2

Sistemas de Equações Lineares

O mundo estava cheio de equações...
Deve haver uma resposta para todas as coisas, se
pelo menos você souber como colocar as questões.

– Anne Tyler
The accidental tourist
Alfred A. Knopf, 1985, p. 235

2.1 Introdução: Trivialidade

A palavra *trivial* deriva das palavras latinas *tri* ("três") e *via* ("caminho"). Assim, literalmente, uma trivialidade se refere a um lugar onde três caminhos se encontram. Esse ponto de encontro comum dá origem a um outro significado, mais comum, para *trivial*: lugar-comum, ordinário, insignificante.

Nesta seção, começamos a examinar sistemas de equações lineares. O mesmo sistema de equações pode ser visto de três modos diferentes, mas igualmente importantes – esses serão nossos três caminhos, todos levando à mesma solução. Você precisará acostumar-se com essas três maneiras de interpretar sistemas de equações lineares para que isso se torne ordinário (trivial!) para você.

O sistema de equações que iremos considerar é

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ x - 3y &= -3 \end{aligned}$$

Problema 1: Desenhe duas retas representadas por essas equações. Qual é o seu ponto de interseção?

Problema 2: Considere os vetores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Desenhe o sistema de coordenadas determinado por **u** e **v**. (*Sugestão*: desenhe, de leve, primeiro o sistema de coordenadas padrão e use-o como ajuda para o desenho do novo sistema.)

Problema 3: No sistema u–v, encontre as coordenadas de $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Problema 4: Uma outra maneira de colocar o Problema 3 é pedir que se determinem as coordenadas x e y para as quais $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Escreva as duas equações às quais essa equação vetorial é equivalente (uma equação para cada componente). O que você observa?

Problema 5: Retorne agora às retas que você desenhou no Problema 1. Vamos nos referir à reta de equação $2x + y = 8$ como reta 1, e à reta de equação $x - 3y = -3$ como reta 2. Marque o ponto (0, 0) em seu gráfico do

Problema 1 e chame-o de P_0. Desenhe um segmento de reta *horizontal* de P_0 até encontrar a reta 1 e chame esse novo ponto de P_1. Em seguida, desenhe um segmento de reta *vertical* de P_1 até encontrar a reta 2 e chame esse novo ponto de P_2. Agora, desenhe um segmento de reta *horizontal* de P_2 até a reta 1, obtendo o ponto P_3. Continue desenhando segmentos verticais até encontrar a reta 2, seguidos de segmentos horizontais para a reta 1. O que parece estar acontecendo?

Problema 6: Usando uma calculadora com duas casas decimais de precisão, encontre as coordenadas (aproximadas) dos pontos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_6$. (Você achará útil primeiramente resolver a primeira equação para x em termos de y e a segunda equação para y em termos de x.) Registre seus resultados na Tabela 1, escrevendo as coordenadas x e y de cada ponto separadamente.

Tabela 1

Ponto	x	y
P_0	0	0
P_1		
P_2		
P_3		
P_4		
P_5		
P_6		

Os resultados desses problemas mostram que a tarefa de "resolver" um sistema de equações lineares pode ser vista de várias maneiras. Repita o processo descrito nos problemas com os seguintes sistemas de equações:

$$\text{(a)}\ \begin{aligned}4x - 2y &= 0\\ x + 2y &= 5\end{aligned} \qquad \text{(b)}\ \begin{aligned}3x + 2y &= 9\\ x + 3y &= 10\end{aligned} \qquad \text{(c)}\ \begin{aligned}x + y &= 5\\ x - y &= 3\end{aligned} \qquad \text{(d)}\ \begin{aligned}x + 2y &= 4\\ 2x - y &= 3\end{aligned}$$

Todas as suas observações feitas nos problemas 1 a 6 são ainda válidas para esses exemplos? Repare em qualquer similaridade ou diferença. Neste capítulo, iremos explorar essas idéias com mais detalhe.

2.2 Introdução aos Sistemas de Equações Lineares

Lembre-se de que a equação geral de uma reta em $\mathbb{R}^2$ é da forma

$$ax + by = c$$

e que a equação geral de um plano em $\mathbb{R}^3$ é da forma

$$ax + by + cz = d$$

Equações como as acima são chamadas ***equações lineares.***

Definição Uma ***equação linear*** nas n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde os ***coeficientes*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e o ***termo independente*** b são constantes.

EXEMPLO 1 As seguintes equações são lineares:

$$3x - 4y = -1 \qquad r - \tfrac{1}{2}s - \tfrac{15}{3}t = 9 \qquad x_1 + 5x_2 = 3 - x_3 + 2x_4$$
$$\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)z = 1 \qquad 3{,}2x_1 - 0{,}01x_2 = 4{,}6$$

Observe que a terceira equação é linear porque pode ser reescrita na forma $x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 3$. É também importante notar que, embora nesses exemplos (e na maioria das aplicações) os coeficientes e termos constantes sejam números reais, em alguns exemplos e aplicações eles serão números complexos ou elementos de $\mathbb{Z}_p$ para algum número primo p.

As seguintes equações não são lineares:

$$xy + 2z = 1 \qquad x_1^2 - x_2^3 = 3 \qquad \frac{x}{y} + z = 2$$
$$\sqrt{2x} + \frac{\pi}{4}y - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}z\right) = 1 \qquad \operatorname{sen}x_1 - 3x_2 + 2^{x_3} = 0$$

Equações lineares, portanto, não contêm produtos, recíprocos ou outras funções das variáveis; as variáveis aparecem somente na potência 1 e multiplicadas apenas por constantes. Preste atenção especial no quarto exemplo de cada lista: por que a quarta equação na primeira lista é linear, mas a quarta equação na segunda lista não é?

Uma ***solução*** de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n = b$ é um vetor $[s_1, s_2, \ldots, s_n]$, cujas coordenadas satisfazem à equação quando substituímos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$.

EXEMPLO 2 (a) $[5, 4]$ é uma solução de $3x - 4y = -1$ porque, quando substituímos $x = 5$ e $y = 4$, a equação é satisfeita: $3(5) - 4(4) = -1$. O vetor $[1, 1]$ é uma outra solução. As soluções simplesmente correspondem aos pontos da reta determinada pela equação dada. Assim, colocando $x = t$ e resolvendo para y, vemos que o conjunto completo das soluções pode ser escrito na forma paramétrica $[t, \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t]$. (Poderíamos também colocar y igual a algum parâmetro — digamos, s — e resolver a equação para x; as duas soluções paramétricas pareceriam diferentes, mas seriam equivalentes. Tente isso.)

(b) A equação linear $x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ tem $[3, 0, 0]$, $[0, 1, 2]$ e $[6, 1, -1]$ como soluções particulares. O conjunto completo das soluções corresponde ao conjunto dos pontos pertencentes ao plano determinado pela equação dada. Se colocarmos $x_2 = s$ e $x_3 = t$, uma solução paramétrica será dada por $[3 + s - 2t, s, t]$. (Quais valores de s e de t produzem as três soluções específicas apontadas?)

Um ***sistema de equações lineares*** é um conjunto finito de equações lineares, cada uma com as mesmas variáveis. Uma ***solução*** de um sistema de equações lineares é um vetor que é *simultaneamente* solução de cada uma das equações do sistema. O ***conjunto solução*** de um sistema de equações lineares é o conjunto de *todas* as soluções do sistema. Vamos nos referir ao processo de encontrar o conjunto solução de um sistema de equações lineares como "resolver o sistema".

