



Vetores

Lá vêm elas como se viessem do nada.
Pequenas flechas para mim e para você.

– Albert Hammond e Mike Hazelwood
Little arrows
Dutchess Music/BMI, 1968

1.1 Introdução: O Jogo da Pista de Corrida

Muitas quantidades mensuráveis – tais como comprimento, área, volume, massa e temperatura – podem ser completamente descritas pela especificação de sua magnitude. Outras quantidades – como velocidade, força e aceleração – requerem tanto uma magnitude como uma direção para serem descritas. Essas quantidades são *vetores*. Por exemplo, a velocidade do vento é um vetor que consiste na intensidade do vento e da sua direção, tal como 10 km/h na direção sudoeste. Geometricamente, os vetores são freqüentemente representados por flechas ou segmentos de reta orientados.

Embora a idéia de vetor tenha sido introduzida no século XIX, sua utilidade em aplicações – particularmente as aplicações em ciências físicas – não foi percebida até o século XX. Mais recentemente, vetores tiveram aplicações em ciência da computação, estatística, economia e ciências sociais. Examinaremos algumas dessas muitas aplicações ao longo deste livro.

Este capítulo introduz a noção de vetores e começa a examinar algumas de suas propriedades geométricas e algébricas. Examinaremos também uma aplicação não geométrica na qual vetores são úteis. Começaremos, entretanto, com um jogo simples que introduz algumas das idéias cruciais. [Você pode até querer jogá-lo com um amigo durante aqueles (muito raros!) momentos chatos da aula de Álgebra Linear.]

O jogo acontece em um papel quadriculado. Uma pista, com uma linha de partida e uma linha de chegada, é desenhada no papel. A pista pode ser de qualquer comprimento e forma, desde que seja suficientemente larga para acomodar todos os jogadores. Neste exemplo, temos dois jogadores (vamos chamá-los de Ana e Beto) que usam canetas de cores diferentes para representar seus carros ou bicicletas, ou outra coisa que eles usem para percorrer a pista. (Vamos pensar em Ana e Beto como ciclistas.)

Ana e Beto começam desenhando uma marca sobre a linha de partida, em um dos pontos da grade do papel quadriculado. Eles se revezam para avançar para um novo ponto da grade, de acordo com as seguintes regras:

1. Cada novo ponto da grade e o segmento de reta que o liga ao ponto anterior precisam estar inteiramente dentro da pista.

- Dois jogadores não podem ocupar o mesmo ponto da grade ao mesmo tempo. (Esta é a regra que proíbe colisões.)
- Cada novo movimento está relacionado com o movimento anterior da seguinte maneira: se em um movimento um jogador anda a unidades horizontalmente e b unidades verticalmente, então, em seu próximo movimento, esse jogador deve andar entre $a - 1$ e $a + 1$ unidades horizontalmente, e entre $b - 1$ e $b + 1$ unidades verticalmente. Em outras palavras, se o segundo movimento é de c unidades horizontalmente e d unidades verticalmente, então $|a - c| \leq 1$ e $|b - d| \leq 1$. (Esta é a regra da "aceleração/desaceleração".) Note que esta regra obriga o primeiro movimento a ser de uma unidade verticalmente e/ou de uma unidade horizontalmente.

É eliminado o jogador que colide com outro ou sai da pista. O vencedor é o primeiro jogador que cruza a linha de chegada. Se mais de um jogador cruzar a linha de chegada na mesma vez, aquele que ultrapassar mais a linha de chegada será o vencedor.

O matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805–1865) usou conceitos de vetores em seu estudo dos números complexos e das suas generalizações, os quatérnios.

No exemplo de jogo mostrado na Figura 1, a vencedora foi Ana. Beto acelerou demais e teve dificuldade para fazer a curva na parte superior da pista.

Para entender a regra 3, considere o terceiro e o quarto movimentos de Ana. Em seu terceiro movimento, ela andou uma unidade horizontalmente e três unidades verticalmente. Em seu quarto

movimento, as opções que ela tinha eram andar de zero a duas unidades horizontalmente e de duas a quatro unidades verticalmente. (Note que algumas dessas combinações a teriam levado para fora da pista.) Ela escolheu andar duas unidades em cada direção.

Problema 1: Jogue alguns jogos de pista de corrida.

Problema 2: Seria possível Beto vencer essa corrida escolhendo uma sequência diferente de movimentos?

Problema 3: Qual é o menor número de movimentos necessário para retornar a um ponto no qual você já esteve antes?

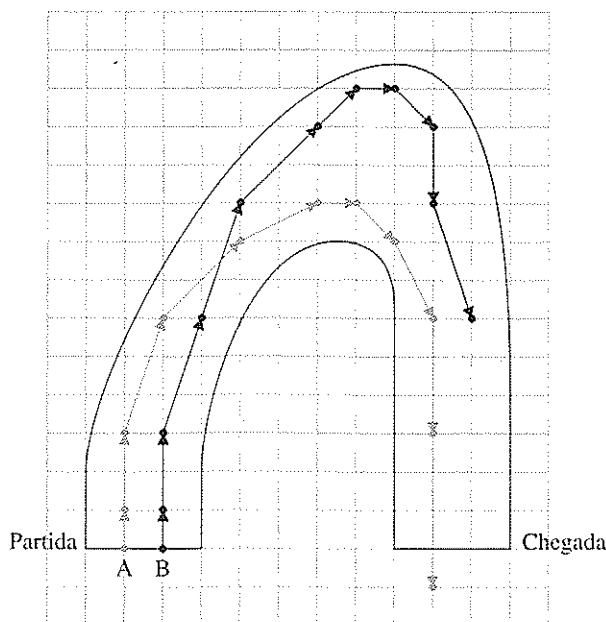


Figura 1 Um exemplo de jogo de pista de corrida

Problema 4: Use a notação $[a, b]$ para denotar um movimento de a unidades horizontalmente e b unidades verticalmente. (Tanto a como b podem ser negativos.) Se o movimento $[3, 4]$ acabou de ser feito, desenhe no papel quadriculado todos os pontos da grade que podem ser alcançados no próximo movimento.

Problema 5: Qual o efeito *líquido* de dois movimentos sucessivos? Em outras palavras, se você andar $[a, b]$ e depois $[c, d]$, quanto você andar horizontalmente e verticalmente no total?

Problema 6: Escreva a seqüência de movimentos de Ana usando a notação $[a, b]$. Suponha que ela comece na origem $(0, 0)$ dos eixos de coordenadas. Explique como você pode achar as coordenadas dos pontos da grade correspondentes a cada um dos movimentos dela, *sem olhar para o papel quadriculado*. Se os eixos tivessem sido traçados de um outro jeito, de modo que o ponto de partida de Ana fosse o ponto $(2, 3)$, e não a origem, quais seriam as coordenadas do ponto onde ela parou?

Embora simples, esse jogo introduz várias idéias que serão úteis em nosso estudo de vetores. As três próximas seções consideram vetores dos pontos de vista geométrico e algébrico, começando como no jogo de pista de corrida, no plano.

1.2 A Geometria e a Álgebra dos Vetores

Vetores no Plano

Começamos considerando o plano Cartesiano com os conhecidos eixos x e y .¹ Um **vetor** é um segmento de linha orientado que corresponde ao deslocamento de um ponto A até outro ponto B , conforme mostra a Figura 1 a seguir.

A palavra **vetor** vem de um radical latino que significa "carregar". Um vetor é formado quando um ponto é deslocado – ou "carregado" – por uma certa distância em uma certa direção. Visto de outro modo, um vetor "carrega" duas peças de informação: seu comprimento e sua direção.

O vetor de A até B é denotado por $\overrightarrow{AB}$; dizemos que o ponto A é o **ponto inicial** ou **origem** desse vetor, e que o ponto B é o seu **ponto final** ou **extremidade**. Muitas vezes, um vetor é simplesmente denotado por uma só letra minúscula em negrito, como $\mathbf{v}$.²

O conjunto de todos os pontos do plano corresponde ao conjunto de todos os vetores cujos pontos iniciais coincidem com a origem O do plano Cartesiano. A cada ponto A corresponde um vetor

$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$; a cada vetor $\mathbf{a}$ com ponto inicial em O corresponde seu ponto final A . (Vetores com essa forma são às vezes chamados *vetores posição*.)

É natural representar tais vetores usando coordenadas. Por exemplo, na Figura 2, $A = (3, 2)$, e escrevemos o vetor $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = [3, 2]$ usando colchetes. De modo análogo, os outros vetores da Figura 2 são

$$\mathbf{b} = [-1, 3] \text{ e } \mathbf{c} = [2, -1]$$

¹ O plano cartesiano recebeu esse nome em homenagem ao filósofo matemático francês René Descartes (1596-1650), que introduziu o conceito de coordenadas. Esse conceito permitiu que problemas *geométricos* fossem tratados com o uso de técnicas *algébricas*.

² É difícil indicar negrito quando escrevemos vetores à mão. Algumas pessoas preferem escrever $\vec{v}$ para representar o vetor denotado por $\mathbf{v}$ no texto impresso, mas na maioria dos casos é aceitável usar simplesmente a letra v minúscula. Geralmente ficará claro, pelo contexto, se essa letra denota um vetor ou não.

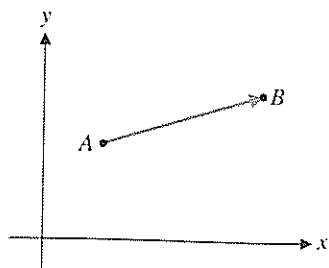


Figura 1

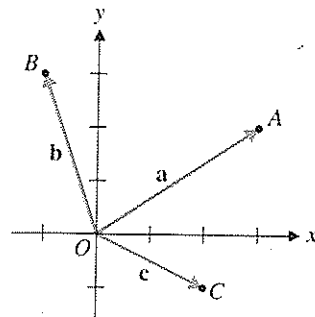


Figura 2

A palavra *componente* é derivada das palavras latinas *co*, que significa "junto", e *ponere*, que significa "pôr". Um vetor é, portanto, formado por suas componentes postas uma junto da outra.

As coordenadas individuais (3 e 2, no caso de **a**) são chamadas *componentes*^{*} do vetor. Às vezes nos referimos a um vetor como um *par ordenado* de números reais. A ordem é importante, pois, por exemplo, $[3, 2] \neq [2, 3]$. Em geral, dois vetores são iguais se e somente se suas componentes correspondentes forem iguais. Assim, $[x, y] = [1, 5]$ implica que $x = 1$ e $y = 5$.

Muitas vezes é conveniente usar *vetores coluna* em vez de (ou além de) *vetores linha*. Outra representação de $[3, 2]$ é $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. (O ponto importante é que as componentes estão *ordenadas*.) Em capítulos futuros, você verá que vetores coluna são um pouco melhores do ponto de vista computacional. Por ora, tente se acostumar com ambas as representações.

Você talvez tenha notado que não podemos realmente desenhar o vetor $[0, 0] = \overrightarrow{OO}$ da origem até ela mesma. Mesmo assim, esse é um vetor tão bom quanto qualquer outro e tem um nome especial: **vetor nulo**. O vetor nulo é denotado por $\mathbf{0}$.

O conjunto de todos os vetores com duas componentes é denotado por $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$ denota o conjunto de todos os números reais, dentre os quais as coordenadas dos vetores em $\mathbb{R}^2$ são escolhidas).³ Assim, $[-1, 3, 5]$, $[\sqrt{2}, \pi]$ e $\mathbf{c} = [\frac{5}{3}, 4]$ estão todos em $\mathbb{R}^2$.

Pensando novamente no jogo da pista de corrida, tentemos relacionar aquelas idéias com vetores cujos pontos iniciais *não* estão na origem. O fato de a palavra *vetor* ter sua raiz etimológica no verbo "carregar" nos dá uma pista. O vetor $[3, 2]$ pode ser interpretado da seguinte maneira: começando na origem O , ande três unidades para a direita e depois duas unidades para cima, parando em P . O mesmo deslocamento pode ser aplicado com outros pontos iniciais. A Figura 3 mostra dois deslocamentos equivalentes, representados pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

Dizemos que dois vetores são *iguais* se eles têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Assim, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ na Figura 3. (Embora tenham diferentes pontos iniciais e finais, eles representam o mesmo deslocamento.) Geometricamente, dois vetores são iguais se obtemos um deles deslocando o outro paralelamente a si próprio (ou seja, fazendo uma *translação*), até que os dois vetores coincidam. Em termos das componentes, na Figura 3 temos $A = (3, 1)$ e $B = (6, 3)$.⁴ Note que o vetor $[3, 2]$, que representa o deslocamento, é simplesmente a diferença das respectivas componentes:

$$\overrightarrow{AB} = [3, 2] = [6 - 3, 3 - 1]$$

^{*} N.T.: A expressão "coordenadas do vetor" também é usada.

³ $\mathbb{R}^2$ é pronunciado como "r dois".

⁴ Quando os vetores são expressos em termos das suas coordenadas, eles estão sendo considerados *analiticamente*.

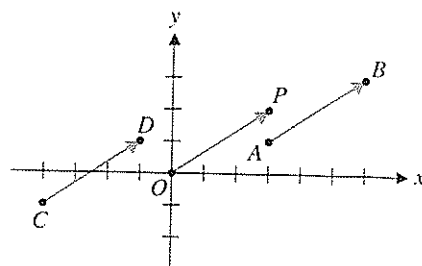


Figura 3

De modo análogo,

$$\overrightarrow{CD} = [-1 - (-4), 2 - (-1)] = [3, 2]$$

e, portanto, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, como se esperava.

Um vetor como $\overrightarrow{OP}$, que tem seu ponto inicial na origem do plano, está na *posição padrão*. A discussão anterior mostra que todo vetor pode ser desenhado como um vetor na posição padrão. Reciprocamente, um vetor na posição padrão pode ser redesenhado (fazendo-se uma translação) de modo que seu ponto inicial seja um ponto qualquer do plano.

EXEMPLO 1 Dados $A = (-1, 2)$ e $B = (3, 4)$, ache $\overrightarrow{AB}$ e redesenhe-o (a) na posição padrão e (b) com o ponto inicial no ponto $C = (2, -1)$.

SOLUÇÃO: Calculamos $\overrightarrow{AB} = [3 - (-1), 4 - 2] = [4, 2]$. Se fizermos a translação de $\overrightarrow{AB}$ para $\overrightarrow{CD}$, onde $C = (2, -1)$, precisaremos ter $D = (2 + 4, -1 + 2) = (6, 1)$. (Veja a Figura 4.)

