.
Se continuarmos, poderemos descrever essas soluções exatamente: $c_1 = -3c_3$ e $c_2 = 2c_3$. Logo, para qualquer valor não nulo de c_3, temos a relação de dependência linear

$$-3c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Mais uma vez, verifique que isso está correto.)

Resumimos esse procedimento de verificação de dependência linear no teorema a seguir.

◈ TEOREMA 3

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vetores (coluna) em $\mathbb{R}^n$ e A a matriz $m \times n$ $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_m]$ que tem esses vetores como suas colunas. Então, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ serão linearmente dependentes se, e somente se, o sistema linear homogêneo cuja matriz completa for $[A \mid \mathbf{0}]$ tiver uma solução não trivial.

DEMONSTRAÇÃO: Os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ serão linearmente dependentes se, e somente se, existirem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, não todos nulos, tais que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$. Pelo Teorema 1, isso é equivalente a dizer que o vetor não nulo $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$ é uma solução do sistema cuja matriz completa é $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_m \mid \mathbf{0}]$. ◈

EXEMPLO 7 Os vetores unitários canônicos $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, e $\mathbf{e}_3$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$, pois o sistema cuja matriz completa é $[\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{0}]$ já está na forma escalonada reduzida, portanto,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

claramente admite apenas a solução trivial. Em geral, vemos que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ será linearmente independente em $\mathbb{R}^n$. ◈

A realização de operações elementares com linhas em uma matriz constrói combinações lineares das linhas. Podemos usar esse fato para trazer mais um modo de testar a dependência linear de vetores.

EXEMPLO 8 Considere os três vetores do Exemplo 6(d) como vetores-*linha*:

$$[1, 2, 0], [1, 1, -1] \text{ e } [1, 4, 2]$$

Construímos uma matriz tendo esses vetores como suas linhas e passamos ao escalonamento. Cada vez que uma linha muda, denotamos a nova linha adicionando um apóstrofo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3' = L_3 - L_1]{L_2' = L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3'' = L_3' + 2L_2'} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Disso, vemos que

$$\mathbf{0} = L_3'' = L_3' + 2L_2' = (L_3 - L_1) + 2(L_2 - L_1) = -3L_1 + 2L_2 + L_3$$

ou, em termos dos vetores originais,

$$-3[1, 2, 0] + 2[1, 1, -1] + [1, 4, 2] = [0, 0, 0]$$

[Note que essa abordagem corresponde a tomar $c_3 = 1$ na solução do Exemplo 6(d).] ◈

As linhas de uma matriz, portanto, serão linearmente dependentes se operações elementares com linhas puderem ser usadas para criar uma linha nula. Resumimos essa descoberta da seguinte maneira:

◈ TEOREMA 4

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vetores (linha) em $\mathbb{R}^n$ e A a matriz $m \times n$ $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$ que tem esses vetores como suas linhas. Então, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ serão linearmente dependentes se, e somente se, posto$(A) < m$.

DEMONSTRAÇÃO: Assuma que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ sejam linearmente dependentes. Então, pelo Teorema 2 da Seção 2.3, pelo menos um dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais. Se necessário, reindexamos os vetores de modo que possamos escrever $\mathbf{v}_m = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{m-1}\mathbf{v}_{m-1}$. Então, as operações elementares com as linhas, $L_m - c_1L_1, L_m - c_2L_2, \ldots, L_m - c_{m-1}L_{m-1}$, aplicadas à matriz A, criarão uma linha nula na linha m. Logo, posto$(A) < m$.

Reciprocamente, assuma que posto$(A) < m$. Existe então uma seqüência de operações com linhas que irá criar uma linha nula. Um argumento de substituição sucessiva, análogo ao usado no Exemplo 8, pode ser usado para mostrar que $\mathbf{0}$ é uma combinação linear não trivial de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Assim, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes. ◈

Em algumas situações, podemos deduzir sem nenhum trabalho que um conjunto de vetores é linearmente dependente. Essa situação ocorre, por exemplo, quando o vetor nulo pertence ao conjunto (como no Exemplo 5). Outro exemplo é quando há "vetores demais" para serem independentes. O teorema a seguir resume esse caso. (Veremos uma versão mais aguçada desse resultado no Capítulo 6.)