EXEMPLO 3 O sistema

$$\begin{aligned} 2x - \ \ y &= 3 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

tem [2, 1] como solução, pois esse vetor é uma solução de ambas as equações. Por outro lado, [1, –1] não é uma solução do sistema, já que ele satisfaz apenas a primeira equação. ◈

EXEMPLO 4 Resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

$$\text{(a)}\ \begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{(b)}\ \begin{aligned} x - \ \ y &= 2 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \text{(c)}\ \begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO:

(a) A soma das duas equações dá $2x = 4$, logo, $x = 2$, de onde concluímos que $y = 1$. Uma rápida conta confirma que [2, 1] é na verdade uma solução de ambas as equações. O fato de essa ser a *única* solução pode ser confirmado quando observamos que ela corresponde ao (único) ponto de interseção (2, 1) das retas com equações $x - y = 1$ e $x + y = 3$, como é mostrado na Figura 1(a). Portanto, [2, 1] é uma *solução única.*

(b) A segunda equação nesse sistema é exatamente o dobro da primeira, por isso as soluções são as soluções da primeira equação apenas — a saber, os pontos da reta $x - y = 2$. Estes podem ser representados na forma paramétrica por $[2 + t, t]$. Assim, esse sistema tem *infinitas soluções* [Figura 1(b)].

(c) Dois números x e y não podem ter uma diferença de 1 e de 3 simultaneamente. Portanto, esse sistema *não tem soluções.* (Uma forma mais algébrica de aproximação pode ser subtrair a segunda equação da primeira, levando à absurda conclusão de que $0 = -2$.) Como a Figura 1(c) mostra, neste caso as retas correspondentes às equações são paralelas.

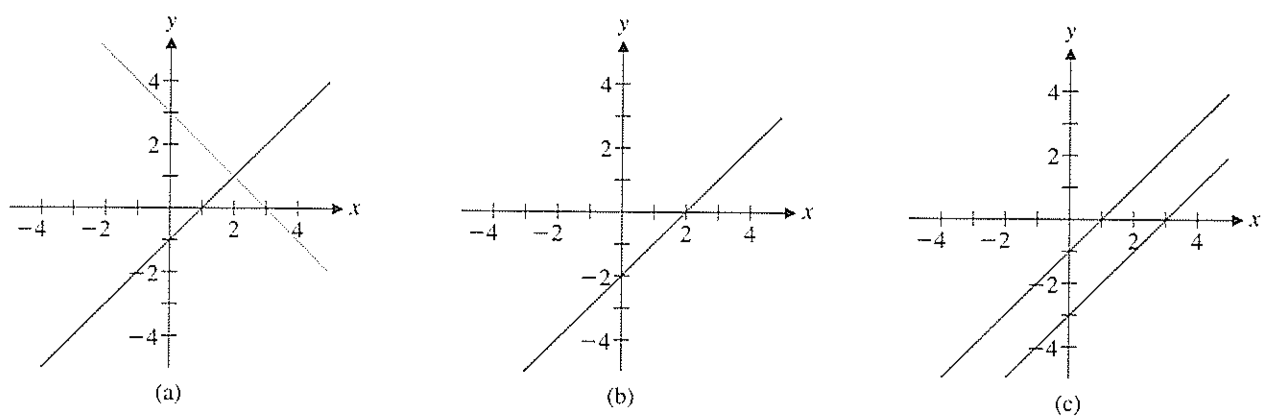

Figura 1 ◈

Um sistema de equações lineares é chamado de ***possível****** quando tem pelo menos uma solução. Um sistema sem nenhuma solução é chamado ***impossível***. Embora sejam pequenos, os três sistemas no Exemplo 4 ilustram as únicas três possibilidades para o número de soluções de um sistema de equações lineares com coeficientes reais. Provaremos mais tarde que essas mesmas três possibilidades valem para *qualquer* sistema de equações lineares sobre os números reais.

* N.T.: Em português, os termos *consistente* e *compatível* também são usados para nos referirmos a um sistema *possível*. Um sistema *impossível* também pode ser chamado de *inconsistente* ou *incompatível*.

Um sistema de equações lineares com coeficientes reais tem
(a) uma única solução (um sistema possível),
(b) infinitas soluções (um sistema possível) ou
(c) nenhuma solução (um sistema impossível).

Resolução de um Sistema de Equações Lineares

Dois sistemas lineares são chamados ***equivalentes*** quando têm os mesmos conjuntos solução. Por exemplo,

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} x - y &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

são equivalentes, já que ambos têm $[2, 1]$ como única solução. (Verifique.)

Nossa estratégia para a resolução de um sistema de equações lineares é transformar o sistema dado em um sistema equivalente que seja mais fácil de resolver. O formato triangular do segundo exemplo que acabamos de ver (no qual a segunda equação tem uma variável a menos que a primeira) é o que teremos como meta.

EXEMPLO 5 Resolva o sistema

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ y + 3z &= 5 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: Começando com a última equação e trabalhando de trás para a frente, encontramos sucessivamente $z = 2$, $y = 5 - 3(2) = -1$ e $x = 2 + (-1) + 2 = 3$. Portanto, a única solução é $[3, -1, 2]$.

Esse procedimento usado para resolver o sistema do Exemplo 5 é chamado ***substituição de trás para a frente***.

Voltemos agora à estratégia geral de transformar um sistema dado em outro equivalente que possa ser resolvido facilmente por substituição de trás para a frente. Esse processo será descrito mais detalhadamente na próxima seção; por ora, vamos simplesmente observá-lo em ação em um único exemplo.

EXEMPLO 6 Resolva o sistema

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 3x - 3y + 2z &= 16 \\ 2x - y + z &= 9 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: Para transformar esse sistema em um que exiba a estrutura triangular do Exemplo 5, precisamos primeiramente eliminar a variável x das Equações 2 e 3. Observe que a subtração de múltiplos apropriados da Equação 1 das Equações 2 e 3 produz o resultado desejado. Em seguida, observe que estamos operando com os coeficientes, não com as variáveis, por isso podemos economizar alguma escrita se registrarmos apenas os coeficientes e os termos constantes na *matriz*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

A palavra *matriz* deriva da palavra latina *mater*, que significa "mãe". Quando o sufixo *-iz* é acrescentado, o significado torna-se "útero". Assim como um útero envolve um feto, os colchetes de uma matriz envolvem seus elementos, e assim como o útero dá origem a um bebê, uma matriz gera certos tipos de funções, chamadas *transformações lineares*. Uma matriz com *m* linhas e *n* colunas é chamada matriz *m x n* (pronuncia-se "*m* por *n*").

na qual as três primeiras colunas contêm os coeficientes das variáveis na ordem, a última coluna contém os termos constantes e a barra vertical serve para nos lembrar do sinal de igual nas equações. Essa matriz é chamada de ***matriz completa*** do sistema.

Há várias maneiras de converter um sistema dado em um com a estrutura triangular que estamos buscando. Os passos que iremos usar aqui são os mais próximos ao método geral descrito na próxima seção. Realizaremos a seqüência de operações no sistema dado e simultaneamente na matriz completa. Começaremos eliminando o x das Equações 2 e 3.