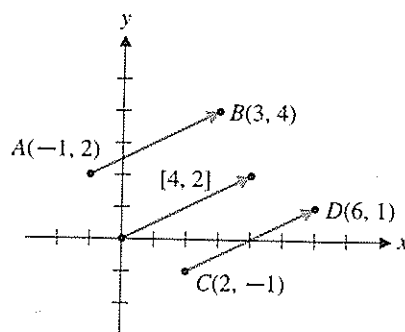


Figura 4

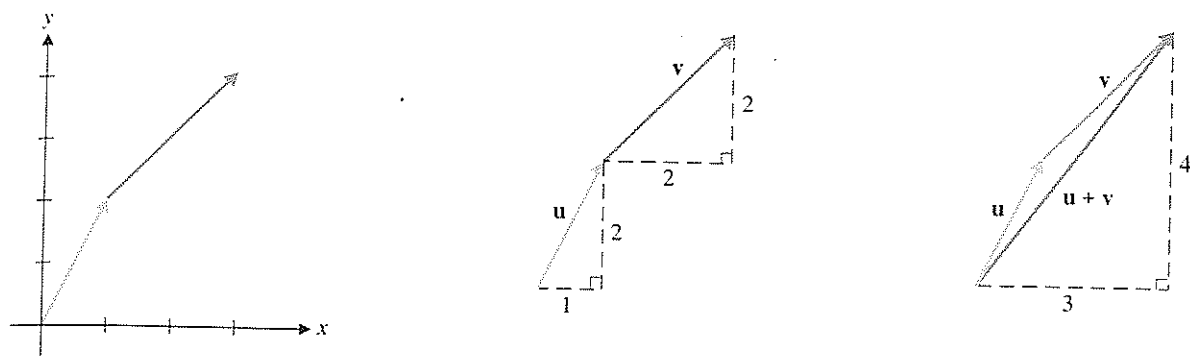


Figura 5 Adição de vetores

Novos Vetores a Partir de Vetores Existentes

Muitas vezes queremos colocar “um vetor depois do outro” e assim fazer um deslocamento suceder outro, como no jogo da pista de corrida. Isso nos leva à noção de **adição de vetores**, a primeira das operações básicas com vetores.

Se colocarmos $\mathbf{v}$ depois de $\mathbf{u}$, poderemos visualizar o deslocamento total como um terceiro vetor, denotado por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Na Figura 5, $\mathbf{u} = [1, 2]$ e $\mathbf{v} = [2, 2]$, de modo que o efeito resultante de colocar $\mathbf{v}$ depois de $\mathbf{u}$ é

$$[1 + 2, 2 + 2] = [3, 4]$$

que representa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Em geral, se $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$ e $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$, então sua **soma** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é o vetor

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$$

É útil visualizar $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ geometricamente. A regra seguinte é a versão geométrica da discussão anterior.

◆ A Regra da Adição

Dados os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ no $\mathbb{R}^2$, faça uma translação de $\mathbf{v}$ de modo que seu ponto inicial coincida com o ponto final de $\mathbf{u}$. A **soma** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é o vetor que sai do ponto inicial de $\mathbf{u}$ e vai até o ponto final de $\mathbf{v}$. (Veja a Figura 6.)

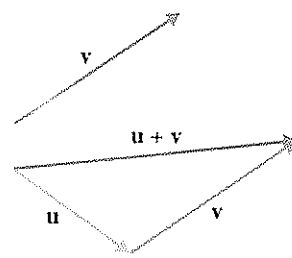


Figura 6 A regra da adição

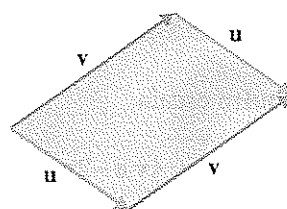


Figura 7 O paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

Transladando $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ paralelamente a eles mesmos, obtemos um paralelogramo, conforme mostra a Figura 7. Esse paralelogramo é chamado de *paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$* . Ele nos leva a uma versão equivalente à regra da adição, para vetores na posição padrão.

◆ A Regra do Paralelogramo

Dados os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ no $\mathbb{R}^2$ (na posição padrão), sua *soma* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é o vetor na posição padrão sobre a diagonal do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. (Veja a Figura 8.)

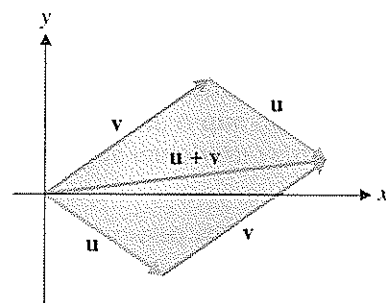


Figura 8 A regra do paralelogramo

EXEMPLO 2 Dados $\mathbf{u} = [3, -1]$ e $\mathbf{v} = [1, 4]$, calcule e desenhe $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

SOLUÇÃO: Calculamos $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [3 + 1, -1 + 4] = [4, 3]$. Esse vetor é desenhado por meio da regra da adição na Figura 9(a) e da regra do paralelogramo na Figura 9(b).

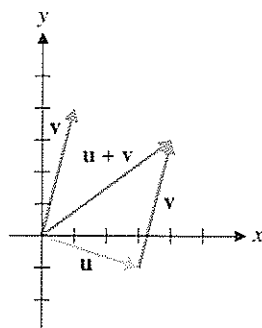
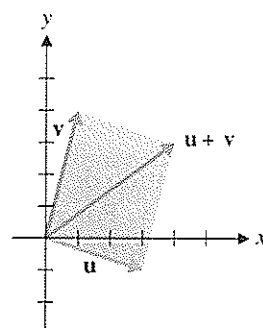


Figura 9 (a)



(b)

A segunda operação básica que fazemos com vetores é a *multiplicação por escalar*. Dado um vetor $\mathbf{v}$ e um número real c , o *múltiplo escalar* $c\mathbf{v}$ é o vetor obtido pela multiplicação de cada componente de $\mathbf{v}$ por c . Por exemplo, $3[-2, 4] = [-6, 12]$. Em geral,

$$c\mathbf{v} = c[v_1, v_2] = [cv_1, cv_2]$$

Geometricamente, $c\mathbf{v}$ é uma versão de $\mathbf{v}$ em outra escala.

EXEMPLO 3 Se $\mathbf{v} = [-2, 4]$, determine e desenhe $2\mathbf{v}$, $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ e $-2\mathbf{v}$.

SOLUÇÃO: Calculamos da seguinte maneira:

$$2\mathbf{v} = [2(-2), 2(4)] = [-4, 8]$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{v} = [\frac{1}{2}(-2), \frac{1}{2}(4)] = [-1, 2]$$

$$-2\mathbf{v} = [-2(-2), -2(4)] = [4, -8]$$

Esses vetores são mostrados na Figura 10.

O termo *escalar* vem da palavra grega *scala*, que significa "escada". Os degraus igualmente espaçados de uma escada sugerem uma escala, e, na aritmética vetorial, a multiplicação por uma constante altera apenas a escala (ou comprimento e sentido) de um vetor. Assim, as constantes são conhecidas como escalares.

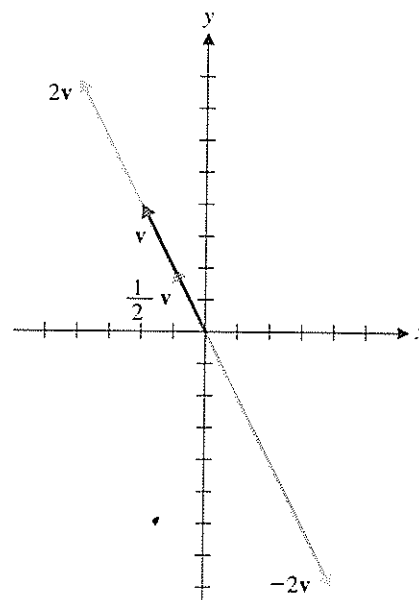


Figura 10

Observe que $c\mathbf{v}$ tem o mesmo sentido de $\mathbf{v}$ se $c > 0$, e sentido oposto se $c < 0$. Além disso, o comprimento de $c\mathbf{v}$ é $|c|$ vezes o comprimento de $\mathbf{v}$. Por esse motivo, no contexto dos vetores, as constantes (isto é, os números reais) são chamadas de *escalares*. Levando-se em conta a translação de vetores, dois vetores são múltiplos escalares um do outro se e somente se eles são *paralelos*, como mostra a Figura 11.

Um caso especial de múltiplo escalar é $(-1)\mathbf{v}$, escrito como $-\mathbf{v}$ e chamado *oposto de v*. Podemos usá-lo para definir *subtração de vetores*: a *diferença* entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é o vetor $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, definido por

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

A Figura 12 mostra que $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ corresponde à "outra" diagonal do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

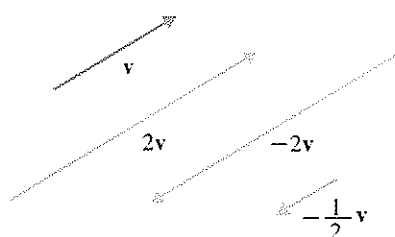


Figura 11

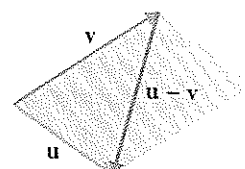
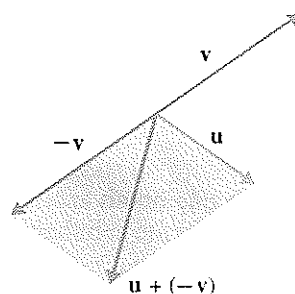


Figura 12 Subtração de vetores

EXEMPLO 4 Se $\mathbf{u} = [1, 2]$ e $\mathbf{v} = [-3, 1]$, então $\mathbf{u} - \mathbf{v} = [1 - (-3), 2 - 1] = [4, 1]$.



A definição de subtração no Exemplo 4 também lembra o procedimento para determinarmos um vetor como $\overrightarrow{AB}$. Se os pontos A e B correspondem aos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ na posição padrão, então $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, como mostra a Figura 13. [Observe que a regra da adição, aplicada a esse diagrama, fornece a equação $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Se tivéssemos, acidentalmente, desenhado $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ com extremidade em A e não em B , o diagrama seria lido como $\mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a}$, o que é claramente falso! Ainda nesta seção, falaremos mais sobre expressões algébricas que envolvem vetores.]

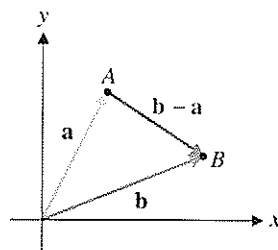


Figura 13

Vetores em $\mathbb{R}^3$

Tudo o que fizemos até agora se generaliza facilmente para três dimensões. O conjunto de todas as *triplos ordenadas* de números reais é denotado por $\mathbb{R}^3$. Pontos e vetores são localizados usando-se três eixos coordenados perpendiculares dois a dois e que se encontram em uma origem O . Por exemplo, o ponto $A = (1, 2, 3)$ pode ser localizado assim: primeiro percorremos uma unidade ao longo do eixo x , então nos movemos duas unidades paralelamente ao eixo y e finalmente percorremos três unidades paralelamente ao eixo z . O vetor correspondente $\mathbf{a} = [1, 2, 3]$ é então $\overrightarrow{OA}$, como mostra a Figura 14.

Uma outra maneira de visualizar o vetor $\mathbf{a}$ em $\mathbb{R}^3$ é construir uma caixa cujas seis faces sejam determinadas pelos três planos coordenados (os planos xy , xz , e yz) e pelos três planos paralelos aos planos coordenados e que passam por $(1, 2, 3)$. O vetor $[1, 2, 3]$ corresponde à diagonal que liga a origem ao vértice diametralmente oposto (Figura 15).

As definições “componente a componente” da adição de vetores e multiplicação por escalar se estendem a $\mathbb{R}^3$ de maneira óbvia.

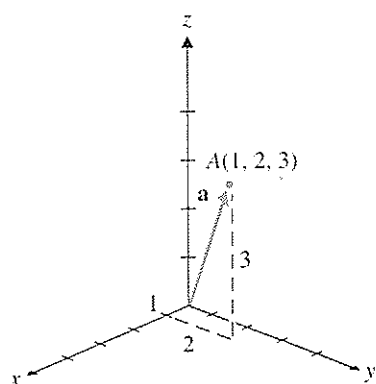


Figura 14

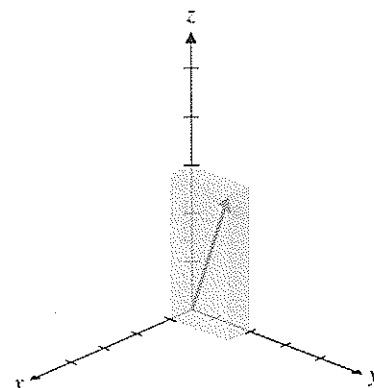


Figura 15

Vetores em $\mathbb{R}^n$

Em geral, definimos $\mathbb{R}^n$ como o conjunto de todas as *n-uplas ordenadas* de números reais, escritos como vetores linha ou coluna. Assim, um vetor $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$ é da forma

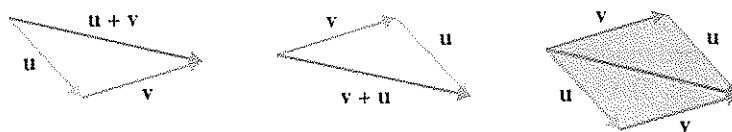
$$[v_1, v_2, \dots, v_n] \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

As coordenadas individuais de $\mathbf{v}$ são as suas componentes; v_i é chamada a *i*-ésima componente.

Estendemos a definição de adição de vetores e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^n$ de maneira óbvia: se $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ e $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, a *i*-ésima componente de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é $u_i + v_i$, e a *i*-ésima componente de $c\mathbf{v}$ é simplesmente cv_i .

Como não podemos desenhar vetores em $\mathbb{R}^n$, é importante que sejamos capazes de calcular com vetores. Devemos ser cuidadosos e não assumir que a aritmética vetorial seja similar à aritmética dos números reais. Frequentemente o é, e os cálculos algébricos que fazemos com os vetores são similares aos que fazemos com números. No entanto, nas seções subsequentes, encontraremos situações em que a álgebra vetorial é *bem diferente* das situações que encontramos em nossa experiência com os números reais. É importante, pois, verificar todas as propriedades algébricas antes de ceder à tentação de usá-las.

Uma dessas propriedades é a *comutatividade* da adição: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ para vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Isso é certamente verdadeiro em $\mathbb{R}^2$. Geometricamente, a regra de origem-de-um-na-extremidade-do-outro mostra que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ são ambos a mesma diagonal do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. (A regra do paralelogramo reflete essa simetria; veja a Figura 16.)