◈ TEOREMA 5

Qualquer conjunto de m vetores em $\mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se $m > n$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vetores (coluna) em $\mathbb{R}^n$ e A a matriz $n \times m$ $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m]$ com esses vetores como suas colunas. Pelo Teorema 3, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes se, e somente se, o sistema linear homogêneo de matriz completa $[A \mid \mathbf{0}]$ tiver solução não trivial. Mas, de acordo com o Teorema 3 da Seção 2.3, esse será sempre o caso se A tiver mais colunas do que linhas; é esse o caso aqui, já que o número de colunas m é maior que o número de linhas n. ◈

EXEMPLO 9 Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes, pois não pode haver mais do que dois vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$. (Note que, se quisermos encontrar a relação de dependência entre esses três vetores, devemos resolver o sistema linear homogêneo cuja matriz dos coeficientes tem os vetores dados como colunas. Faça isso!)

◈ EXERCÍCIOS 2.4 ◈

Nos Exercícios de 1 a 6, determine se o vetor $\mathbf{v}$ *é uma combinação linear dos demais vetores.*

1. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3{,}2 \\ 2{,}0 \\ -2{,}6 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 0{,}4 \\ 4{,}8 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3{,}4 \\ 1{,}4 \\ -6{,}4 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ 0{,}2 \\ -1{,}0 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 7 e 8, determine se o vetor $\mathbf{b}$ *pertence ao conjunto gerado pelas colunas da matriz* A.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$

9. Mostre que $\mathbb{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$.

10. Mostre que $\mathbb{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

11. Mostre que $\mathbb{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

12. Mostre que $\mathbb{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$.

Nos Exercícios de 13 a 16, descreva o conjunto gerado pelos vetores dados (a) geometricamente e (b) algebricamente.

13. $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

17. A equação geral do plano que contém os pontos (1, 0, 3), (−1, 1, −3) e a origem é da forma $ax + by + cz = 0$. Ache a, b e c.

18. Prove que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ estão todos em ger($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$).

19. Prove que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, e $\mathbf{w}$ estão todos em ger($\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$).

20. (a) Prove que, se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ e $T = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, então ger($S$) $\subseteq$ ger(T). (*Sugestão:* refraseie esta questão em termos de combinações lineares.)

(b) Deduza que, se $\mathbb{R}^n$ = ger(S), então $\mathbb{R}^n$ = ger(T) também.

21. (a) Suponha que o vetor $\mathbf{w}$ seja uma combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, e que cada $\mathbf{u}_i$ seja uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Prove que $\mathbf{w}$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ e, portanto, ger($\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$) $\subseteq$ ger($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$).

(b) Na parte (a), suponha também que cada $\mathbf{v}_j$ seja combinação linear de $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Prove que ger($\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$) = ger($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$).

(c) Use o resultado da parte (b) para provar que

$$\mathbb{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

(*Sugestão:* sabemos que $\mathbb{R}^3$ = ger($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$).)

Use o método do Exemplo 6 e o Teorema 5 para determinar se os conjuntos de vetores nos Exercícios de 22 a 31 são linearmente independentes. Se, para algum deles, a resposta puder ser determinada por inspeção (isto é, sem contas), diga por quê. Para os conjuntos linearmente dependentes, encontre uma relação de dependência entre os vetores.

22. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 32 a 41, determine se os conjuntos de vetores no exercício dado são linearmente independentes, convertendo os vetores em vetores-linha e usando o método do Exemplo 8 e o Teorema 4. Para os conjuntos linearmente dependentes, encontre uma relação de dependência entre os vetores.