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 3x - 3y + 2z &= 16 \\ 2x - y + z &= 9 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Subtraindo três vezes a primeira equação da segunda equação:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 5z &= 10 \\ 2x - y + z &= 9 \end{aligned}$$

Subtraindo três vezes a primeira linha da segunda linha:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Subtraindo duas vezes a primeira equação da terceira equação:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 5z &= 10 \\ y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

Subtraindo duas vezes a primeira linha da terceira linha:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Trocando as Equações 2 e 3:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ y + 3z &= 5 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Trocando as linhas 2 e 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

Esse é o mesmo sistema que resolvemos usando substituição de trás para a frente no Exemplo 5, em que descobrimos que a solução era [3, –1, 2]. Portanto, essa também é a solução do sistema dado neste exemplo. Por quê? Os cálculos que acabamos de ver mostram que *qualquer solução do sistema dado é também uma solução do sistema final*. No entanto, como os passos que acabamos de dar são *reversíveis*, poderíamos recuperar o sistema original, começando pelo sistema final. (Como?) Assim, *qualquer solução do sistema final é também uma solução do sistema dado*. Portanto, os sistemas são equivalentes (assim como são todos os sistemas obtidos nos passos intermediários que acabamos de ver). (Trabalhar com matrizes é o assunto da próxima seção.) Além disso, podemos trabalhar com matrizes tão bem quanto com equações, já que se trata apenas de recolocar as variáveis antes de fazer a substituição de trás para a frente.

Observação: Calculadoras com recursos para operar com matrizes e sistemas computadorizados algébricos (CAS – *computer algebra system*) podem facilitar a resolução de sistemas de equações lineares, particularmente quando os sistemas são grandes ou têm coeficientes que não são "agradáveis", como freqüentemente ocorre nas aplicações encontradas na vida real. Como sempre, entretanto, você deve fazer tantos exemplos quanto puder com lápis e papel até que se sinta confortável com as técnicas. Mesmo quando uma calculadora ou um CAS for utilizado, pense sobre *como* você faria os cálculos manualmente antes de fazer qualquer coisa. Depois de obter uma resposta, não se esqueça de avaliar se ela é razoável.

Não se iluda pensando que a tecnologia sempre lhe dará a resposta de modo mais rápido ou mais fácil do que fazendo os cálculos à mão. Às vezes ela pode não fornecer nenhuma resposta! Erros de arredondamento associados à aritmética de ponto flutuante usada por calculadoras e computadores podem causar sérios problemas e conduzir a respostas completamente erradas. Veja Investigação: Mentiras que meu Computador me Contou para ter uma idéia do problema. (Você foi avisado!)

◈ EXERCÍCIOS 2.2 ◈

Nos Exercícios de 1 a 6, determine quais equações são lineares nas variáveis x, y e z. Se alguma equação não for linear, explique o motivo.

1. $x - \pi y + \sqrt[3]{5}z = 0$ **2.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

3. $x^{-1} + 7y + z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)$

4. $2x - xy - 5z = 0$ **5.** $3\cos x - 4y + z = \sqrt{3}$

6. $(\cos 3)x - 4y + z = \sqrt{3}$

Nos Exercícios de 7 a 10, encontre uma equação linear que tenha o mesmo conjunto solução que a equação dada (possivelmente com alguma restrição nas variáveis).

7. $2x + y = 7 - 3y$ **8.** $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = 1$

9. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{xy}$ **10.** $\log_{10} x - \log_{10} y = 2$

Nos Exercícios de 11 a 14, encontre o conjunto solução de cada equação.

11. $3x - 6y = 0$ **12.** $2x_1 + 3x_2 = 5$

13. $x + 2y + 3z = 4$ **14.** $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

Nos Exercícios de 15 a 18, desenhe gráficos correspondentes aos sistemas lineares dados. Determine geometricamente se cada sistema tem uma única solução. Então resolva cada sistema algebricamente para confirmar sua resposta.

15. $\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ **16.** $\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x + y &= 7 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 3x - 6y &= 3 \\ -x + 2y &= 1 \end{aligned}$ **18.** $\begin{aligned} 0{,}10x - 0{,}05y &= 0{,}20 \\ -0{,}06x + 0{,}03y &= -0{,}12 \end{aligned}$

Nos Exercícios de 19 a 24, resolva o sistema dado usando substituição.

19. $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ y &= 3 \end{aligned}$ **20.** $\begin{aligned} 2u - 3v &= 5 \\ 2v &= 6 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2y - z &= 1 \\ 3z &= -1 \end{aligned}$ **22.** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$ **24.** $\begin{aligned} x - 3y + z &= 5 \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$

Os sistemas dos Exercícios 25 e 26 exibem um padrão "triangular inferior" que torna fácil resolvê-los por substituição de frente para trás. (Encontraremos substituição de frente para trás de novo no Capítulo 3.) Resolva esses sistemas.

25. $\begin{aligned} x &= 2 \\ 2x + y &= -3 \\ -3x - 4y + z &= -10 \end{aligned}$ **26.** $\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 &= 5 \\ \tfrac{3}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$

Encontre as matrizes completas dos sistemas lineares dos Exercícios 27 a 30.

27. $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ **28.** $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} x + 5y &= -1 \\ -x + y &= -5 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned}$ **30.** $\begin{aligned} a - 2b + d &= 2 \\ -a + b - c - 3d &= 1 \end{aligned}$

Nos Exercícios 31 e 32, encontre um sistema de equações lineares que tenha a matriz dada como sua matriz completa.

31. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ **32.** $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$

Nos Exercícios de 33 a 38, resolva os sistemas lineares dos exercícios indicados.

33. Exercício 27 **34.** Exercício 28

35. Exercício 29 **36.** Exercício 30

37. Exercício 31 **38.** Exercício 32

39. (a) Encontre um sistema de duas equações lineares nas variáveis x e y cujo conjunto solução seja dado pelas equações paramétricas $x = t$ e $y = 3 - 2t$.

(b) Encontre uma outra solução paramétrica para o sistema do item (a) na qual o parâmetro seja s e $y = s$.

40. (a) Encontre um sistema de duas equações lineares, nas variáveis x_1, x_2 e x_3 cujo conjunto solução seja dado pelas equações paramétricas $x_1 = t$, $x_2 = 1 + t$ e $x_3 = 2 - t$.

(b) Encontre uma outra solução paramétrica para o sistema do item (a) na qual o parâmetro seja s e $x_3 = s$.

Nos Exercícios de 41 a 44, os sistemas não são sistemas de equações lineares. Encontre substituições (mudanças de variáveis) que convertam cada sistema em um sistema linear e use esse sistema linear para ajudar a resolver o sistema dado.

41. $$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= 0 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} &= 1 \end{aligned}$$

42. $$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 &= 3 \end{aligned}$$

43. $$\begin{aligned} \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{sen} y \phantom{{}+\cos z} &= 2 \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} y + \cos z &= 2 \\ \operatorname{sen} y - \cos z &= -1 \end{aligned}$$

44. $$\begin{aligned} -2^a + 2(3^b) &= 1 \\ 3(2^a) - 4(3^b) &= 1 \end{aligned}$$

Investigação

Mentiras que meu Computador me Contou

Computadores e calculadoras armazenam números reais em uma *representação em ponto flutuante*. Por exemplo, o número 2001 é armazenado como $0{,}2001 \times 10^4$, e o número $-0{,}00063$ é armazenado como $-0{,}63 \times 10^{-3}$. Em geral, uma representação em ponto flutuante de um número real é $\pm M \times 10^k$, onde k é um inteiro e a *mantissa* M é um número real (decimal) que satisfaz $0{,}1 \leq M < 1$.

O número máximo de casas decimais que podem ser armazenadas na mantissa depende do computador, da calculadora ou do sistema computacional algébrico. Se o número máximo de casas decimais que podem ser armazenadas for d, dizemos que há *d algarismos significativos*. Muitas calculadoras armazenam oito ou 12 algarismos significativos. Computadores podem armazenar mais, mas ainda estão sujeitos a um limite. Algarismos não armazenados são omitidos (neste caso, dizemos que o número foi *truncado*) ou usados para *arredondamento*, de modo que o número fique com d algarismos significativos.