Figura 16 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$



Note que a Figura 16 é simplesmente uma ilustração da propriedade $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Não é uma demonstração, pois não considera todos os casos possíveis. Por exemplo, devemos incluir os casos onde $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. (Como seria o diagrama para estes casos?) Por esse motivo, é necessária uma demonstração algébrica. Entretanto, é tão fácil fornecer uma demonstração válida em $\mathbb{R}^n$ quanto uma válida em $\mathbb{R}^2$.

O seguinte teorema resume as propriedades algébricas da adição de vetores e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^n$. As demonstrações são consequências das propriedades correspondentes dos números reais.

◆ **TEOREMA 1** Propriedades Algébricas dos Vetores em $\mathbb{R}^n$

Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$, e a e b escalares. Então:

- | | |
|--|------------------|
| a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | Comutatividade |
| b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | Associatividade |
| c. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ | |
| d. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ | |
| e. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ | Distributividade |
| f. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$ | Distributividade |
| g. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$ | |
| h. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ | |

Observações:

- ◆ As propriedades (c) e (d), juntamente com a propriedade (a) de comutatividade, implicam que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, assim como $-\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- ◆ Se lermos da direita para a esquerda as propriedades (e) e (f) de distributividade, elas dizem que podemos *fatorar* tanto um escalar quanto um vetor que seja comum às parcelas de uma soma.

A palavra *teorema* se origina da palavra grega *theorema*, que, por sua vez, vem de uma palavra que significa "examinar". Um teorema é baseado em idéias que temos quando observamos exemplos e extraímos deles as propriedades que tentamos provar que valem em geral.

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos as propriedades (a) e (b) e deixaremos as demonstrações das outras propriedades como exercícios. Sejam

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n], \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \text{ e } \mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} &= [u_1, u_2, \dots, u_n] + [v_1, v_2, \dots, v_n] \\ &= [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n] \\ &= [v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n] \\ &= [v_1, v_2, \dots, v_n] + [u_1, u_2, \dots, u_n] \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \end{aligned}$$

A segunda e a quarta igualdades valem pela definição de adição de vetores, e a terceira decorre da comutatividade da adição de números reais.

(b) A Figura 17 ilustra a associatividade em $\mathbb{R}^2$. Algebricamente, temos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= ([u_1, u_2, \dots, u_n] + [v_1, v_2, \dots, v_n]) + [w_1, w_2, \dots, w_n] \\ &= [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n] + [w_1, w_2, \dots, w_n] \\ &= [(u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \dots, (u_n + v_n) + w_n] \\ &= [u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \dots, u_n + (v_n + w_n)] \\ &= [u_1, u_2, \dots, u_n] + [v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n] \\ &= [u_1, u_2, \dots, u_n] + ([v_1, v_2, \dots, v_n] + [w_1, w_2, \dots, w_n]) \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \end{aligned}$$

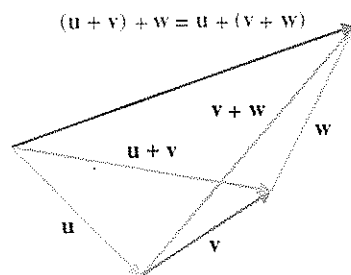


Figura 17

A quarta igualdade vale pela associatividade da adição de números reais. Note o uso cuidadoso dos parênteses. ♦

Pela propriedade (b) do Teorema 1, podemos, sem ambigüidade, escrever $u + v + w$ omitindo os parênteses, já que podemos agrupar os somandos na ordem que quisermos. Por (a), também podemos rearranjar os somandos — por exemplo, como $w + u + v$ — se assim o desejarmos. Da mesma maneira, somas de quatro ou mais vetores podem ser efetuadas sem levarmos em conta a ordem ou a maneira de agrupar. Em geral, se $v_1, v_2, \dots, v_k$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, escrevemos sua soma sem parênteses:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k$$

O próximo exemplo ilustra o uso do Teorema 1 ao efetuarmos cálculos algébricos com vetores.

EXEMPLO 5 Suponhamos que a, b e x sejam vetores em $\mathbb{R}^n$.

(a) Simplifique $3a + (5b - 2a) + 2(b - a)$.

(b) Se $5x - a = 2(a + 2x)$, encontre x em função de a .

SOLUÇÃO: Daremos ambas as soluções com detalhes, fazendo referência a cada propriedade do Teorema 1 que usarmos. É uma boa prática justificar todos os passos nas primeiras vezes que você fizer esse tipo de cálculo. Uma vez familiarizado com as propriedades dos vetores, é aceitável que você omita alguns dos passos intermediários para economizar tempo e espaço.

(a) Começamos inserindo parênteses.

$$\begin{aligned}
 3a + (5b - 2a) + 2(b - a) &= (3a + (5b - 2a)) + 2(b - a) \\
 &= (3a + (-2a + 5b)) + (2b - 2a) && \text{(a), (e)} \\
 &= ((3a + (-2a)) + 5b) + (2b - 2a) && \text{(b)} \\
 &= ((3 + (-2))a + 5b) + (2b - 2a) && \text{(f)} \\
 &= (1a + 5b) + (2b - 2a) \\
 &= ((a + 5b) + 2b) - 2a && \text{(b), (h)} \\
 &= (a + (5b + 2b)) - 2a && \text{(b)} \\
 &= (a + (5 + 2)b) - 2a && \text{(f)} \\
 &= (7b + a) - 2a && \text{(a)} \\
 &= 7b + (a - 2a) && \text{(b)} \\
 &= 7b + (1 - 2)a && \text{(f), (h)} \\
 &= 7b + (-1)a \\
 &= 7b - a
 \end{aligned}$$

Agora você pode ver por que concordaremos em omitir algumas dessas etapas! Na prática, é aceitável simplificar essa sequência de operações como

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} + (5\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a}) &= 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} \\ &= (3\mathbf{a} - 2\mathbf{a} - 2\mathbf{a}) + (5\mathbf{b} + 2\mathbf{b}) \\ &= -\mathbf{a} + 7\mathbf{b} \end{aligned}$$

ou até fazer a maior parte dos cálculos mentalmente.

(b) Com detalhes, temos:

$$\begin{aligned} 5\mathbf{x} - \mathbf{a} &= 2(\mathbf{a} + 2\mathbf{x}) \\ 5\mathbf{x} - \mathbf{a} &= 2\mathbf{a} + 2(2\mathbf{x}) && \text{(e)} \\ 5\mathbf{x} - \mathbf{a} &= 2\mathbf{a} + (2 \cdot 2)\mathbf{x} && \text{(g)} \\ 5\mathbf{x} - \mathbf{a} &= 2\mathbf{a} + 4\mathbf{x} \\ (5\mathbf{x} - \mathbf{a}) - 4\mathbf{x} &= (2\mathbf{a} + 4\mathbf{x}) - 4\mathbf{x} \\ (-\mathbf{a} + 5\mathbf{x}) - 4\mathbf{x} &= 2\mathbf{a} + (4\mathbf{x} - 4\mathbf{x}) && \text{(a), (b)} \\ -\mathbf{a} + (5\mathbf{x} - 4\mathbf{x}) &= 2\mathbf{a} + \mathbf{0} && \text{(b), (d)} \\ -\mathbf{a} + (5 - 4)\mathbf{x} &= 2\mathbf{a} && \text{(f), (c)} \\ -\mathbf{a} + (1)\mathbf{x} &= 2\mathbf{a} \\ \mathbf{a} + (-\mathbf{a} + \mathbf{x}) &= \mathbf{a} + 2\mathbf{a} && \text{(h)} \\ (\mathbf{a} + (-\mathbf{a})) + \mathbf{x} &= (1 + 2)\mathbf{a} && \text{(b), (f)} \\ \mathbf{0} + \mathbf{x} &= 3\mathbf{a} && \text{(d)} \\ \mathbf{x} &= 3\mathbf{a} && \text{(c)} \end{aligned}$$

Novamente, omitiremos muitas dessas etapas na maioria dos casos.

Combinações Lineares e Coordenadas

Um vetor que é uma soma de múltiplos escalares de outros vetores é chamado de *combinação linear* desses vetores. A definição formal é a seguinte:

Definição Um vetor $\mathbf{v}$ é uma *combinação linear* de vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ se existirem escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$ tais que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$. Os escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$ são chamados *coeficientes* da combinação linear.

EXEMPLO 6 O vetor $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ é uma combinação linear de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ pois

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Observação: determinar se um dado vetor é combinação linear de outros vetores é um problema do qual nos ocuparemos no Capítulo 2.

Em $\mathbb{R}^2$, é possível desenhar combinações lineares de dois vetores (não paralelos) facilmente.

EXEMPLO 7 Sejam $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Podemos utilizar $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ para constituir um novo sistema de eixos (do mesmo modo que $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ determinam o sistema de eixos usual). Com esses novos eixos, podemos obter uma *rede coordenada* que nos permita facilmente desenhar combinações lineares de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

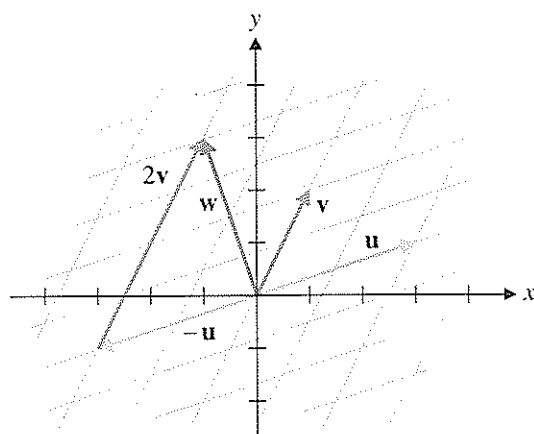


Figura 18

Como mostra a Figura 18, $\mathbf{w}$ pode ser localizado partindo-se da origem e percorrendo-se $-\mathbf{u}$ seguido de $2\mathbf{v}$. Isto é,

$$\mathbf{w} = -\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

Dizemos que as coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$ são -1 e 2 . (Note que essa é apenas outra maneira de interpretar os coeficientes de uma combinação linear.) Segue que

$$\mathbf{w} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(Observe que -1 e 3 são as coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação a $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$.)

Mudar do sistema de eixos usual para um outro alternativo é uma idéia útil. Tem aplicações em química e geologia, já que as estruturas moleculares e cristalinas frequentemente não se adaptam à rede retangular. Neste livro, encontraremos essa idéia muitas vezes.

EXERCÍCIOS 1.2

1. Desenhe os seguintes vetores em posição padrão em $\mathbb{R}^2$:

$$(a) \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2. Desenhe os vetores do Exercício 1 com suas origens no ponto $(-2, -3)$.

3. Desenhe os seguintes vetores na posição padrão em $\mathbb{R}^3$:

$$(a) \mathbf{a} = [0, 2, 0]$$

$$(b) \mathbf{b} = [3, 2, 1]$$

$$(c) \mathbf{c} = [1, -2, 1]$$

$$(d) \mathbf{d} = [-1, -1, -2]$$

4. Se os vetores do Exercício 3 forem transladados de modo que suas extremidades estejam no ponto $(4, 5, 6)$, ache os pontos correspondentes às suas origens.

5. Para cada um dos seguintes pares de pontos, desenhe o vetor $\overrightarrow{AB}$. Depois, determine e redesenhe $\overrightarrow{AB}$ na posição padrão.

$$(a) A = (1, -1), B = (4, 2)$$

$$(b) A = (0, -2), B = (2, -1)$$

$$(c) A = (2, \frac{3}{2}), B = (\frac{1}{2}, 3)$$

$$(d) A = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), B = (\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$$

6. Um excursionista anda 4 km na direção norte e depois 5 km na direção nordeste. Desenhe os vetores deslocamento que representam o passeio do excursionista e o vetor que representa o deslocamento a partir do ponto inicial.

Os Exercícios 7 a 10 se referem aos vetores do Exercício 1. Determine os vetores indicados e mostre como os resultados podem ser obtidos geometricamente.

$$7. \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$8. \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

$$9. \mathbf{d} - \mathbf{c}$$

$$10. \mathbf{a} - \mathbf{d}$$

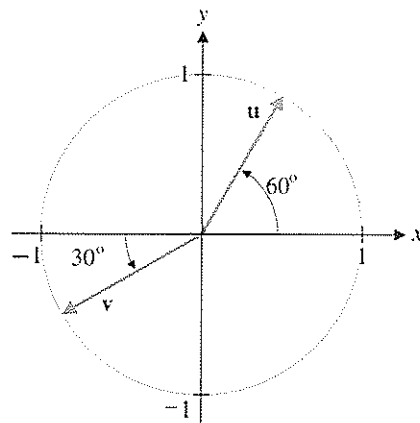
Os Exercícios 11 e 12 se referem aos vetores do Exercício 3. Determine os vetores indicados.

$$11. 2\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$$

$$12. 2\mathbf{c} - 3\mathbf{b} - \mathbf{d}$$

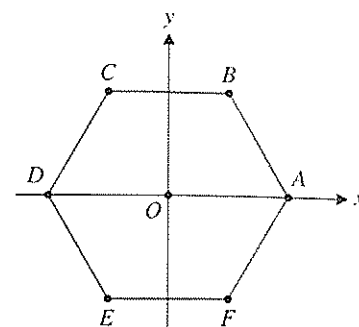
13. Ache as componentes dos vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ aparecem na Figura 19.

Figura 19



14. Na Figura 20, A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular centrado na origem.

Figura 20



Expresse cada um dos seguintes vetores em termos de $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$:

$$(a) \overrightarrow{AB}$$

$$(b) \overrightarrow{BC}$$

$$(c) \overrightarrow{AD}$$

$$(d) \overrightarrow{CF}$$

$$(e) \overrightarrow{AC}$$

$$(f) \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}$$

Nos Exercícios 15 e 16, simplifique a expressão vetorial dada. Indique quais propriedades do Teorema 1 você usou.

$$15. 2(\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) + 3(2\mathbf{b} + \mathbf{a})$$

$$16. -3(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + 2(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) + 3(\mathbf{c} - \mathbf{b})$$

Nos Exercícios 17 e 18, encontre o vetor $\mathbf{x}$ em termos dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

$$17. \mathbf{x} - \mathbf{a} = 2(\mathbf{x} - 2\mathbf{a})$$

$$18. \mathbf{x} + 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = 3(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - 2(2\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

Nos Exercícios 19 e 20, desenhe os eixos coordenados relativos a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e localize $\mathbf{w}$.

$$19. \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$$

$$20. \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = -\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$$

Nos Exercícios 21 e 22, desenhe os eixos coordenados usuais no mesmo diagrama que os eixos relativos a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Use estes últimos para obter $\mathbf{w}$ como combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

$$21. \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$22. \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

23. Desenhe diagramas para ilustrar as propriedades (d) e (e) do Teorema 1.

24. Escreva demonstrações algébricas das propriedades (d) a (g) do Teorema 1.

1.3 Comprimento e Ângulo: O Produto Escalar

É muito fácil reformular os conceitos geométricos familiares de comprimento, distância e ângulo em termos de vetores. Tal procedimento permitirá que utilizemos essas idéias importantes e poderosas em ambientes mais gerais do que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Nos capítulos subseqüentes, elas serão usadas como ferramentas geométricas simples para resolver uma grande variedade de problemas que aparecerão nas aplicações – mesmo quando não houver nenhuma geometria aparente!