32. Exercício 22

33. Exercício 23

34. Exercício 24

35. Exercício 25

36. Exercício 26

37. Exercício 27

38. Exercício 28

39. Exercício 29

40. Exercício 30

41. Exercício 31

42. (a) Qual será o posto de uma matriz $n \times n$ se suas colunas, vistas como vetores em $\mathbb{R}^n$, forem linearmente independentes? Explique.

(b) Qual será o posto de uma matriz $n \times n$ se suas linhas, vistas como vetores em $\mathbb{R}^n$, forem linearmente independentes? Explique.

43. (a) Se os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem linearmente independentes, serão os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ também linearmente independentes? Justifique sua resposta.

(b) Se os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem linearmente independentes, serão os vetores $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ também linearmente independentes? Justifique sua resposta.

44. Prove que dois vetores são linearmente dependentes se, e somente se, um deles for um múltiplo do outro. (*Sugestão*: considere separadamente o caso em que um dos vetores é $\mathbf{0}$.)

45. Dê uma "demonstração vetor-linha" para o Teorema 5.

46. Demonstre que todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente.

47. Suponha que $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\}$ seja um conjunto de vetores em algum $\mathbb{R}^n$ e que $\mathbf{v}$ seja uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Se $S' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, mostre que ger$(S)$ = ger(S'). [*Sugestão*: o Exercício 21(b) é útil aqui.]

2.5 Aplicações

Há uma quantidade muito grande de aplicações de sistemas de equações lineares para que se possa fazer justiça a elas em uma única seção. Esta seção introduzirá algumas poucas aplicações, com o objetivo de ilustrar diversas situações em que elas surgem.

Alocação de Recursos

Uma grande quantidade de aplicações dos sistemas de equações lineares envolve a alocação de recursos limitados sujeitos a um conjunto de restrições.

EXEMPLO 1 Um biólogo colocou três espécies de bactéria (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A, B e C). A cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 2.300 unidades de A, 800 unidades de B e 1.500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a Tabela 1. Quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento?

Tabela 1

	Bactéria da Espécie I	Bactéria da Espécie II	Bactéria da Espécie III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

SOLUÇÃO: Sejam x_1, x_2 e x_3 os números de bactérias das espécies I, II e III, respectivamente. Como cada uma das x_1 bactérias da espécie I consome duas unidades de A por dia, o grupo I consome um total de $2x_1$ unidades por dia. Analogamente, os grupos II e III consomem um total de $2x_2$ e $4x_3$ unidades do alimento A diariamente. Como queremos usar todas as 2.300 unidades de A, temos a equação

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2.300$$

Da mesma forma, obtemos as equações correspondentes ao consumo de B e C:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad &= 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1.500 \end{aligned}$$

Assim, obtemos um sistema de três equações lineares em três variáveis. A redução por linhas da matriz completa associada ao sistema fornece:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2.300 \\ 1 & 2 & 0 & 800 \\ 1 & 3 & 1 & 1.500 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right]$$

Portanto, $x_1 = 100$, $x_2 = 350$ e $x_3 = 350$. O biólogo deve colocar 100 bactérias da espécie I e 350 de cada uma das espécies II e III no tubo de ensaio para que todo o alimento seja consumido.

EXEMPLO 2 Repita o Exemplo 1 usando os dados de consumo diário de alimento (unidades por dia) mostrados na Tabela 2. Assuma desta vez que serão colocados no tubo de ensaio 1.500 unidades de A, 3.000 unidades de B e 4.500 unidades de C por dia.