Por exemplo, $\pi \approx 3{,}141592654$, e sua representação em ponto flutuante é $0{,}3141592654 \times 10^1$. Em um computador que reduz a cinco algarismos significativos por truncamento, o número π é armazenado como $0{,}31415 \times 10^1$ (mostrado no visor como 3,1415); um computador que arredonda para cinco algarismos significativos armazenaria π como $0{,}31416 \times 10^1$ (mostrado no visor como 3,1416). Quando o algarismo desprezado é um 5, o arrendondamento é feito de modo que o último algarismo que permanece seja par. Assim, arredondando para dois algarismos significativos, o número 0,735 torna-se 0,74, enquanto 0,725 torna-se 0,72.

Toda vez que um truncamento ou um arredondamento ocorre, um *erro de arredondamento* é iniciado, podendo ter um efeito dramático nos cálculos. Quanto mais operações forem realizadas, mais o erro se acumulará. Às vezes, infelizmente, não há o que possamos fazer a esse respeito. Esta investigação ilustra esse fenômeno com um sistema de equações lineares bastante simples.

1. Resolva o seguinte sistema de equações lineares *exatamente* (isto é, trabalhe com números fracionários durante os cálculos).

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 0 \\ x + \tfrac{801}{800}y &= 1 \end{aligned}$$

2. Na forma decimal, $\frac{801}{800} = 1{,}00125$. Portanto, se arredondarmos para cinco algarismos significativos, o sistema passará a ser

$$\begin{aligned} x + \qquad y &= 0 \\ x + 1{,}0012y &= 1 \end{aligned}$$

Usando sua calculadora ou CAS, resolva esse sistema, arredondando o resultado de cada cálculo para cinco algarismos significativos.

3. Resolva o sistema mais duas vezes, arredondando primeiramente para quatro algarismos significativos e depois para três algarismos significativos. O que acontece?

4. Sem dúvida, um pequeno erro de arredondamento (menor ou igual a 0,00125) pode levar a erros bastante grandes no resultado. Explique o motivo geometricamente. (Pense nos gráficos dos vários sistemas lineares que você resolveu nos problemas de 1 a 3.)

Sistemas como esse que você acabou de ver são chamados ***malcondicionados***. Eles são extremamente sensíveis para arredondamentos e não há muito que possamos fazer. Encontraremos sistemas malcondicionados nos Capítulos 3 e 7. Aqui está outro exemplo para praticar:

$$4{,}552x + 7{,}083y = 1{,}931$$

$$1{,}731x + 2{,}693y = 2{,}001$$

Brinque com vários números de algarismos significativos para ver o que acontece, começando com oito algarismos significativos (se puder).

2.3 Métodos Diretos de Resolução de Sistemas Lineares

Nesta seção, veremos um procedimento geral e sistemático de resolução de sistema de equações lineares. Esse procedimento é baseado na idéia de reduzir a matriz completa do sistema dado a uma forma que possa então ser resolvida por substituição de trás para a frente. O método é *direto* no sentido de que leva diretamente à solução (se existir) em um número finito de passos. Na Seção 2.5, consideraremos alguns métodos *indiretos* que funcionam de um modo completamente diferente.

As Matrizes e a Forma Escalonada

Há duas matrizes importantes associadas a um sistema linear. A ***matriz dos coeficientes*** contém os coeficientes das variáveis, e a ***matriz completa*** (que já vimos) é a matriz dos coeficientes acrescentada de uma coluna extra que contém os termos constantes.

Para o sistema

$$\begin{aligned} 2x + \quad y - z &= 3 \\ x \qquad + 5z &= 1 \\ -x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

a matriz dos coeficientes é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

e a matriz completa é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

A palavra *escalonar* vem da palavra latina *scala*, que significa "escada" ou "degraus". Escalonar uma matriz significa dar a ela a forma de escada.

Note que, se uma variável estiver faltando (como a variável y na segunda equação), seu coeficiente 0 será colocado na matriz na posição correspondente. Se denotarmos a matriz dos coeficientes de um sistema linear por A e o vetor coluna dos termos constantes por $\mathbf{b}$, a forma da matriz completa será $[A \mid \mathbf{b}]$.

Na resolução de um sistema linear, nem sempre será possível reduzir a matriz dos coeficientes à forma triangular, como fizemos no Exemplo 6 da Seção 2.2. Entretanto, sempre podemos conseguir um formato de escada nos elementos não nulos da matriz final.

Definição Uma matriz está na *forma escalonada por linhas* quando satisfaz as seguintes propriedades:

1. Todas as linhas que consistem inteiramente em zeros estão na parte inferior da matriz.
2. Em cada linha não nula, o primeiro elemento não nulo (chamado de *elemento líder*) está em uma coluna à esquerda de qualquer outro elemento líder abaixo dele.

Note que essas propriedades garantem que os elementos líderes fiquem posicionados formando uma escada. Em particular, em qualquer coluna que contenha um elemento líder, todos os elementos abaixo dele são nulos, como ilustram os exemplos a seguir.

EXEMPLO 1 As seguintes matrizes estão na forma escalonada por linhas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se uma matriz escalonada por linhas for a matriz completa de um sistema linear, será fácil resolver o sistema usando apenas o método de substituição.

EXEMPLO 2 Supondo que cada uma das matrizes do Exemplo 1 seja uma matriz completa, escreva os sistemas de equações lineares correspondentes e resolva-os.

SOLUÇÃO: Vamos primeiramente lembrar que a última coluna de uma matriz completa é o vetor dos termos constantes. A primeira matriz então corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 1 \\ -x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(Note que desprezamos a última equação $0 = 0$, ou $0x_1 + 0x_2 = 0$, que é claramente satisfeita por quaisquer valores de x_1 e de x_2.) A substituição fornece $x_2 = -2$ e então $2x_1 = 1 - 4(-2) = 9$, logo, $x_1 = \frac{9}{2}$. A solução é $[\frac{9}{2}, -2]$.

A segunda matriz corresponde ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 \quad &= 5 \\ 0 &= 4 \end{aligned}$$

A última equação representa $0x_1 + 0x_2 = 4$, que claramente não tem soluções. Assim, o sistema não tem soluções. Analogamente, o sistema que corresponde à quarta matriz não tem soluções. Para o sistema que corresponde à terceira matriz, temos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

logo, $x_1 = 1 - 2(3) - x_2 = -5 - x_2$. Há infinitas soluções, já que podemos associar x_2 a qualquer valor t e encontrar a solução paramétrica $[-5 - t, t, 3]$.

Operações Elementares com as Linhas

Vamos agora descrever o procedimento pelo qual qualquer matriz pode ser reduzida a uma matriz na forma escalonada por linhas. As operações permitidas, chamadas ***operações elementares com as linhas***, correspondem às operações que podem ser realizadas em um sistema de equações lineares para transformá-lo em um sistema equivalente.

Definição As seguintes ***operações elementares com as linhas*** podem ser realizadas em uma matriz:

1. Trocar duas linhas.
2. Multiplicar uma linha por uma constante não nula.
3. Somar um múltiplo de uma linha com outra linha.

Observe que dividir uma linha por uma constante não nula é uma propriedade que está incluída nessa definição, já que, por exemplo, dividir uma linha por 2 é o mesmo que multiplicá-la por $\frac{1}{2}$. Analogamente, subtrair de uma linha um múltiplo de outra linha é o mesmo que somar a uma linha um múltiplo negativo de outra.