O Produto Escalar

As versões vetoriais de comprimento, distância e ângulo podem ser todas descritas usando-se a noção de produto escalar de dois vetores.

Definição Se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

então o **produto escalar** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Em palavras, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ é a soma dos produtos das componentes correspondentes de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. É importante notar dois aspectos sobre esse “produto” que acabamos de definir. Primeiro, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devem ter o mesmo número de componentes; segundo, o produto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ é um *número*, não um vetor. (Este é o motivo pelo qual $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ chama-se **produto escalar** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.) O produto escalar de vetores em $\mathbb{R}^n$ é um caso especial e importante da noção mais geral de **produto interno**, que será explorada no Capítulo 7.

EXEMPLO 1 Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, onde $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 = 1$

Observe que, se tivéssemos calculado $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ no Exemplo 1, teríamos obtido

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (-3) \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 1$$

Fica claro que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, já que os produtos individuais das coordenadas comutam. A comutatividade é uma das propriedades do produto escalar que usaremos com freqüência. As principais propriedades do produto escalar estão resumidas no Teorema 1.

◆ **TEOREMA 1** Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores de $\mathbb{R}^n$ e a um escalar. Então:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Comutatividade
Distributividade

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos (a) e (c) e deixaremos a demonstração das demais propriedades para os exercícios. (a) Aplicando a definição de produto escalar para $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}\end{aligned}$$

onde a igualdade do meio segue do fato de a multiplicação de números reais ser comutativa.

(c) Usando as definições de produto de números e produto escalar, temos

$$\begin{aligned}(a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= [au_1, au_2, \dots, au_n] \cdot [v_1, v_2, \dots, v_n] \\ &= au_1 v_1 + au_2 v_2 + \dots + au_n v_n \\ &= a(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n) \\ &= a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\end{aligned}$$

Observações:

- ♦ A propriedade (b) pode ser lida da direita para a esquerda, e, neste caso, diz que podemos pôr o vetor $\mathbf{u}$ em evidência na soma dos produtos escalares. Também vale a propriedade análoga, do “lado direito” — que decorre das propriedades (b) e (a): $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$.
- ♦ A propriedade (c) pode ser estendida para obtermos $\mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v}) = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ (Exercício 44). Tal versão estendida de (c) diz essencialmente que, tomando-se um múltiplo escalar de um produto escalar de vetores, o escalar pode ser combinado com o vetor mais conveniente. Por exemplo:

$$\left(\frac{1}{2}[-1, -3, 2]\right) \cdot [6, -4, 0] = [-1, -3, 2] \cdot \left(\frac{1}{2}[6, -4, 0]\right) = [-1, -3, 2] \cdot [3, -2, 0] = 3$$

Com essa escolha, evitamos introduzir frações entre os vetores, como teria o agrupamento original.

- ♦ A segunda parte de (d) usa o conectivo lógico *se, e somente se*. O Apêndice A discute essa expressão com mais detalhe, mas, para o momento, vamos apenas observar que ela indica uma *dupla implicação* — isto é,

$$\text{se } \mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{ então } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$$

e

$$\text{se } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ então } \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

O Teorema 1 mostra que aspectos da álgebra dos vetores lembram a álgebra dos números. O próximo exemplo mostra que algumas vezes podemos encontrar análogos vetoriais de identidades familiares.

EXEMPLO 2 Prove que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$.

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$



(Identifique as propriedades do Teorema 1 que foram usadas em cada etapa.)

Comprimento

Para entender qual a relação entre o produto escalar e o cálculo de comprimentos, recordemos como comprimentos são calculados no plano. O Teorema de Pitágoras é tudo de que precisamos.

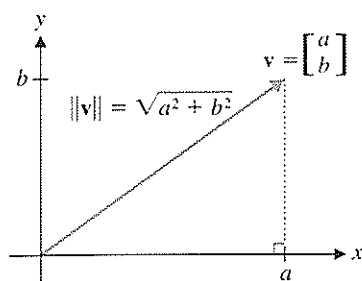


Figura 1

Em $\mathbb{R}^2$, o comprimento do vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ é a distância da origem ao ponto (a, b) , a qual, pelo Teorema de Pitágoras, é dada por $\sqrt{a^2 + b^2}$, como na Figura 1. Observe que $a^2 + b^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Isso leva à seguinte definição:

Definição O *comprimento* (ou *norma*) de um vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^n$ é o número não negativo $\|\mathbf{v}\|$ definido por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Em palavras, o comprimento de um vetor é a raiz quadrada da soma dos quadrados de suas coordenadas. Observe que a raiz quadrada de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ está sempre definida, pois $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, pelo Teorema 1(d). Note também que a definição pode ser reescrita como $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Isso será de grande utilidade na demonstração de outras propriedades do produto escalar e do comprimento de vetores.

EXEMPLO 3 $\|[2, 3]\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

O Teorema 2 enumera algumas das principais propriedades do comprimento de um vetor:

◆ **TEOREMA 2** Seja $\mathbf{v}$ um vetor em $\mathbb{R}^n$ e c um escalar. Então:

- $\|\mathbf{v}\| = 0$ se, e somente se, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $\|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|$

DEMONSTRAÇÃO: A propriedade (a) segue imediatamente do Teorema 1(d). Para mostrar (b), temos

$$\|c\mathbf{v}\|^2 = (c\mathbf{v}) \cdot (c\mathbf{v}) = c^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = c^2\|\mathbf{v}\|^2$$

usando o Teorema 1(c). Tomando-se a raiz quadrada de ambos os lados, e usando o fato de que $\sqrt{c^2} = |c|$, para todo número real c , obtemos o resultado. ◆

Um vetor de comprimento 1 é chamado **vetor unitário**. Em $\mathbb{R}^2$, o conjunto de todos os vetores unitários pode ser identificado com o *círculo unitário*, o círculo de raio 1 centrado na origem (veja a Figura 2). Dado qualquer vetor não nulo $\mathbf{v}$, podemos sempre encontrar um vetor unitário, de mesma direção e sentido que $\mathbf{v}$,

dividindo $\mathbf{v}$ por seu próprio comprimento (ou, equivalentemente, *multiplicando* por $1/\|\mathbf{v}\|$). Podemos mostrar esse fato algebricamente usando a propriedade (b) do Teorema 2: se $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$, então

$$\|\mathbf{u}\| = \|(1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}\| = |1/\|\mathbf{v}\||\|\mathbf{v}\| = (1/\|\mathbf{v}\|)\|\mathbf{v}\| = 1$$

e $\mathbf{u}$ possui a mesma direção e sentido que $\mathbf{v}$, pois $1/\|\mathbf{v}\|$ é um número positivo. Achar um vetor unitário de mesma direção e sentido é, em geral, um processo ao qual nos referimos como **normalizar** um vetor⁵ (veja a Figura 3).

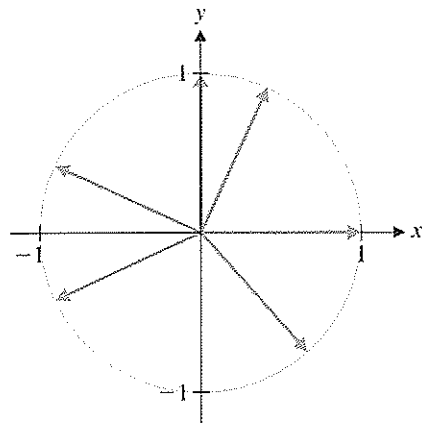


Figura 2 Vetores unitários em $\mathbb{R}^2$

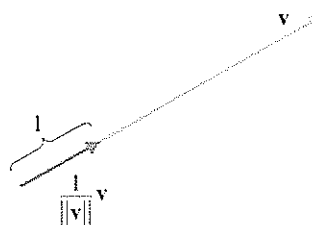


Figura 3 Normalização de um vetor

EXEMPLO 4 Em $\mathbb{R}^2$, sejam $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então, $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são vetores unitários, pois a soma dos quadrados de suas componentes, em cada caso, é 1. Analogamente, em $\mathbb{R}^3$, podemos construir vetores unitários

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe na Figura 4, que esses vetores ajudam a localizar os eixos de coordenadas positivas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. ◆

Em geral, em $\mathbb{R}^n$, definimos vetores unitários $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, onde $\mathbf{e}_i$ possui 1 na i -ésima coordenada, e zero, nas demais. Tais vetores aparecem com frequência na álgebra linear e são chamados de **vetores unitários canônicos**.

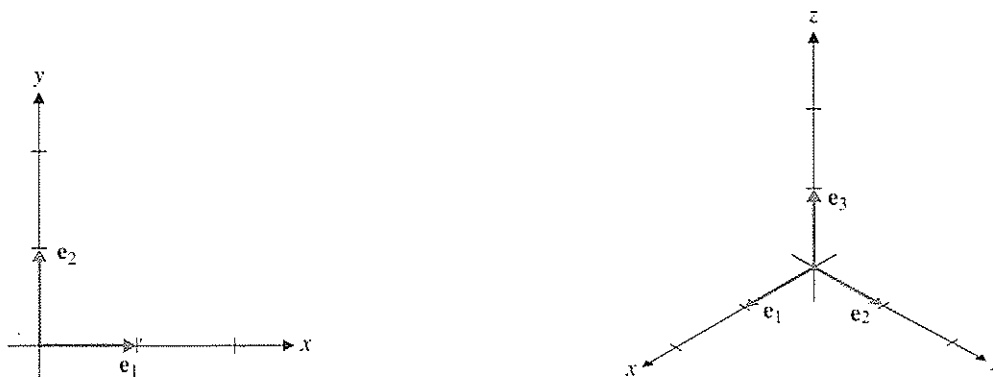


Figura 4 Vetores unitários canônicos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

⁵ N.T.: Em português, chamamos *versor de v* ao vetor unitário $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$.

EXEMPLO 5 Normalize o vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, portanto, um vetor unitário com mesma direção e sentido de $\mathbf{v}$ é dado por

$$\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v} = (1/\sqrt{14}) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

Como a propriedade (b) do Teorema 2 descreve de que forma o comprimento se comporta em relação à multiplicação por escalar, a curiosidade natural sugere que perguntemos se comprimento e adição de vetores são compatíveis. Seria muito bom se tivéssemos uma identidade tal que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, mas, para quase toda escolha de vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, isso é falso. [Veja o Exercício 42(a).] No entanto, nem tudo está perdido: se trocarmos o sinal = por $\leq$, a desigualdade resultante será verdadeira. A demonstração desse famoso e importante resultado — a Desigualdade Triangular — depende de outra importante desigualdade: a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, que demonstraremos e discutiremos mais detalhadamente no Capítulo 7.

◆ TEOREMA 3 A Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Veja os Exercícios 55 e 56 para abordagens algébricas e geométricas das demonstrações dessa desigualdade.

Em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, onde podemos usar geometria, fica claro, a partir de um diagrama como o da Figura 5, que vale $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Mostraremos agora que isso é verdade em geral.

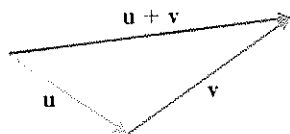


Figura 5 A Desigualdade Triangular

◆ TEOREMA 4 A Desigualdade Triangular

Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

DEMONSTRAÇÃO: Como ambos os lados da desigualdade são não negativos, mostrar que o *quadrado* do lado esquerdo é menor ou igual ao *quadrado* do lado direito é equivalente a provar o teorema. (Por quê?) Calculando, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} && \text{Pelo Exemplo 2} \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 && \text{Por Cauchy-Schwarz} \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

como desejado. ◆

Distância

O conceito de distância entre dois vetores é análogo ao de distância entre dois pontos na reta real ou dois pontos no plano cartesiano. Na reta real (Figura 6), a distância entre os números a e b é dada por $|a - b|$. (Tomar o valor absoluto assegura que não precisamos nos preocupar qual, a ou b , é maior.) Essa distância é também igual a $\sqrt{(a - b)^2}$, e sua generalização para duas dimensões é a fórmula familiar para a distância d entre pontos (a_1, a_2) e (b_1, b_2) — a saber, $d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$.

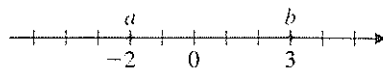


Figura 6 $d = |a - b| = |-2 - 3| = 5$

Em termos de vetores, se $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, então d é exatamente o comprimento de $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, como mostra a Figura 7. Essa é a base para a próxima definição.

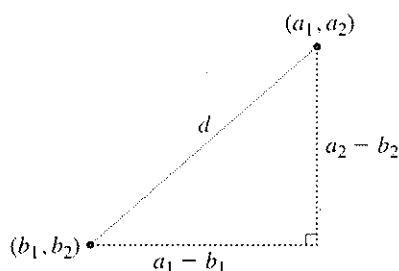
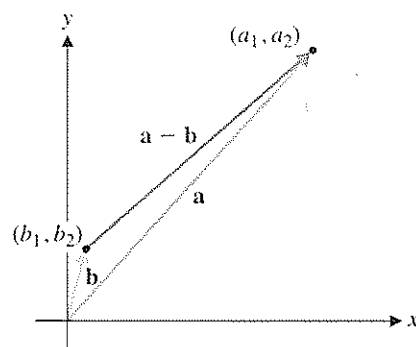


Figura 7 $d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$



Definição A *distância* $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ entre vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, em $\mathbb{R}^n$, é definida por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

EXEMPLO 6 Determine a distância entre $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Calculamos $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, então

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

Ângulos

O produto escalar também pode ser usado para determinar o ângulo entre um par de vetores. Em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, o ângulo entre os vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ será o ângulo θ , determinado por esses vetores, que satisfizer $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ (veja a Figura 8).