Tabela 2

	Bactéria da Espécie I	Bactéria da Espécie II	Bactéria da Espécie III
Alimento A	1	1	1
Alimento B	1	2	3
Alimento C	1	3	5

SOLUÇÃO: Sejam x_1, x_2 e x_3 novamente os números de bactérias de cada espécie. A matriz completa do sistema linear resultante e a matriz escalonada reduzida correspondente são

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1.500 \\ 1 & 2 & 3 & 3.000 \\ 1 & 3 & 5 & 4.500 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1.500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vemos que, neste caso, temos mais de uma solução. As soluções são dadas por

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 1.500 \end{aligned}$$

Fazendo $x_3 = t$, obtemos $x_1 = t$, $x_2 = 1.500 - 2t$ e $x_3 = t$. Em qualquer problema aplicado, devemos ser cuidadosos para interpretarmos soluções adequadamente. Certamente, o número de bactérias não pode ser negativo. Assim, $t \geq 0$ e $1.500 - 2t \geq 0$. A última desigualdade implica que $t \leq 750$; temos, portanto, $0 \leq t \leq 750$. O número de bactérias deve ser inteiro, logo, há exatamente 751 valores de t que satisfazem a desigualdade. Portanto, nossas 751 soluções são da forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1.500 - 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.500 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

uma para cada valor inteiro de t tal que $0 \leq t \leq 750$. (Assim, embora matematicamente esse sistema tenha infinitas soluções, *fisicamente* há uma quantidade finita.)

Balanceamento de Equações Químicas

Quando uma reação química ocorre, certas moléculas (os *reagentes*) se combinam para formar novas moléculas (os *produtos*). Uma ***equação química balanceada*** é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagentes e produtos na reação e tem o mesmo número de átomos de cada tipo dos lados esquerdo e direito. A equação é usualmente escrita com os reagentes à esquerda, os produtos à direita e uma seta entre os dois lados para mostrar a direção da reação.

Por exemplo, para a reação na qual os gases hidrogênio (H_2) e oxigênio (O_2) se combinam para formar água (H_2O), uma equação química balanceada é

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

indicando que duas moléculas de hidrogênio se combinam com uma molécula de oxigênio para formar duas moléculas de água. Observe que a equação é balanceada, pois há quatro átomos de hidrogênio e dois átomos de oxigênio em cada lado. Note que nunca haverá uma única equação balanceada para uma reação, já que todo múltiplo inteiro positivo de uma equação balanceada será também uma equação balanceada. Por exemplo, $6H_2 + 3O_2 \longrightarrow 6H_2O$ é também balanceada. Assim, usualmente procuramos a equação balanceada *mais simples* para uma reação.

Embora o método de tentativa e erro freqüentemente funcione em exemplos simples, o processo de balanceamento de equações químicas na verdade envolve a resolução de um sistema de equações lineares homogêneo, e por essa razão podemos usar as técnicas que desenvolvemos para evitar os "chutes".

EXEMPLO 3 A combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água. Encontre uma equação química balanceada para essa reação.

SOLUÇÃO: Se denotarmos os números de moléculas de amônia, oxigênio, nitrogênio e água por w, x, y e z, respectivamente, estaremos procurando uma equação da forma

$$wNH_3 + xO_2 \longrightarrow yN_2 + zH_2O$$

Comparando os números de átomos de nitrogênio, hidrogênio e oxigênio nos reagentes e nos produtos, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} &\text{Nitrogênio:} && w = 2y \\ &\text{Hidrogênio:} && 3w = 2z \\ &\text{Oxigênio:} && 2x = z \end{aligned}$$

Reescrever essas equações na forma padrão nos fornece um sistema homogêneo de três equações lineares em quatro variáveis. (Repare que o Teorema 3 da Seção 2.3 garante que tal sistema terá infinitas soluções não triviais.) Reduzimos a matriz completa correspondente pelo método de eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} w & & & - & 2y & & & = & 0 \\ 3w & & & & & - & 2z & = & 0 \\ & & 2x & & & - & z & = & 0 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Logo, $w = \frac{2}{3}z$, $x = \frac{1}{2}z$ e $y = \frac{1}{3}z$. O menor valor positivo de z que fornecerá valores *inteiros* para todas as quatro variáveis é o menor denominador comum das frações $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ — a saber, 6 — que fornece $w = 4$, $x = 3$, $y = 2$ e $z = 6$. Assim, a equação química balanceada é

$$4NH_3 + 3O_2 \longrightarrow 2N_2 + 6H_2O$$