Usaremos a seguinte notação para as três operações elementares com linhas:

1. $L_i \leftrightarrow L_j$ significa trocar as linhas i e j.
2. kL_i significa multiplicar a linha i pelo número real k.
3. $L_i + kL_j$ significa somar k vezes a linha j à linha i (e trocar a linha i pelo resultado).

O processo de aplicar operações elementares com linhas para transformar uma matriz em uma matriz escalonada é chamado ***escalonamento***.

EXEMPLO 3 Reduza a seguinte matriz à forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: Trabalhamos coluna por coluna, da esquerda para a direita e de cima para baixo. A estratégia é criar um elemento líder em uma coluna e usá-lo para criar zeros sob ele. O elemento escolhido para ser o elemento líder é chamado ***pivô***, e essa fase do processo é chamada ***pivoteamento***. Embora não seja estritamente necessário, às vezes é conveniente usar a segunda operação elementar para transformar o elemento líder em 1.

Começamos por anular os elementos da primeira coluna, abaixo do líder 1 na primeira linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4+L_1]{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

A primeira coluna agora está como queremos; o próximo passo é criar um elemento líder na segunda linha, com o objetivo de chegar à forma escalonada. Neste caso, fazemos isso trocando as linhas. (Poderíamos também somar a linha 3 ou 4 à linha 2.)

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Desta vez o pivô é -1. Criamos zeros no restante da segunda coluna usando o elemento líder -1 na linha 2:

$$\xrightarrow{L_4+3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}$$

A coluna 2 agora está pronta. Notando que já temos um elemento líder na coluna 3, nós o escolhemos como pivô e começamos a tarefa de colocar zeros sob ele. Isso ficará mais fácil se primeiramente dividirmos a linha 3 por 8:

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}$$

Agora usamos o elemento líder 1 na coluna 3 para criar zeros sob ele:

$$\xrightarrow{L_4 - 29L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Com esse passo final, reduzimos a matriz dada à forma escalonada. ◈

Observações:

- A forma escalonada da matriz não é única. (Encontre uma forma escalonada diferente para a matriz do Exemplo 3.)
- O elemento líder de cada linha é usado para criar zeros abaixo dele.
- Os pivôs não são necessariamente os elementos que estavam originalmente nas posições ocupadas pelos elementos líderes. No Exemplo 3, os pivôs eram 1, –1, 8 e 24. A matriz original tinha 1, 4, 2 e 5 nessas posições.
- Uma vez que tenhamos realizado o pivoteamento e anulado os elementos sob o elemento líder em uma coluna, aquela coluna não muda mais. Em outras palavras, a forma escalonada por linhas é construída da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Operações elementares com linhas são reversíveis — isto é, podem ser "desfeitas". Assim, se uma operação elementar sobre as linhas converte A em B, existe também uma operação elementar sobre as linhas que converte B em A. (Veja os Exercícios 15 e 16.)

Definição As matrizes A e B serão ***linha-equivalentes*** se existir uma seqüência de operações elementares com as linhas que converta A em B.

As matrizes do Exemplo 3,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

são linha-equivalentes. Entretanto, em geral, como podemos dizer se duas matrizes são linha-equivalentes?

◆ TEOREMA 1

As matrizes A e B são linha-equivalentes se, e somente se, puderem ser reduzidas à mesma forma escalonada por linhas.

DEMONSTRAÇÃO: Se A e B são linha-equivalentes, operações adicionais com linhas reduzirão B (e conseqüentemente A) à (mesma) forma escalonada por linhas.

Reciprocamente, se A e B têm a mesma forma escalonada por linhas R, então, por meio de operações elementares por linhas, podemos converter A em R e B em R. Revertendo a última seqüência de operações, podemos converter R em B, e, portanto, a seqüência $A \to R \to B$ produz o efeito desejado. ◆

Observação: Na prática, é mais fácil usar o Teorema 1 se R for a forma escalonada *reduzida* de A e de B, como será definido na *página 72*. Veja os Exercícios 17 e 18.

O Método de Eliminação de Gauss

Quando uma redução por linhas é aplicada à matriz completa de um sistema de equações lineares, criamos um sistema equivalente que pode ser resolvido por substituição de trás para a frente. O processo inteiro é conhecido como ***método de eliminação de Gauss***, ou ***método de eliminação gaussiana***.

◆ O Método de Eliminação de Gauss

1. Escreva a matriz completa do sistema de equações lineares.
2. Use operações elementares com as linhas para reduzir a matriz completa à forma escalonada por linhas.
3. Usando substituição de trás para a frente, resolva o sistema equivalente que corresponde à matriz linha-reduzida.

EXEMPLO 4 Resolva o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: A matriz completa é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

Continuamos o processo reduzindo essa matriz à forma escalonada por linhas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right]$$

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) é considerado um dos três maiores matemáticos de todos os tempos, juntamente com Arquimedes e Newton. É freqüentemente chamado de "príncipe dos matemáticos", apelido que ele merece. Criança prodígio, conta-se que Gauss conseguia fazer aritmética antes de conseguir falar. Com três anos de idade, ele corrigiu um erro nos cálculos feitos por seu pai para a folha de pagamentos da companhia, e, quando jovem estudante, deduziu a fórmula $n(n + 1)/2$ para a soma dos n primeiros números naturais. Com 19 anos, provou que um polígono de 17 lados* poderia ser construído com o uso de apenas uma régua e um compasso; aos 21, provou, em sua dissertação de doutorado, que todo polinômio de grau n com coeficientes reais ou complexos tem exatamente n raízes, contando suas multiplicidades – o Teorema Fundamental da Álgebra.

A publicação de Gauss *Disquisitiones arithmeticae*, de 1801, é em geral considerada o fundamento da teoria moderna dos números, mas ele fez contribuições em praticamente todos os ramos da matemática, bem como à estatística, física, astronomia e agrimensura. Gauss não publicou todos os seus resultados, possivelmente por ser muito crítico a respeito de seu próprio trabalho. Ele também não gostava de dar aulas e freqüentemente era crítico de outros matemáticos, talvez por ter descoberto — mas não publicado — os resultados antes deles.

O método de eliminação de Gauss era conhecido pelos chineses no terceiro século a.C., mas carrega o nome de Gauss por causa de sua redescoberta em um artigo no qual ele resolveu um sistema de equações lineares para descrever a órbita de um asteróide.

O sistema correspondente é agora

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ -5x_3 &= -10 \end{aligned}$$

A substituição de trás para a frente nos dá $x_3 = 2$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, e, portanto, a solução pode ser escrita na forma vetorial como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

De agora em diante, escreveremos soluções vetoriais de sistemas de equações lineares como vetores-coluna. (O motivo disso ficará claro no Capítulo 3.) ◈

EXEMPLO 5 Resolva o sistema

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y \qquad &= -3 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: A matriz completa é

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

que pode ser reduzida por linhas, como a seguir:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 + L_1]{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema associado agora é

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

que tem infinitas soluções. Há mais de uma maneira de atribuir parâmetros, mas continuaremos usando a substituição de trás para a frente, escrevendo as variáveis correspondentes aos elementos líderes (as ***variáveis dependentes***) em termos das outras variáveis (as ***variáveis livres***).

* N.T.: No original, o autor escreveu apenas "polígono de 17 lados", mas "polígono regular de 17 lados" seria mais apropriado.