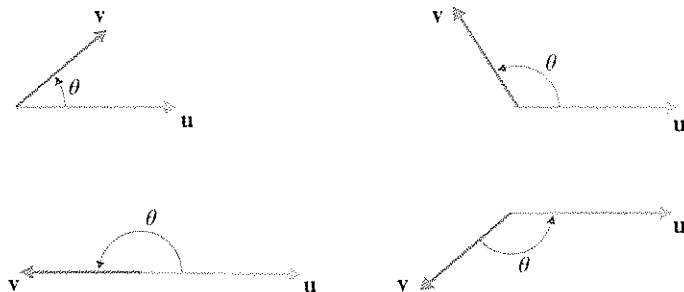


Figura 8 O ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

Na Figura 9, considere o triângulo de lados $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Aplicando a lei dos co-senos a esse triângulo, vem que

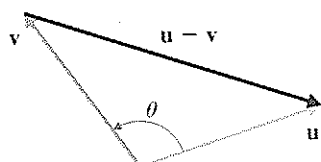


Figura 9

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Desenvolvendo o lado esquerdo e usando a propriedade $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ várias vezes, obtemos

$$\|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

que, depois de algumas simplificações, nos leva a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$. Dessa última expressão obtemos a seguinte fórmula para o ângulo θ entre vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

EXEMPLO 7 Determine o ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = [2, 1, -2]$ e $\mathbf{v} = [1, 1, 1]$.

SOLUÇÃO: Calculamos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 1$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$, e $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Logo, $\cos\theta = 1/3\sqrt{3}$, e portanto, $\theta = \cos^{-1}(1/3\sqrt{3}) \approx 1,377$ radianos.

EXEMPLO 8 Determine o ângulo entre as diagonais de duas faces adjacentes de um cubo.

SOLUÇÃO: As dimensões do cubo não importam. Assim, consideraremos um cubo com lados de comprimento 1. Escolha um sistema de eixos coordenados em $\mathbb{R}^3$ como mostra a Figura 10, e tome as diagonais representadas pelos vetores $[1, 0, 1]$ e $[0, 1, 1]$. O ângulo θ entre esses vetores satisfaz

$$\cos \theta = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

de onde segue que o ângulo procurado é $\pi/3$ radianos, ou 60° .

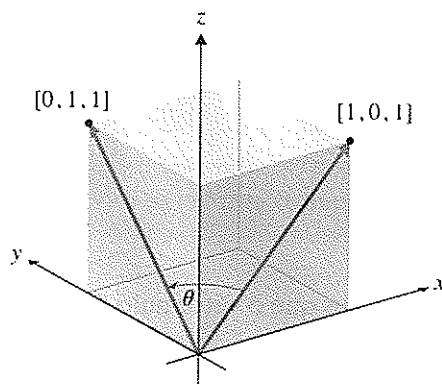


Figura 10

(Na verdade, não precisamos fazer nenhum cálculo para obter essa resposta. Se desenharmos uma terceira diagonal unindo os vértices $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$, teremos um triângulo equilátero, já que todas as diagonais das faces têm o mesmo comprimento. O ângulo que procuramos é um dos ângulos desse triângulo, e, portanto, mede 60° . Às vezes, uma pequena idéia pode economizar muitos cálculos; em casos como este, ela fornece uma verificação confortável em nosso trabalho!)

Observações: ♦ Como mostra esta discussão, geralmente teremos de estabelecer uma aproximação para o ângulo entre dois vetores. Entretanto, quando o ângulo for um dos chamados ângulos especiais (0° , 30° , 45° , 60° , 90° , ou um múltiplo inteiro desses), deveremos ser capazes de reconhecer seu co-seno (Tabela 1) e então obter o correspondente ângulo com exatidão. Em todos os outros casos, usaremos uma calculadora ou computador para aproximar o ângulo desejado por meio da função arco – co-seno.

Tabela 1 Co-senos de Ângulos Especiais

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

♦ A dedução da fórmula para o co-seno do ângulo entre dois vetores é válida somente em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, já que depende de um fato geométrico: a lei dos co-senos. Em $\mathbb{R}^n$, para $n > 3$, a fórmula pode ser considerada uma *definição*. Isso faz sentido, pois a desigualdade

de Cauchy-Schwarz implica que $\left| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right| \leq 1$, e, portanto, $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$ varia de -1 a 1 , exatamente como o co-seno.

Vetores Ortogonais

O conceito de perpendicularidade é fundamental em geometria. Qualquer pessoa que estuda geometria compreende rapidamente a importância e utilidade dos ângulos retos. Generalizaremos agora a idéia de perpendicularidade para vetores em $\mathbb{R}^n$, onde é chamada de **ortogonalidade**.

A palavra ortogonal é derivada da palavra grega orthos, que significa "reto", e gonia, que significa "ângulo". Por isso, ortogonal significa literalmente "ângulo reto". O equivalente em latim é retangular.

Em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, dois vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são perpendiculares se o ângulo θ entre eles é um ângulo reto – isto é, se $\theta = \pi/2$ radianos, ou 90° .

Assim, $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \cos 90^\circ = 0$, e, portanto, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Isso motiva a seguinte definição:

Definição Dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$ são **ortogonais** entre si se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Como $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$, para todo vetor $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$, dizemos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

EXEMPLO 9 Em $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} = [1, 1, -2]$ e $\mathbf{v} = [3, 1, 2]$ são ortogonais, pois $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 + 1 - 4 = 0$.

EXEMPLO 10 Do Exemplo 2, temos que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$, para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$. Segue imediatamente que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ se, e somente se, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Este é o Teorema de Pitágoras para $\mathbb{R}^n$ (Figura 11).

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \text{ se, e somente se, } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ são ortogonais.}$$

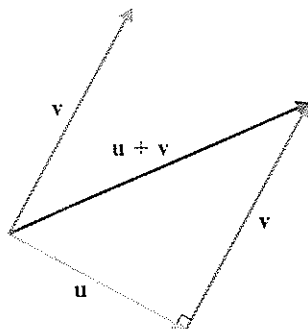


Figura 11 O Teorema de Pitágoras

O conceito de ortogonalidade é um dos mais importantes e úteis em álgebra linear, e frequentemente aparece de maneiras surpreendentes. O Capítulo 5 oferece um tratamento detalhado deste tópico, mas iremos encontrá-lo muitas vezes antes disso. Um problema no qual a ortogonalidade claramente desempenha um papel importante é na determinação da distância de um ponto a uma reta, onde "baixar a perpendicular" é um procedimento familiar.

Projeções

Consideraremos agora o problema de encontrar a distância de um ponto a uma reta no contexto dos vetores. Como veremos, essa técnica conduz a um importante conceito: o da projeção de um vetor sobre outro.

Como mostra a Figura 12, o problema de achar a distância de um ponto B a uma reta r (em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) se reduz ao problema de achar o comprimento do segmento de reta $\overline{PB}$, perpendicular a r , ou, equivalentemente, o comprimento do vetor $\overline{PB}$. Se escolhermos um ponto A sobre r , então, no triângulo retângulo $\triangle APB$, os outros dois vetores são o cateto $\overline{AP}$ e a hipotenusa $\overline{AB}$. O vetor $\overline{AP}$ é chamado de *projeção* de $\overline{AB}$ sobre a reta r . Interpretaremos agora esta situação em termos de vetores.

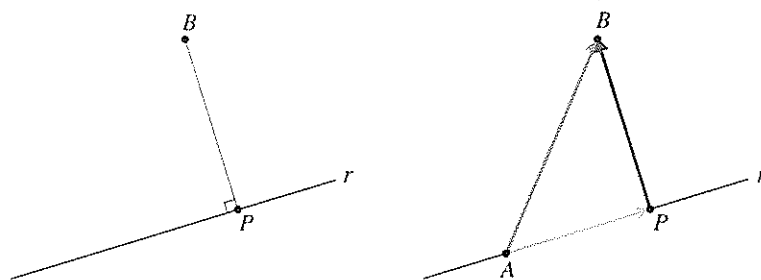


Figura 12 A distância de um ponto a uma reta

Considere dois vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Seja $\mathbf{p}$ o vetor obtido ao traçarmos a perpendicular a partir da extremidade de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$, e seja θ o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, como mostra a Figura 13. Então, claramente $\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|\hat{\mathbf{u}}$, onde $\hat{\mathbf{u}} = (1/\|\mathbf{u}\|)\mathbf{u}$ é o versor de $\mathbf{u}$. Além disso, da trigonometria elementar temos $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{v}\| \cos \theta$, e sabemos que $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$. Dessa forma, depois de algumas substituições, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \|\mathbf{v}\| \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right) \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \right) \mathbf{u} \\ &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u} \\ &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u} \end{aligned}$$

Essa é a fórmula que queremos, e é a motivação para a seguinte definição válida para vetores em $\mathbb{R}^n$:

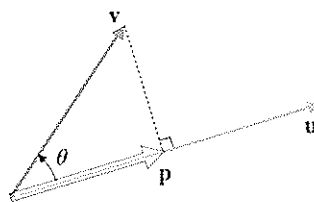


Figura 13 A projeção de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$

Definição Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, a *projeção de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$* é o vetor $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ definido por

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}$$

Um modo alternativo de obter essa fórmula é descrito no Exercício 57.

Observações:

- ♦ O termo *projeção* vem da idéia de projetar uma imagem em uma parede (com um projetor de slides, por exemplo). Imagine um feixe de luz com raios paralelos entre si e perpendiculares a $\mathbf{u}$ incidindo sobre $\mathbf{v}$. A projeção de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ é justamente a sombra lançada, ou projetada, por $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$.
- ♦ Pode ser útil interpretar $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ como uma função de variável $\mathbf{v}$. Então, a variável $\mathbf{v}$ ocorre apenas uma vez no lado direito. Além disso, é de grande ajuda ter em mente a Figura 13, que nos lembra que $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ é um múltiplo escalar do vetor $\mathbf{u}$ (não $\mathbf{v}$).
- ➔ ♦ Na definição de $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$, embora tenhamos considerado $\mathbf{v}$ não nulo, assim como $\mathbf{u}$ (por quê?), é claro, do ponto de vista da geometria, que a projeção do vetor nulo sobre $\mathbf{u}$ é $\mathbf{0}$. A definição confirma esse fato, pois $\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{0}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- ♦ Se o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ for obtuso, como na Figura 14, então $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ terá sentido oposto ao de $\mathbf{u}$, ou seja, $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ será um múltiplo escalar *negativo* de $\mathbf{u}$.
- ➔ ♦ Se $\mathbf{u}$ for um vetor unitário, então $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$. (Por quê?)

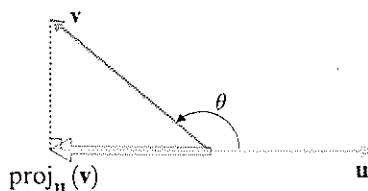


Figura 14

EXEMPLO 11 Ache a projeção de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ em cada caso.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3$

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO: (a) Calculamos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$. Portanto,

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

(b) Como $\mathbf{e}_3$ é um vetor unitário,

$$\text{proj}_{\mathbf{e}_3}(\mathbf{v}) = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_3 = 3\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(c) Temos que $\|\mathbf{u}\| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$. Então,

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{2} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

◆ EXERCÍCIOS 1.3 ◆

Nos Exercícios de 1 a 6, calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3,2 \\ -0,6 \\ -1,4 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 4,1 \\ -0,2 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{u} = [1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0], \mathbf{v} = [4, -\sqrt{2}, 0, -5]$

6. $\mathbf{u} = [1,12, -3,25, 2,07, -1,83],$
 $\mathbf{v} = [-2,29, 1,72, 4,33, -1,54]$

Nos Exercícios de 7 a 12, determine a norma do vetor $\|\mathbf{u}\|$ do exercício indicado e dê o versor de $\mathbf{u}$.

7. Exercício 1

8. Exercício 2

9. Exercício 3

10. Exercício 4

11. Exercício 5

12. Exercício 6

Nos Exercícios de 13 a 16, encontre a distância $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ do exercício indicado.

13. Exercício 1

14. Exercício 2

15. Exercício 3

16. Exercício 4

17. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ e c é um escalar, explique por que as seguintes expressões não fazem sentido:

(a) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}$

(c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

(d) $c \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

Nos Exercícios de 18 a 21, determine se o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é agudo, obtuso ou reto.

18. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

19. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

20. $\mathbf{u} = [4, 3, -1], \mathbf{v} = [1, -1, 1]$

21. $\mathbf{u} = [0,9, 2,1, 1,2], \mathbf{v} = [-4, 5, 2, 6, -0,8]$

Nos Exercícios de 22 a 25, encontre o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ do exercício dado.

22. Exercício 18

23. Exercício 19

24. Exercício 20

25. Exercício 21

26. Sejam $A = (-3, 2)$, $B = (1, 0)$ e $C = (4, 6)$. Prove que o triângulo $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo.

27. Sejam $A = (1, 1, -1)$, $B = (-3, 2, -2)$ e $C = (2, 2, -4)$. Prove que o triângulo $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo.

28. Determine o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma aresta adjacente.

29. Um cubo possui quatro diagonais. Mostre que não existem duas dessas diagonais que sejam perpendiculares entre si.

Nos Exercícios de 30 a 35, encontre a projeção de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$. Faça um esboço nos Exercícios 30 e 31.

30. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

31. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

32. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

33. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

34. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{bmatrix}$

35. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3,01 \\ -0,33 \\ 2,52 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1,34 \\ 4,25 \\ -1,66 \end{bmatrix}$

A Figura 15 sugere duas maneiras pelas quais os vetores podem ser usados para calcular a área de um triângulo. A área $\mathcal{A}$ do triângulo na parte (a) é dada por $\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\|$, e a parte (b) sugere a forma trigonométrica da área de um triângulo: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$. (Podemos usar a identidade $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ para achar $\sin\theta$.) Nos Exercícios 36 e 37, calcule a área do triângulo de vértices dados, usando ambos os métodos.

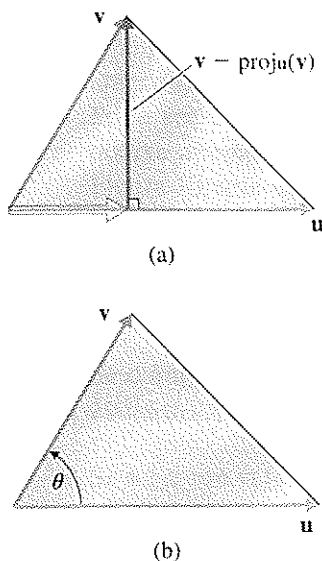


Figura 15

36. $A = (1, -1)$, $B = (2, 2)$, $C = (4, 0)$

37. $A = (3, -1, 4)$, $B = (4, -2, 6)$, $C = (5, 0, 2)$

Nos Exercícios 38 e 39, encontre todos os possíveis valores de k para os quais os dois vetores são ortogonais.

38. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} k+1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ 39. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} k^2 \\ k \\ -3 \end{bmatrix}$

40. Descreva todos os vetores $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que são ortogonais a $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

41. Descreva todos os vetores $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que são ortogonais a $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

42. Sob que condições as seguintes igualdades são verdadeiras para vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$?

(a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$

43. (a) Prove o Teorema 1(b). (b) Prove o Teorema 1(d).

44. Prove que $\mathbf{u} \cdot a\mathbf{v} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, para todos os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$ e todos os números a .

45. Prove que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$, para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$. (Sugestão: substitua $\mathbf{u}$ por $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ na Desigualdade Triangular.)

46. Suponha conhecido que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$. Pode-se concluir que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Em caso afirmativo, dê uma prova válida em $\mathbb{R}^n$; caso contrário, dê um contra-exemplo (isto é, um conjunto específico de vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ para os quais $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ mas $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$).

47. Prove que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$, para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$.

48. (a) Prove que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$, para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$.

(b) Desenhe um diagrama mostrando $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^2$ e use a prova da parte (a) para deduzir uma propriedade sobre os paralelogramos.

49. Prove que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$, para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$.

50. (a) Prove que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ se, e somente se, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais.

(b) Desenhe um diagrama mostrando $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^2$ e use a prova da parte (a) para deduzir uma propriedade sobre os paralelogramos.

51. (a) Prove que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. (Sugestão: veja o Exercício 47.)

(b) Desenhe um diagrama mostrando $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^2$ e use a prova da parte (a) para deduzir uma propriedade sobre os paralelogramos.

52. (a) Prove que, se $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e a $\mathbf{w}$, então $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

(b) Prove que, se $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e a $\mathbf{w}$, então $\mathbf{u}$ é ortogonal a $s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$, para quaisquer números s e t .

53. Prove que $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$, para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$, com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

54. (a) Prove que $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})) = \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$.

(b) Prove que $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$.

(c) Explique geometricamente os resultados dos itens (a) e (b).

55. A Desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ é equivalente à desigualdade que obtemos ao elevarmos ao quadrado ambos os lados: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$.

(a) Em $\mathbb{R}^2$, com $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, a desigualdade é escrita como

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)$$

Prove algebricamente essa desigualdade. (Sugestão: subtraia o lado esquerdo do lado direito e mostre que a diferença deve ser necessariamente não negativa.)

(b) Prove o análogo de (a) em $\mathbb{R}^3$.

56. Uma outra maneira de provar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz é sugerida pela Figura 16, que mostra que, em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, $\|\text{proj}_u(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\|$. Mostre que essa desigualdade é equivalente à Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

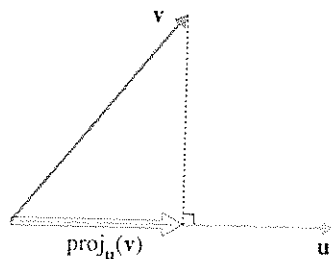


Figura 16

57. Use o fato de que $\text{proj}_u(\mathbf{v}) = d\mathbf{u}$, para algum número d , juntamente com a Figura 17, para determinar d e, desse modo, deduzir a fórmula para $\text{proj}_u(\mathbf{v})$.

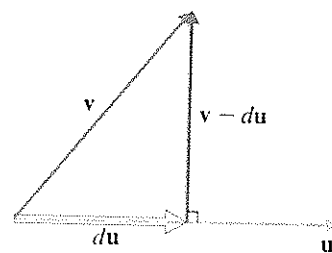


Figura 17

Investigação

Vetores e Geometria

Muitos resultados da geometria euclidiana plana podem ser demonstrados por meio de técnicas vetoriais. Por exemplo, no Exemplo 10 da Seção 1.3, usamos vetores para provar o Teorema de Pitágoras. Nesta investigação, usaremos vetores para provar alguns outros teoremas da geometria euclidiana.

Como introdução à notação e à linguagem vetorial para abordar a geometria, considere o seguinte exemplo fácil:

EXEMPLO 1 Dê uma descrição vetorial para o ponto médio M de um segmento de reta $\overline{AB}$.

SOLUÇÃO: Primeiramente, converteremos tudo para a notação vetorial. Se O denota a origem e P é um ponto, indicaremos por $\mathbf{p}$ o vetor $\overrightarrow{OP}$. Nessas condições, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{m} = \overrightarrow{OM}$, e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ (Figura 1).

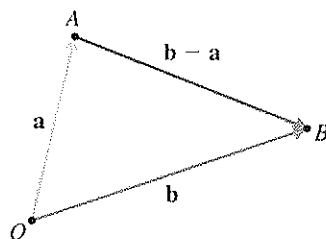


Figura 1

Como M é ponto médio de $\overline{AB}$, temos

$$\mathbf{m} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

assim,

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

1. Apresente uma descrição vetorial para o ponto P que está a um terço do percurso de A para B no segmento de reta $\overline{AB}$. Generalize.

2. Demonstre que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade de seu comprimento. (Na notação vetorial, isso equivale a provar que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ na Figura 2.)

3. Demonstre que o quadrilátero $PQRS$ (Figura 3), cujos vértices são os pontos médios dos lados de um quadrilátero arbitrário $ABCD$, é um paralelogramo.

4. Uma **mediana** de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto (Figura 4). Prove que as três medianas de qualquer triângulo são *concorrentes* (isto é, têm um ponto comum de interseção) em um ponto G cuja distância a cada vértice é igual a dois terços da distância deste

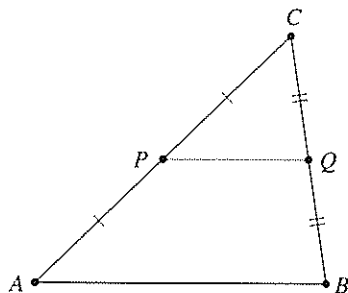


Figura 2

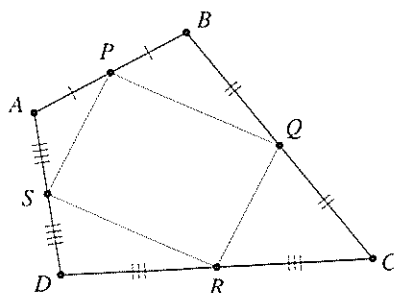


Figura 3

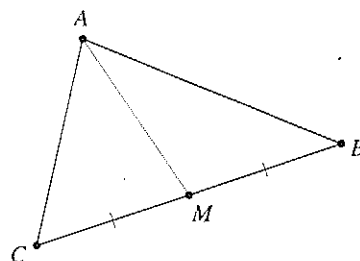


Figura 4 Uma mediana

vértice ao ponto médio do lado oposto. (Sugestão: na Figura 5, mostre que o ponto que está a dois terços da distância de A a P é dado por $\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$. Mostre então que o mesmo ponto está a dois terços da distância de B a Q e a dois terços da distância de C a R .) O ponto G da Figura 5 é chamado **baricentro** do triângulo.

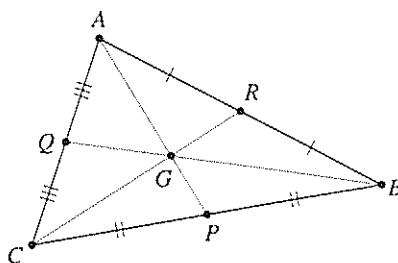


Figura 5

5. Uma **altura** de um triângulo é um segmento de reta que sai de um vértice e é perpendicular ao lado oposto (Figura 6). Prove que as três alturas de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto. (Sugestão: seja H o ponto de interseção das alturas correspondentes aos vértices A e B na Figura 7. Prove que $\overline{CH}$ é ortogonal a $\overline{AB}$.) O ponto H na Figura 7 é chamado **ortocentro** do triângulo.

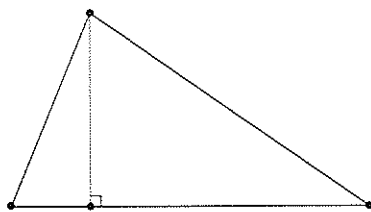


Figura 6 Uma altura

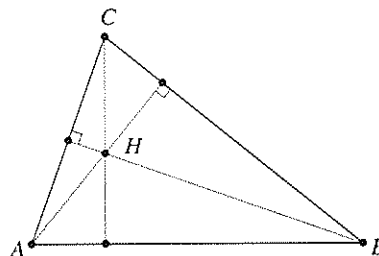


Figura 7

6. A **mediatriz** de um segmento de reta é a reta perpendicular a esse segmento e que passa por seu ponto médio (Figura 8). Prove que as mediatrizes dos três lados de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto. (Sugestão: seja K o ponto de interseção das mediatrizes de AC e BC na Figura 9. Prove que $\overline{RK}$ é ortogonal a $\overline{AB}$.) O ponto K na Figura 9 chama-se **circuncentro** do triângulo.

7. Sejam A e B as extremidades de um diâmetro de um círculo. Se C é um ponto qualquer do círculo, prove que $\angle ACB$ é um ângulo reto. (Sugestão: na Figura 10, seja O o centro do círculo. Expresse todos os elementos em termos de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ e mostre que $\overline{AC}$ é ortogonal a $\overline{BC}$.)

8. Prove que os segmentos de reta que unem os pontos médios dos lados opostos de um quadrilátero se interceptam de modo a dividir cada um deles em duas partes de mesmo comprimento (Figura 11).

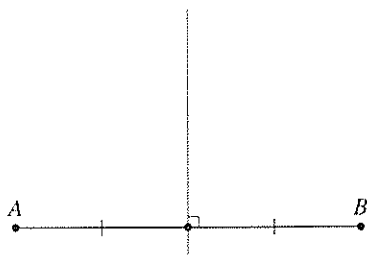


Figura 8 Uma mediatriz

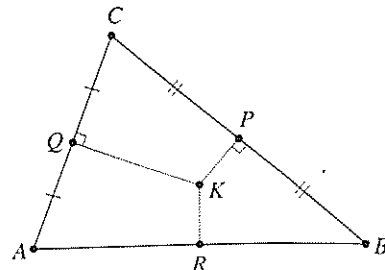


Figura 9

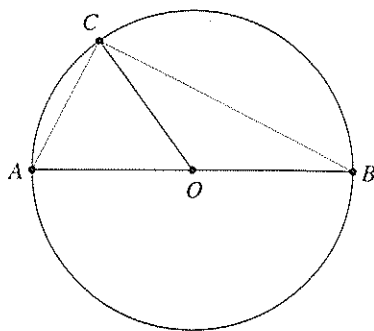


Figura 10

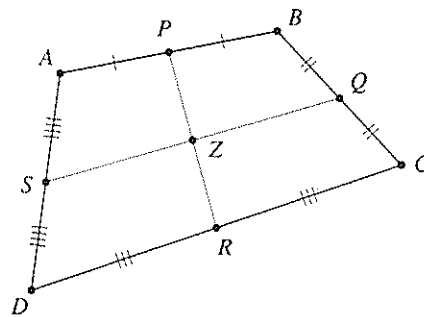


Figura 11

1.4 Retas e Planos

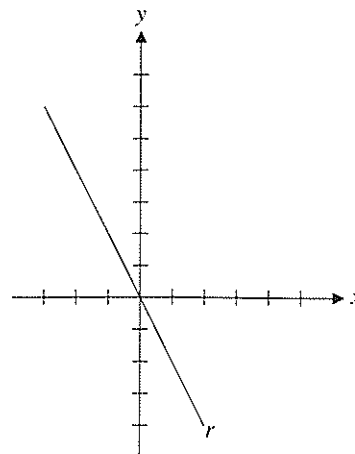
Todos estamos familiarizados com a equação de uma reta no plano cartesiano. Agora, vamos considerar retas em $\mathbb{R}^2$ do ponto de vista vetorial. As idéias que aparecem neste estudo nos permitem generalizar para retas em $\mathbb{R}^3$ e depois para planos em $\mathbb{R}^3$. Muito da álgebra linear que estudaremos nos capítulos posteriores tem sua origem na geometria simples de retas e planos; a habilidade de visualizar esses elementos e pensar em um problema do ponto de vista geométrico será de grande valia.

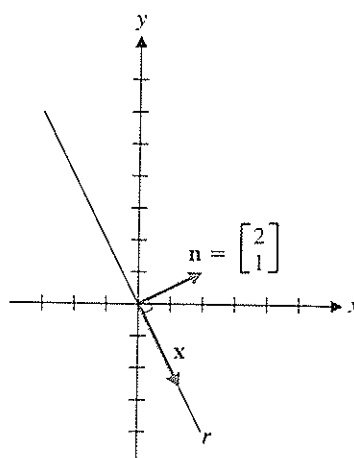
Retas em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$

No plano xy , a forma geral da equação de uma reta é $ax + by = c$. Se $b \neq 0$, a equação pode ser reescrita como $y = -(a/b)x + c/b$, que tem a forma $y = mx + k$. [Esta é a equação da reta na forma reduzida: m representa a inclinação da reta, e o ponto de coordenadas $(0, k)$ é sua interseção com o eixo y .] Para fazer uma descrição com vetores, vamos considerar um exemplo.

EXEMPLO I A reta r de equação $2x + y = 0$ é mostrada na Figura 1. É uma reta de inclinação -2 passando pela origem. O lado esquerdo da equação tem a forma de um produto escalar; de fato, se consideramos $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, a equação se torna $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = 0$. O vetor $\mathbf{n}$ é ortogonal à reta – isto é, *ortogonal* a qual-

A palavra latina *norma* se refere ao esquadro de carpinteiro, usado para desenhar ângulos retos. Assim, um vetor *normal* é um vetor que é perpendicular a algum outro objeto, geralmente um plano.