Neste caso, as variáveis dependentes são w e y, e as variáveis livres, x e z. Então, $y = 1 + z$, e disso obtemos

$$\begin{aligned} w &= 1 + x + y - 2z \\ &= 1 + x + (1 + z) - 2z \\ &= 2 + x - z \end{aligned}$$

Se atribuirmos parâmetros $x = s$ e $z = t$, a solução pode ser escrita na forma vetorial como

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O Exemplo 5 destaca uma propriedade muito importante: em um sistema possível, as variáveis livres são justamente as que não são variáveis dependentes. Como o número de variáveis dependentes é igual ao número de linhas não nulas na forma escalonada da matriz dos coeficientes, podemos predizer o número de variáveis livres (parâmetros) antes de acharmos a solução explícita usando substituição de trás para a frente. No Capítulo 3, provaremos que, embora a forma escalonada da matriz não seja única, o número de linhas não nulas é o mesmo em *qualquer* forma escalonada de uma matriz dada. Portanto, faz sentido atribuir um nome a esse número.

Definição O ***posto*** de uma matriz é o número de linhas não nulas de qualquer uma de suas formas escalonadas por linhas.

Denotaremos o posto de uma matriz A por posto(A). No Exemplo 4, o posto da matriz dos coeficientes é 3; no Exemplo 5, o posto da matriz dos coeficientes é 2. As observações que acabamos de fazer justificam o teorema a seguir, que demonstraremos com mais generalidade nos Capítulos 3 e 6.

TEOREMA 2 O Teorema do Posto

Seja A a matriz dos coeficientes de um sistema de equações lineares com n variáveis. Se o sistema for possível, então o

$$\text{número de variáveis livres} = n - \text{posto}(A)$$

Assim, no Exemplo 4, temos $3 - 3 = 0$ variáveis livres (em outras palavras, uma *única* solução), e, no Exemplo 5, temos $4 - 2 = 2$ variáveis livres, como havíamos encontrado.

EXEMPLO 6 Resolva o sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: Quando reduzimos a matriz completa à forma escalonada por linhas, obtemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

levando à equação impossível $0 = 5$. (Poderíamos também ter feito $L_3 - \frac{2}{3}L_2$ como segunda operação elementar, o que nos teria levado à mesma contradição, mas a uma forma escalonada diferente.) Assim, o sistema não tem solução — ele é impossível. ◈

O Método de Eliminação de Gauss-Jordan

Uma modificação do método de eliminação de Gauss simplifica bastante a fase de substituição de trás para a frente e é particularmente útil quando os cálculos estão sendo feitos à mão em um sistema com infinitas soluções. Essa variante, conhecida como ***método de eliminação de Gauss-Jordan***, baseia-se em reduzir ainda mais a matriz completa.

Definição Uma matriz está na ***forma escalonada reduzida*** (por linhas) se ela satisfaz às seguintes propriedades:

1. Quaisquer linhas que consistem inteiramente de zeros estão na parte inferior da matriz.
2. O elemento líder em cada linha não nula é igual a 1 (chamado ***1 líder***).
3. Cada coluna que contém um 1 líder tem zeros em todas as outras posições.

A seguinte matriz está na forma escalonada reduzida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para matrizes 2×2, as formas escalonadas reduzidas possíveis são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde * pode ser qualquer número.

Wilhelm Jordan (1842–1899) era um professor alemão de geodésia. Sua contribuição à resolução de sistemas lineares foi um método sistemático de substituição de trás para a frente estreitamente relacionado com o método descrito aqui.

É claro que, depois de uma matriz ter sido reduzida à forma escalonada, mais operações elementares com as linhas irão levá-la à forma escalonada reduzida. O que não é claro (embora a intuição possa sugerir) é que, diferentemente do que ocorria com a forma escalonada por linhas, a forma escalonada reduzida de uma matriz é *única*.[1]

[1] Para uma pequena prova desse fato, veja o artigo "The reduced row echelon form of a matrix is unique: A simple proof", de Thomas Yuster, na edição de março de 1984 da revista *Mathematics magazine* (vol. 57, n. 2, p. 93-94).

No método de eliminação de Gauss-Jordan, procedemos como no método de eliminação de Gauss, mas reduzimos ainda mais a matriz completa até a forma escalonada *reduzida*.

Método de eliminação de Gauss-Jordan

1. Escreva a matriz completa do sistema de equações lineares.
2. Use operações elementares com linhas para reduzir a matriz completa à forma escalonada reduzida.
3. Se o sistema resultante for possível, resolva-o para as variáveis dependentes em termos de quaisquer variáveis livres que tenham sobrado.

EXEMPLO 7 Resolva o sistema do Exemplo 5 pelo método de eliminação de Gauss-Jordan.

SOLUÇÃO: A redução é feita como fizemos no Exemplo 5, até chegarmos à forma escalonada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Agora, devemos criar um 0 acima do 1 líder da segunda linha, terceira coluna. Fazemos isso somando a linha 2 à linha 1, obtendo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema foi então reduzido a

$$\begin{aligned} w - x \quad\; + z &= 2 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

Agora é bem mais fácil resolver o sistema em função das variáveis dependentes:

$$w = 2 + x - z \quad \text{e} \quad y = 1 + z$$

Se atribuirmos parâmetros $x = s$ e $z = t$, como anteriormente, a solução pode ser escrita na forma vetorial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{bmatrix}$$

Observação:

- Do ponto de vista computacional, é mais eficiente (no sentido de requerer menos cálculos) primeiro reduzir a matriz à forma escalonada por linhas e, depois, trabalhando *da direita para a esquerda*, transformar cada elemento líder em 1 e criar zeros acima desses 1 líderes. Entretanto, para cálculos à mão, você achará mais fácil trabalhar da esquerda para a direita e criar o 1 líder e os zeros em suas colunas à medida que for trabalhando.

Retornemos à geometria que nos trouxe até este ponto. Assim como equações lineares* com duas variáveis correspondem a retas em $\mathbb{R}^2$, equações lineares em três variáveis correspondem a planos em $\mathbb{R}^3$. De fato, muitas questões sobre retas e planos podem ser respondidas através da resolução de um sistema linear apropriado.

EXEMPLO 8 Encontre a reta interseção dos planos $x + 2y - z = 3$ e $2x + 3y + z = 1$.

SOLUÇÃO: Observe primeiramente que *haverá* uma reta interseção, já que os vetores normais aos planos — $[1, 2, -1]$ e $[2, 3, 1]$ — não são paralelos. Os pontos que estão na interseção dos planos correspondem aos pontos do conjunto solução do sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 3y + z &= 1 \end{aligned}$$

O método de eliminação de Gauss-Jordan, aplicado à matriz completa, fornece:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_2]{L_1 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

Colocando novamente as variáveis, temos

$$\begin{aligned} x \quad + 5z &= -7 \\ y - 3z &= 5 \end{aligned}$$

Igualamos a variável livre z a um parâmetro t e então obtemos as equações paramétricas da reta interseção dos dois planos:

$$\begin{aligned} x &= -7 - 5t \\ y &= 5 + 3t \\ z &= t \end{aligned}$$

Na forma vetorial, a equação é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Veja a Figura 1.

* N.T.: No original está escrito "Assim como sistemas de equações lineares...", mas não é correto: o autor certamente quis dizer "equações", e não "sistemas de equações".