Figura 1 $2x + y = 0$

Figura 2 O vetor normal $\mathbf{n}$

quer vetor $\mathbf{x}$ paralelo à reta (Figura 2) – e é chamado **vetor normal** à reta. A equação $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ é a equação da reta r na *forma normal*. ♦

Uma outra maneira de pensar sobre essa reta é imaginar uma partícula movendo-se ao longo dela. Suponhamos que a partícula esteja na origem no instante $t = 0$ e se movimente ao longo da reta de modo que sua coordenada x varie em uma unidade por segundo. Então, no instante $t = 1$, a partícula está em $(1, -2)$; em

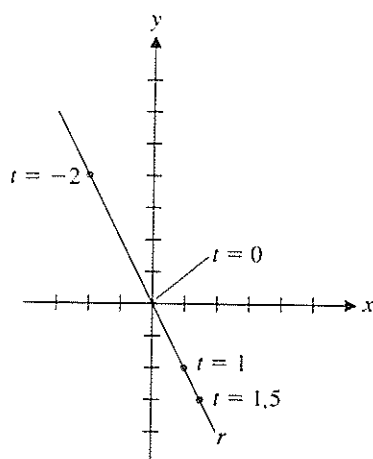
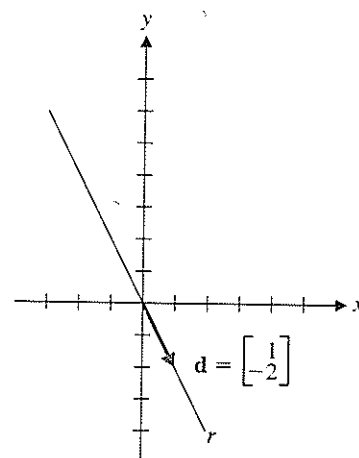


Figura 3

Figura 4 O vetor diretor $\mathbf{d}$

$t = 1,5$, está em $(1,5, -3)$; se permitirmos valores negativos para t (isto é, se levarmos em conta onde a partícula estava no passado), em $t = -2$ estará (ou esteve) em $(-2, 4)$. Tal movimento está ilustrado na Figura 3. Em geral, se $x = t$, então $y = -2t$, e podemos escrever essa relação na forma vetorial como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

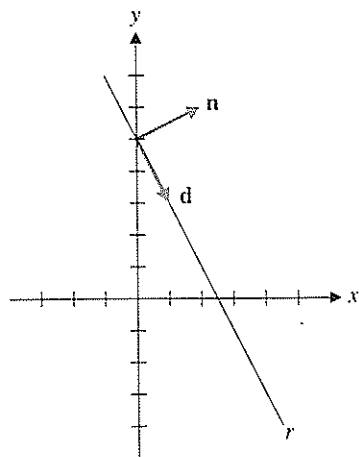
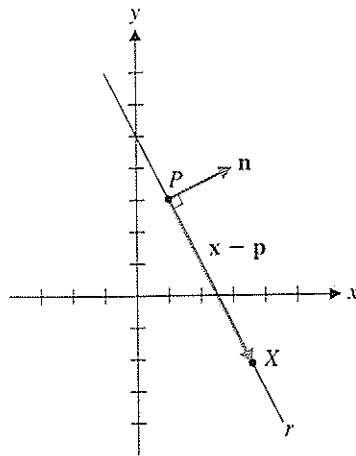
Qual é o significado do vetor $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$? Trata-se de um particular vetor paralelo a r , chamado **vetor diretor** da reta. Como mostra a Figura 4, podemos escrever a equação de r como $\mathbf{x} = t\mathbf{d}$. Essa é uma *equação vetorial* da reta.

Se a reta não passar pela origem, temos de fazer algumas pequenas modificações.

EXEMPLO 2 Considere a reta r de equação $2x + y = 5$ (Figura 5). Trata-se apenas de uma translação em cinco unidades para cima, da reta do Exemplo 1. Ela também possui inclinação -2 , mas sua interseção com o eixo y é o ponto $(0, 5)$. É claro que os vetores $\mathbf{d}$ e $\mathbf{n}$ do Exemplo 1 são, respectivamente, um vetor diretor e um vetor normal para essa reta também.

Assim, $\mathbf{n}$ é ortogonal a todo vetor que seja paralelo a r . O ponto $P = (1, 3)$ pertence a r . Se $X = (x, y)$ representa um ponto genérico de r , o vetor $\overrightarrow{PX} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$ é paralelo a r e $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$ (veja a Figura 6). Simplificando, temos $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$. Para verificar, calculamos

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x + y \quad \text{e} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 5$$

Figura 5 $2x + y = 5$ Figura 6 $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$

Assim, a equação normal $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$ é uma representação um pouco diferente da equação da reta na forma geral. (Note que, no Exemplo 1, $\mathbf{p}$ era o vetor nulo, e o lado direito da equação era $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = 0$.)

Esses resultados conduzem à seguinte definição:

Definição Dada uma reta r em $\mathbb{R}^2$, uma equação escrita na forma

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

onde $\mathbf{p}$ é um ponto específico de r e $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ é um vetor normal a r é chamada **equação da reta r na forma normal**.

Uma equação escrita na forma $ax + by = c$, onde $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ é um vetor normal a r , é chamada **equação da reta r na forma geral**.

Continuando com o Exemplo 2, vamos encontrar uma equação de r na forma vetorial. Observe que, para cada escolha de $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ deve ser paralelo ao vetor diretor $\mathbf{d}$, e, portanto, um múltiplo de $\mathbf{d}$. Isto é, $\mathbf{x} - \mathbf{p} = t\mathbf{d}$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$ para algum escalar t . Em coordenadas temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ou

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 3 - 2t \end{aligned} \quad (2)$$

A equação (1) é a forma vetorial da equação de r , e as equações (2), das coordenadas, são chamadas **equações paramétricas** da reta. A variável t é chamada **parâmetro**.

A palavra *parâmetro* e o adjetivo correspondente *paramétrico* vêm das palavras gregas *para*, que significa “lado a lado”, e *metron*, que quer dizer “medida”. Matematicamente falando, um parâmetro é uma variável em termos da qual se expressam outras variáveis – uma nova “medida” colocada ao lado de outras antigas.

Como generalizar para $\mathbb{R}^3$? Observe que as equações de reta nas formas vetorial e paramétrica se estendem perfeitamente. A noção de inclinação de uma reta em $\mathbb{R}^2$ – que é difícil de generalizar para três dimensões – é substituída pela noção mais conveniente de vetor diretor, conduzindo à seguinte definição:

Definição Em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, se $\mathbf{p}$ for um ponto de r e $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ for um vetor diretor de r , a equação

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

é chamada *equação vetorial da reta r* .

As equações correspondentes às coordenadas são chamadas *equações paramétricas de r* .

Freqüentemente, abreviaremos um pouco essa terminologia, referindo-nos simplesmente à equação geral, normal, vetorial e às equações paramétricas de uma reta ou plano.

EXEMPLO 3 Determine equações vetorial e paramétricas para a reta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $P = (1, 2, -1)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: A equação vetorial $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$ pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

As equações paramétricas são

$$\begin{aligned} x &= 1 + 5t \\ y &= 2 - t \\ z &= -1 + 3t \end{aligned}$$

Observações: ♦ A equação vetorial e as equações paramétricas de uma dada reta r não são únicas – de fato, existem infinitas, já que podemos considerar qualquer ponto de r como $\mathbf{p}$ e qualquer vetor diretor de r . No entanto, todos os vetores diretores são claramente múltiplos uns dos outros.

No Exemplo 3, $(6, 1, 2)$ é um outro ponto sobre a reta (considere $t = 1$), e $\begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ é outro vetor diretor. Dessa maneira,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

é uma equação vetorial diferente (mas equivalente) para a reta. A relação entre os dois parâmetros s e t pode ser obtida comparando-se as equações paramétricas: para cada ponto (x, y, z) de r , temos

$$\begin{aligned} x &= 1 + 5t = 6 + 10s \\ y &= 2 - t = 1 - 2s \\ z &= -1 + 3t = 2 + 6s \end{aligned}$$

implicando que

$$-10s + 5t = 5$$

$$2s - t = -1$$

$$-6s + 3t = 3$$

Todas essas equações se reduzem a $t = 1 + 2s$.

♦ Intuitivamente, sabemos que uma reta é um objeto *unidimensional*. A idéia de “dimensão” será explicada nos Capítulos 3 e 6, mas, para o momento, observe que essa idéia parece combinar com o fato de que a equação vetorial de uma reta requer apenas *um* parâmetro.

EXEMPLO 4 É freqüente a expressão “um par de pontos determina uma reta”. Encontre uma equação vetorial para a reta r em $\mathbb{R}^3$ determinada pelos pontos $P = (-1, 5, 0)$ e $Q = (2, 1, 1)$.

SOLUÇÃO: Podemos escolher qualquer ponto de r como $\mathbf{p}$; então, usaremos P (Q também seria bom). Um

vetor diretor conveniente é $\mathbf{d} = \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ou qualquer múltiplo escalar deste). Assim, obtemos

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Planos em $\mathbb{R}^3$

A próxima pergunta que devemos fazer é “Como a equação geral de uma reta se generaliza para $\mathbb{R}^3$?”. É razoável supor que, se $ax + by = c$ é a forma geral da equação de uma reta em $\mathbb{R}^2$, $ax + by + cz = d$ deva representar uma reta em $\mathbb{R}^3$. Na forma normal, essa equação é $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$, onde $\mathbf{n}$ é um vetor normal à reta e $\mathbf{p}$ corresponde a um ponto sobre a reta.

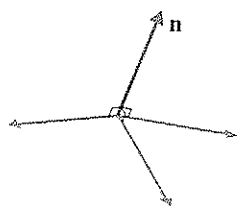
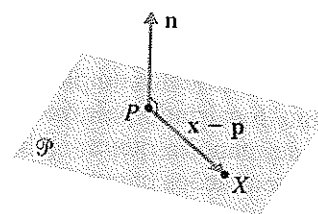
Para verificar se essa é uma hipótese razoável, vamos refletir sobre o caso especial da equação $ax + by + cz = 0$.

Na forma normal, ela é $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$, onde $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

No entanto, o conjunto de todos os vetores $\mathbf{x}$ que satisfazem essa equação é o conjunto de todos os vetores ortogonais a $\mathbf{n}$. Como mostra a Figura 7, infinitos vetores de direções diferentes possuem essa propriedade, determinando uma família de *planos* paralelos. Dessa forma, nossa suposição está incorreta: parece que $ax + by + cz = d$ é a equação de um plano – não de uma reta – em $\mathbb{R}^3$.

Tornemos mais precisa essa descoberta. Todo plano $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R}^3$ pode ser determinado especificando-se um ponto $\mathbf{p}$ em $\mathcal{P}$ e um vetor não nulo $\mathbf{n}$ normal a $\mathcal{P}$ (Figura 8). Dessa maneira, se $\mathbf{x}$ representa um ponto arbitrário

de $\mathcal{P}$, temos que $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$ ou $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$. Se $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, então, em termos das coordenadas, a equação se torna $ax + by + cz = d$ (onde $d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$).

Figura 7 $\mathbf{n}$ é ortogonal a infinitos vetoresFigura 8 $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$

Definição Seja $\mathcal{P}$ um plano em $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{p}$ um ponto pertencente a $\mathcal{P}$ e $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ um **vetor normal** a $\mathcal{P}$. Uma equação escrita na forma

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

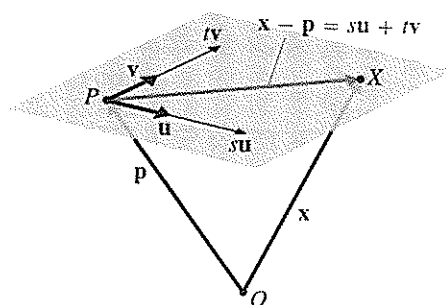
é chamada **equação normal de $\mathcal{P}$** . Uma equação escrita na forma $ax + by + cz = d$, onde $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, é chamada **equação geral de $\mathcal{P}$** .

Note que qualquer múltiplo escalar de um vetor normal a um plano é um outro vetor normal.

EXEMPLO 5 Ache equações nas formas normal e geral para o plano que contém o ponto $P = (6, 0, 1)$ e tem vetor normal $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Com $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, temos $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 9$; portanto, a equação normal $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$ se transforma na equação geral $x + 2y + 3z = 9$.

Geometricamente, é claro que planos paralelos têm os mesmos vetores normais. Assim, suas equações gerais têm os lados esquerdos múltiplos uns dos outros. Por exemplo, $2x + 4y + 6z = 10$ é uma equação geral de um plano paralelo ao plano do Exemplo 5, já que podemos reescrever essa equação como $x + 2y + 3z = 5$ – de onde percebemos que os dois planos têm o mesmo vetor normal $\mathbf{n}$. (Note que os planos não coincidem, pois os lados direitos das equações dos dois planos são distintos.)

Figura 9 $\mathbf{x} - \mathbf{p} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

Podemos também expressar a equação do plano na forma vetorial ou na forma paramétrica. Para isso, observe que um plano pode ser determinado especificando-se um de seus pontos P (pelo vetor $\mathbf{p}$) e dois vetores diretores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ paralelos ao plano (mas não paralelos entre si). Como mostra a Figura 9, dado qualquer ponto X do plano (localizado pelo vetor $\mathbf{x}$), podemos sempre encontrar múltiplos apropriados $s\mathbf{u}$ e $t\mathbf{v}$ dos vetores diretores, de maneira que $\mathbf{x} - \mathbf{p} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Se escrevermos essa equação em coordenadas, obteremos equações paramétricas para o plano.

Definição Uma *equação vetorial para o plano* $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R}^3$ é uma equação que pode ser escrita na forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

onde $\mathbf{p}$ é um ponto de $\mathcal{P}$ e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores diretores de $\mathcal{P}$ ($\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são não nulos e paralelos a $\mathcal{P}$, mas não paralelos entre si).

As equações correspondentes às coordenadas na equação vetorial são chamadas *equações paramétricas* de $\mathcal{P}$.

EXEMPLO 6 Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o plano do Exemplo 5.

SOLUÇÃO: Precisamos determinar dois vetores diretores. Temos um ponto $P = (6, 0, 1)$ no plano; se encontrarmos dois outros pontos Q e R em $\mathcal{P}$, os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ poderão servir como vetores diretores (a menos que, por falta de sorte, eles sejam paralelos!). Por tentativa e erro, observe que os pontos $Q = (9, 0, 0)$ e $R = (3, 3, 0)$ satisfazem a equação geral $x + 2y + 3z = 9$, e, portanto, estão no plano. Calculamos

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{PR} = \mathbf{r} - \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

que, por não serem múltiplos escalares um do outro, servirão como vetores diretores. Por conseguinte, obtemos uma equação vetorial de $\mathcal{P}$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e as correspondentes equações paramétricas,

$$\begin{aligned} x &= 6 + 3s - 3t \\ y &= 3t \\ z &= 1 - s - t \end{aligned}$$

→ [O que aconteceria se escolhêssemos $R = (0, 0, 3)$?]

Observações: ♦ Um plano é um objeto bidimensional, e suas equações, tanto vetoriais quanto paramétricas, requerem *dois* parâmetros.

- ♦ Como mostra a Figura 7, dado um ponto P e um vetor não nulo $\mathbf{n}$ em $\mathbb{R}^3$, existem infinitas retas que passam por P tendo $\mathbf{n}$ como vetor normal. Por outro lado, P e dois vetores normais não paralelos, $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$, servem para determinar uma reta r univocamente, pois r é a reta que passa por P e é perpendicular ao plano de equação $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{n}_1 + t\mathbf{n}_2$ (Figura 10). Dessa maneira, uma reta em $\mathbb{R}^3$ pode ser identificada por um par de equações

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$



cada uma delas correspondendo a um vetor normal. Como tais equações identificam um par de planos não paralelos (por que não paralelos?), essa é a descrição de uma reta como interseção de dois planos não paralelos (Figura 11). Algebricamente, a reta consiste em todos os pontos (x, y, z) que satisfazem simultaneamente ambas as equações. Exploraremos mais esse conceito no Capítulo 2, quando discutirmos a solução de um sistema de equações lineares.