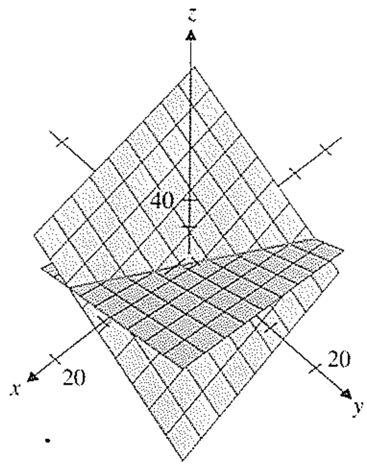

Figura 1 A interseção de dois planos

EXEMPLO 9 Sejam $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Determine se as retas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{u}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ se interceptam e, em caso afirmativo, encontre o ponto de interseção.

SOLUÇÃO: Precisamos ser cuidadosos aqui. Embora a letra t tenha sido usada como parâmetro nas equações das duas retas, as retas são independentes e, portanto, seus parâmetros também o são. Vamos usar outro parâmetro — por exemplo, s — para a primeira reta; sua equação torna-se $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$. Se as retas se interceptarem, precisaremos encontrar um $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que satisfaça ambas as equações simultaneamente — isto é, $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ ou $s\mathbf{u} - t\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$.

Substituindo **p**, **q**, **u** e **v** dados, obtemos as equações

$$\begin{aligned} s - 3t &= -1 \\ s + \ \ t &= \ \ 2 \\ s + \ \ t &= \ \ 2 \end{aligned}$$

cuja solução, fácil de encontrar, é $s = \frac{5}{4}$ e $t = \frac{3}{4}$. O ponto de interseção é, portanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{5}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Veja a Figura 2. (Verifique que a substituição $t = \frac{3}{4}$ na outra equação dá o mesmo ponto.)

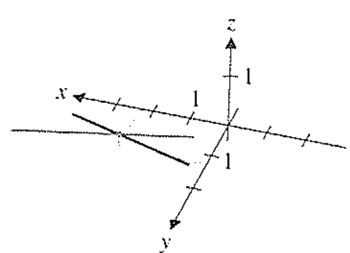

Figura 2 Duas retas concorrentes*

* N.T.: *Retas concorrentes* são retas que se interceptam.

Observação: ◆ Em $\mathbb{R}^3$, duas retas distintas ou podem se interceptar em um ponto, ou ser paralelas, ou podem estar em uma posição relativa diferente das anteriores. Retas não paralelas que não se interceptam são chamadas *retas reversas*.

Sistemas Homogêneos

Vimos que todo sistema de equações lineares ou não tem nenhuma solução, ou tem uma única solução, ou tem infinitas soluções. Porém, existe um tipo de sistema linear que sempre tem pelo menos uma solução.

Definição Um sistema de equações lineares é chamado ***homogêneo*** se o termo constante em cada equação é igual a zero.

Em outras palavras, um sistema homogêneo tem uma matriz completa da forma $[A \mid \mathbf{0}]$. O seguinte sistema é homogêneo:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0 \\ -x + 5y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Como um sistema homogêneo não pode não ter solução (perdoe a dupla negação!), ele terá ou uma única solução ou infinitas soluções. O próximo teorema diz que o último caso *ocorrerá* sempre que o número de variáveis for maior que o número de equações.

◆ TEOREMA 3

Se $[A \mid \mathbf{0}]$ for a matriz completa de um sistema homogêneo de m equações lineares com n variáveis, onde $m < n$, então o sistema terá infinitas soluções.

DEMONSTRAÇÃO: Como o sistema admite pelo menos a solução nula, ele é possível. Além disso, posto$(A) \leq m$ (por quê?). Pelo Teorema do Posto, temos:

$$\text{número de variáveis livres} = n - \text{posto}(A) \geq n - m > 0.$$

Existe, portanto, pelo menos uma variável livre e, conseqüentemente, infinitas soluções. ◆

Nota: O Teorema 3 não diz nada sobre o caso $m \geq n$. O Exercício 42 pede a você exemplos que mostrem que, nessa situação, tanto pode haver sistemas com uma única solução quanto sistemas com infinitas soluções.

Sistemas Lineares sobre $\mathbb{Z}_p$

Até aqui, todos os sistemas lineares que encontramos envolveram números reais, e as soluções, em concordância, têm sido vetores em algum $\mathbb{R}^n$. Vimos como outros sistemas numéricos podem surgir — notadamente, $\mathbb{Z}_p$. Quando p é um número primo, $\mathbb{Z}_p$ comporta-se como $\mathbb{R}$ sob muitos aspectos; em particular, podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir (por números não nulos).[2] Assim, podemos também resolver

[2] $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}_p$ são exemplos de uma estrutura algébrica chamada *corpo*. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ são outros exemplos. Corpos são ensinados com detalhes em cursos de álgebra abstrata.

sistemas de equações lineares quando as variáveis e os coeficientes pertencem a algum $\mathbb{Z}_p$. Em tais situações, dizemos resolver um sistema *sobre* $\mathbb{Z}_p$.

Por exemplo, a equação linear $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, quando vista como uma equação sobre $\mathbb{Z}_2$, tem exatamente quatro soluções:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(A última solução surge porque, em $\mathbb{Z}_2$, $1 + 1 + 1 = 1$.)

Quando olhamos a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ sobre $\mathbb{Z}_3$, as soluções $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ são

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Verifique.)

Mas nós não precisamos usar métodos de tentativa e erro; os métodos de escalonamento de matrizes completas funcionam tão bem sobre $\mathbb{Z}_p$ como sobre $\mathbb{R}$.

EXEMPLO 10 Resolva os seguintes sistemas de equações lineares sobre $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: A primeira coisa a notar em exemplos como este é que subtração e divisão não são necessárias; podemos conseguir os mesmos efeitos usando adição e multiplicação. (Isso, contudo, requer que estejamos trabalhando sobre $\mathbb{Z}_p$, onde p é primo; veja o Exercício 58, no final desta seção, e o Exercício 33, na Seção 1.5.)

Vamos agora reduzir a matriz completa do sistema usando cálculos módulo 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3+2L_2]{L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2L_3]{L_1+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A solução, portanto, é $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$.

EXEMPLO 11 Resolva o seguinte sistema de equações lineares sobre $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3 + x_4} &= 1 \\
x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 0 \\
x_3 + x_4 &= 0 \\
x_1 \phantom{{}+ x_2 + x_3} + x_4 &= 1
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO: A redução por linhas é feita da seguinte maneira:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_5 + L_1]{L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 + L_2 \\ L_5 + L_2}]{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4 + L_3]{L_2 + L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
x_1 \phantom{{}+ x_2 + x_3} + x_4 &= 1 \\
x_2 \phantom{{}+ x_3} + x_4 &= 0 \\
x_3 + x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Fixando a variável livre $x_4 = t$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como t pode assumir os valores 0 ou 1, existem exatamente duas soluções:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observação ◆ Sistemas lineares sobre $\mathbb{Z}_p$ nunca podem ter infinitas soluções. (Por que não?) Mais precisamente, quando há mais de uma solução, o número de soluções é finito e é função tanto do número de variáveis livres como de p. (Veja o Exercício 57.)

◈ EXERCÍCIOS 2.3 ◈

Nos Exercícios de 1 a 8, determine se a matriz dada está na forma escalonada por linhas. Se estiver, indique se ela também está na forma escalonada reduzida.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 9 a 14, use operações elementares para reduzir a matriz dada às formas (a) escalonada por linhas e (b) escalonada reduzida.

9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ -3 & -6 & 10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

15. Reverta as operações elementares com as linhas usadas no Exemplo 3 para mostrar que podemos converter

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \text{ em } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

16. Em geral, qual é a operação elementar com linhas que desfaz cada uma das três operações elementares com linhas $L_i \leftrightarrow L_j$, kL_i e $L_i + kL_j$?

Nos Exercícios 17 e 18, mostre que as matrizes dadas são linha-equivalentes e encontre uma seqüência de operações elementares com as linhas que convertem A em B.

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

19. O que está errado com a seguinte demonstração de que toda matriz com pelo menos duas linhas é linha-equivalente a uma matriz com uma linha nula?

Efetue $L_2 + L_1$ e $L_1 + L_2$. Agora as linhas 1 e 2 são idênticas. Efetue agora $L_2 - L_1$ para obter uma linha de zeros na segunda linha.

20. Qual o efeito resultante ao efetuar as seguintes operações elementares sobre linhas em uma matriz (com pelo menos duas linhas)?

$$L_2 + L_1,\ L_1 - L_2,\ L_2 + L_1,\ -L_1$$

21. Qual é o posto de cada uma das matrizes dos Exercícios 1 a 8?

22. Quais são as possíveis formas escalonadas reduzidas de matrizes 3×3?

Nos Exercícios de 23 a 32, resolva o sistema de equações dado usando o método de eliminação de Gauss ou o método de eliminação de Gauss-Jordan.

23. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ -x + 3y + z &= 5 \\ 3x + y + 7z &= 2 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} 2w + 3x - y + 4z &= 0 \\ 3w - x + z &= 1 \\ 3w - 4x + y - z &= 2 \end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} 2r + s &= 3 \\ 4r + s &= 7 \\ 2r + 5s &= -1 \end{aligned}$$

28. $$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 \quad &= 2 \\ \tfrac{1}{6}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \quad - 3x_4 + x_5 &= -1 \\ \tfrac{1}{3}x_1 \quad - 2x_3 \quad - 4x_5 &= 8 \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} \sqrt{2}x + y + 2z &= 1 \\ \sqrt{2}y - 3z &= -\sqrt{2} \\ -y + \sqrt{2}z &= 1 \end{aligned}$$

31.
$$\begin{aligned} w + x + 2y + z &= 1 \\ w - x - y + z &= 0 \\ x + y \quad &= -1 \\ w + x \quad + z &= 2 \end{aligned}$$

32.
$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 4 \\ a + 2b + 3c + 4d &= 10 \\ a + 3b + 6c + 10d &= 20 \\ a + 4b + 10c + 20d &= 35 \end{aligned}$$

Nos Exercícios de 33 a 36, determine, sem efetuar nenhum cálculo, se um sistema linear com a matriz completa dada tem uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução. Justifique suas respostas.

33. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

34. $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right]$

35. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{array}\right]$

36. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right]$

37. Mostre que, se $ad - bc \neq 0$, o sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

tem uma única solução.

Nos Exercícios de 38 a 41, para que valor(es) de k, se houver, o sistema terá (a) nenhuma solução, (b) uma única solução e (c) infinitas soluções?

38.
$$\begin{aligned} kx + 2y &= 3 \\ 2x - 4y &= -6 \end{aligned}$$

39.
$$\begin{aligned} x + ky &= 1 \\ kx + y &= 1 \end{aligned}$$

40.
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ x + y + z &= k \\ 2x - y + 4z &= k^2 \end{aligned}$$

41.
$$\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ kx + y + z &= -2 \end{aligned}$$

42. Dê exemplos de sistemas homogêneos com m equações lineares em n variáveis, com $m = n$ e com $m > n$, que tenham (a) infinitas soluções e (b) uma única solução.

Nos Exercícios 43 e 44, encontre a reta interseção de cada par de planos dados.

43. $3x + 2y + z = -1$ e $2x - y + 4z = 5$

44. $4x + y - z = 0$ e $2x - y + 3z = 4$

45. (a) Dê um exemplo de três planos cuja interseção seja uma reta (Figura 3).

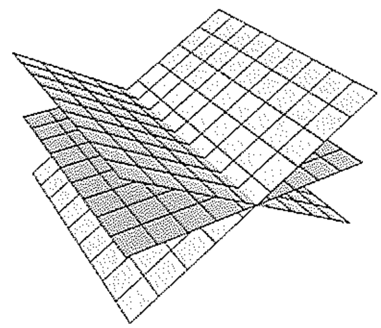

Figura 3

(b) Dê um exemplo de três planos que não tenham nenhum ponto em comum, mas se interceptem dois a dois (Figura 4).

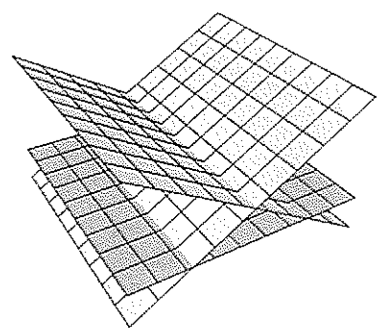

Figura 4

(c) Dê um exemplo de três planos, de modo que exatamente dois deles sejam paralelos (Figura 5).

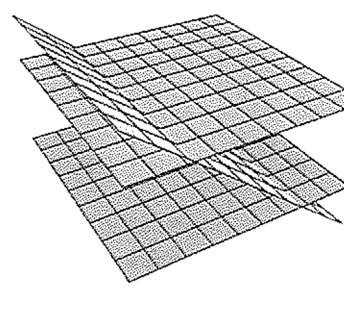

Figura 5

(d) Dê um exemplo de três planos que se interceptem em um único ponto (Figura 6).

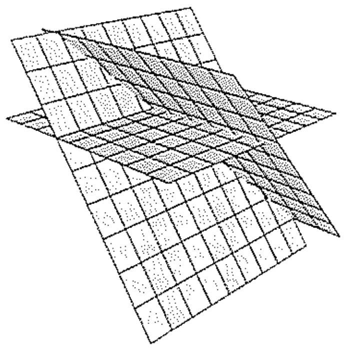

Figura 6

Nos Exercícios 46 e 47, determine se as retas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ *se interceptam e, nesse caso, encontre o ponto de interseção.*

46. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

47. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

48. Sejam $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Descreva todos os pontos $Q = (a, b, c)$ tais que a reta que passa por Q e tem a direção do vetor $\mathbf{v}$ intercepte a reta de equação $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$.

49. Lembre-se de que o produto vetorial dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é um vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal a ambos os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. (Veja Investigação: O Produto Vetorial, no Capítulo 1.) Se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

mostre que existem infinitos vetores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

que satisfazem $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ simultaneamente e que são múltiplos de $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$

50. Sejam $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Mostre que as retas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ são reversas. Encontre equações vetoriais de um par de planos paralelos, de modo que cada um deles contenha uma das retas.

Nos Exercícios de 51 a 56, resolva o sistema de equações lineares sobre o corpo $\mathbb{Z}_p$ *indicado.*

51. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

52. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_2$

53. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

54. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

55. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_7$

56. $\begin{aligned} x_1 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

57. Prove o seguinte corolário do Teorema do Posto: seja A uma matriz $m \times n$ com elementos em $\mathbb{Z}_p$. Qualquer sistema de equações lineares possível, com matriz dos coeficientes igual a A, tem exatamente $p^{n-\text{posto}(A)}$ soluções sobre $\mathbb{Z}_p$.

58. Quando p não é primo, um cuidado extra é necessário ao resolvermos um sistema linear (ou, na verdade, qualquer equação) sobre $\mathbb{Z}_p$. Usando o método de eliminação de Gauss, resolva o seguinte sistema sobre $\mathbb{Z}_6$. Qual complicação surge?

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + 3y &= 2 \end{aligned}$$