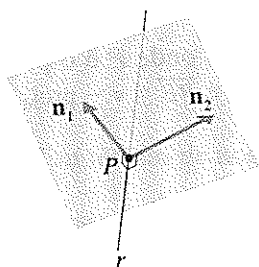


Figura 10 Um ponto e dois vetores normais determinam uma reta r

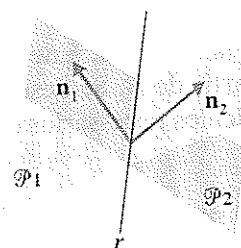


Figura 11 Uma reta interseção de dois planos

As Tabelas 1 e 2 resumem as informações apresentadas até agora sobre equações de retas e de planos.

Tabela 1 Equações de Retas em $\mathbb{R}^2$

Forma Normal	Forma Geral	Forma Vetorial	Forma Paramétrica
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$	$ax + by = c$	$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$	$x = p_1 + td_1$ $y = p_2 + td_2$

Tabela 2 Retas e Planos em $\mathbb{R}^3$

	Forma Normal	Forma Geral	Forma Vetorial	Forma Paramétrica
Retas	$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}_1$ $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{p}_2$	$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$	$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$	$x = p_1 + td_1$ $y = p_2 + td_2$ $z = p_3 + td_3$
Planos	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$	$ax + by + cz = d$	$\mathbf{x} = \mathbf{p} + su + tv$	$x = p_1 + su_1 + tv_1$ $y = p_2 + su_2 + tv_2$ $z = p_3 + su_3 + tv_3$

Observe mais uma vez que uma equação geral em $\mathbb{R}^2$ descreve uma reta, mas em $\mathbb{R}^3$ descreve um plano. [Em dimensões maiores, um objeto (reta, plano etc.) determinado por uma única equação desse tipo é usualmente chamado *hiperplano*.] A relação entre as dimensões do objeto, o número de equações necessárias para descrevê-lo e a dimensão do espaço é descrita pela seguinte “fórmula de equilíbrio”:

$$(\text{dimensão do objeto}) + (\text{número de equações na forma geral}) = \text{dimensão do espaço}$$

Quanto maior a dimensão do objeto, menor o número de equações necessárias. Por exemplo, um plano em $\mathbb{R}^3$ é bidimensional, requer uma equação geral e está no espaço tridimensional: $2 + 1 = 3$. Uma reta em $\mathbb{R}^3$ é unidimensional e, assim, precisa de $3 - 1 = 2$ equações para ser identificada. Note que a dimensão do objeto também combina com a quantidade de parâmetros da equação na forma vetorial ou paramétrica. Noções de “dimensão” serão estudadas nos Capítulos 3 e 6, mas, por enquanto, essas observações intuitivas nos servirão.

Vamos agora achar a distância de um ponto a uma reta ou um plano relacionando os resultados da Seção 1.3 com os desta seção.

EXEMPLO 7 Determine a distância do ponto $B = (1, 0, 2)$ à reta r que passa pelo ponto $A = (3, 1, 1)$ e tem

vetor diretor $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Como já sabemos, é necessário calcular o comprimento de $\overline{PB}$, onde P é o ponto de r no pé da perpendicular a partir de B . Se designarmos $\mathbf{v} = \overline{AB}$, então $\overline{AP} = \text{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})$ e $\overline{PB} = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})$ (veja a Figura 12). Faremos os cálculos necessários em várias etapas.

Etapla 1.

$$\mathbf{v} = \overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

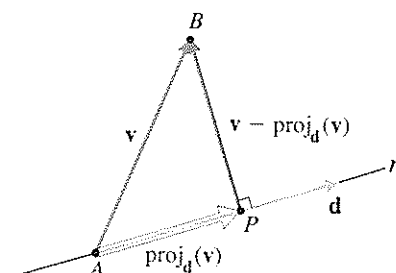


Figura 12 $d(B, r) = \|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})\|$

Etapla 2. A projeção de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{d}$ é

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) &= \left(\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} \right) \mathbf{d} \\ &= \left(\frac{(-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1}{(-1)^2 + 1 + 0} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Etapa 3. O vetor que queremos é

$$\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Etapa 4. A distância $d(B, r)$ de B a r é

$$\|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})\| = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\|$$

Usando o Teorema 2(b) para simplificar os cálculos, temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})\| &= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{9 + 9 + 4} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{22} \end{aligned}$$

Observação: ♦ Em termos de nossa notação anterior, $d(B, r) = d(\mathbf{v}, \text{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}))$.

Quando a reta r está em $\mathbb{R}^2$ e sua equação geral é $ax + by = c$, a distância $d(B, r)$ de $B = (x_0, y_0)$ à reta é dada pela fórmula

$$d(B, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$$

Você está convidado a demonstrar essa fórmula no Exercício 39.

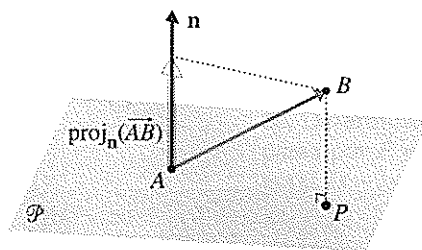


Figura 13 $d(B, \mathcal{P}) = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{AB})\|$

EXEMPLO 8 Determine a distância do ponto $B = (1, 0, 2)$ ao plano $\mathcal{P}$, cuja equação geral é $x + y - z = 1$.

SOLUÇÃO: Neste caso, precisamos calcular o comprimento de $\overrightarrow{PB}$, onde P é o ponto de $\mathcal{P}$ no pé da perpendicular a partir de B . Como mostra a Figura 13, se A for um ponto qualquer de $\mathcal{P}$ e aplicarmos o vetor

$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ normal a $\mathcal{P}$ de modo que sua origem seja em A , precisamos achar o comprimento da projeção de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\mathbf{n}$.

Novamente, apresentamos os cálculos necessários em etapas.

Etapa 1. Por tentativa e erro, encontramos um ponto qualquer cujas coordenadas satisfaçam a equação $x + y - z = 1$. $A = (1, 0, 0)$ é um deles.

Etapa 2. Seja

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Etapa 3. A projeção de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{n}$ é

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) &= \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \right) \mathbf{n} \\ &= \left(\frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2}{1 + 1 + (-1)^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Etapa 4. A distância $d(B, \mathcal{P})$ de B a $\mathcal{P}$ é

$$\begin{aligned} \|\text{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})\| &= \left| -\frac{2}{3} \right| \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \frac{2}{3} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Em geral, a distância $d(B, \mathcal{P})$ do ponto $B = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano cuja equação geral é $ax + by + cz = d$ é dada pela fórmula

$$d(B, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (4)$$

Você será convidado a deduzir essa fórmula no Exercício 40.

◆ EXERCÍCIOS 1.4 ◆

Nos Exercícios 1 e 2, escreva uma equação (a) na forma normal e (b) na forma geral para a reta que passa por P e possui vetor normal $\mathbf{n}$.

1. $P = (0, 0)$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. $P = (1, 2)$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 3 a 6, escreva equações (a) na forma normal e (b) na forma paramétrica para a reta que passa por P e tem vetor diretor $\mathbf{d}$.

3. $P = (1, 0)$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. $P = (-4, 4)$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $P = (0, 0, 0)$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

6. $P = (3, 0, -2)$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 7 e 8, escreva equações (a) na forma normal e (b) na forma geral para o plano que passa por P e possui vetor normal $\mathbf{n}$.

7. $P = (0, 1, 0)$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. $P = (-3, 5, 1)$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 9 e 10, escreva equações (a) na forma geral e (b) na forma paramétrica para o plano que passa por P e possui vetores diretores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

9. $P = (0, 0, 0)$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

10. $P = (6, -4, -3)$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 11 e 12, dê uma equação vetorial para a reta que passa por P e Q .

11. $P = (1, -2)$, $Q = (3, 0)$

12. $P = (0, 1, -1)$, $Q = (-2, 1, 3)$

Nos Exercícios 13 e 14, dê uma equação vetorial para o plano que passa pelos pontos P , Q e R .

13. $P = (1, 1, 1)$, $Q = (4, 0, 2)$, $R = (0, 1, -1)$

14. $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$, $R = (0, 0, 1)$

15. Ache equações paramétricas e uma equação vetorial para as retas de $\mathbb{R}^2$ que possuem as seguintes equações:

(a) $y = 3x - 1$ (b) $3x + 2y = 5$

16. Considere a equação vetorial $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$, onde $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ correspondem a pontos distintos P e Q em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que essa equação descreve o segmento de reta $\overline{PQ}$ quando t varia de 0 a 1.

(b) Para que valores de t $\mathbf{x}$ é ponto médio de $\overline{PQ}$? Qual é esse $\mathbf{x}$?

(c) Determine o ponto médio de $\overline{PQ}$ quando $P = (2, -3)$ e $Q = (0, 1)$.

(d) Determine o ponto médio de $\overline{PQ}$ quando $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (4, 1, -2)$.

(e) Determine os dois pontos que dividem o segmento $\overline{PQ}$ da parte (c) em três partes iguais.

(f) Determine os dois pontos que dividem o segmento $\overline{PQ}$ da parte (d) em três partes iguais.

17. Indique uma "demonstração vetorial" do fato de que, em $\mathbb{R}^2$, duas retas com inclinações m_1 e m_2 são perpendiculares se, e somente se, $m_1 m_2 = -1$.

18. A reta r passa pelo ponto $P = (1, -1, 1)$ e tem vetor diretor $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para cada um dos seguintes planos $\mathcal{P}$,

determine se r e $\mathcal{P}$ são paralelos, perpendiculares ou nenhum desses dois:

(a) $2x + 3y - z = 1$

(b) $4x - y + 5z = 0$

(c) $x - y - z = 3$

(d) $4x + 6y - 2z = 0$

19. O plano $\mathcal{P}_1$ tem equação $4x - y + 5z = 2$. Para cada um dos planos $\mathcal{P}$ do Exercício 18, determine se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}$ são paralelos, perpendiculares ou nenhum desses dois.

20. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa por $P = (2, -1)$ e é perpendicular à reta de equação geral $2x - 3y = 1$.

21. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa por $P = (2, -1)$ e é paralela à reta de equação geral $2x - 3y = 1$.

22. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa por $P = (-1, 0, 3)$ e é perpendicular ao plano de equação geral $x - 3y + 2z = 5$.

23. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa por $P = (-1, 0, 3)$ e é perpendicular à reta de equações paramétricas

$$x = 1 - t$$

$$y = 2 + 3t$$

$$z = -2 - t$$

24. Escreva uma equação na forma normal para o plano que passa por $P = (0, -2, 5)$ e é paralelo ao plano de equação geral $6x - y + 2z = 3$.

25. Os vértices de um cubo são os oito pontos (x, y, z) tais que cada uma das coordenadas x, y e z são iguais a 0 ou 1. (Veja a Figura 10 na Seção 1.3.)

(a) Encontre uma equação geral para cada um dos planos que determinam as seis faces do cubo.

(b) Encontre uma equação geral para o plano que contém a diagonal que liga a origem ao ponto $(1, 1, 1)$ e é perpendicular ao plano xy .

(c) Encontre uma equação geral para o plano que contém as diagonais das faces do cubo do Exemplo 8 da Seção 1.3.

26. Encontre uma equação para o conjunto de todos os pontos equidistantes dos pontos $P = (1, 0, -2)$ e $Q = (5, 2, 4)$.

Nos Exercícios 27 e 28, determine a distância do ponto Q à reta r .

27. $Q = (2, 2)$, r de equação $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

28. $Q = (0, 1, 0)$, r de equação $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 29 e 30, determine a distância do ponto Q ao plano $\mathcal{P}$.

29. $Q = (2, 2, 2)$, $\mathcal{P}$ de equação $x + y - z = 0$

30. $Q = (0, 0, 0)$, $\mathcal{P}$ de equação $x - 2y + 2z = 1$

A Figura 14 sugere uma maneira de usar vetores para localizar o ponto R da reta r que está mais próximo de Q .

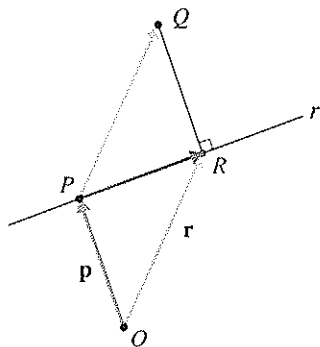


Figura 14 $r = p + \overrightarrow{PR}$

31. Encontre o ponto R de r mais próximo de Q no Exercício 27.

32. Encontre o ponto R de r mais próximo de Q no Exercício 28.

A Figura 15 sugere uma maneira de localizar o ponto R de $\mathcal{P}$ mais próximo de Q , usando vetores.

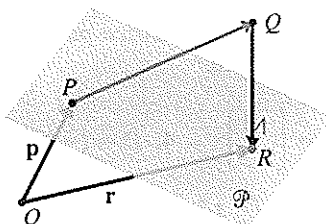


Figura 15 $r = p + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

33. Encontre o ponto R de $\mathcal{P}$ mais próximo de Q no Exercício 29.

34. Encontre o ponto R de $\mathcal{P}$ mais próximo de Q no Exercício 30.

Nos Exercícios 35 e 36, determine a distância entre as retas paralelas.

35. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 37 e 38, determine a distância entre os planos paralelos.

37. $2x + y - 2z = 0$ e $2x + y - 2z = 5$

38. $x + y + z = 1$ e $x + y + z = 3$

39. Prove a Equação 3 da página 41.

40. Prove a Equação 4 da página 42.

41. Prove que, em $\mathbb{R}^2$, a distância entre retas paralelas de equações $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c_1$ e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c_2$ é dada por $\frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{n}\|}$.

42. Prove que a distância entre planos paralelos de equações $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d_1$ e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d_2$ é dada por $\frac{|d_1 - d_2|}{\|\mathbf{n}\|}$.

Investigação

O Produto Vetorial

Seria conveniente se pudéssemos converter facilmente a equação vetorial do plano $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ na forma normal $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$. Dados dois vetores não paralelos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, o que precisamos é de um processo que produza um terceiro vetor $\mathbf{n}$ ortogonal a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Uma maneira é usar a operação conhecida como **produto vetorial** de vetores. *Válida somente em $\mathbb{R}^3$* , é assim definida:

Definição O **produto vetorial** de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ é o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

Ilustramos a seguir um diagrama que pode ajudá-lo a lembrar como se calcula o produto vetorial de dois vetores. Sob cada vetor completo escrito em coluna, um ao lado do outro, escreva as duas primeiras coordenadas de cada vetor. Ignore as coordenadas da linha de cima e considere os blocos de quatro linhas. Subtraia os produtos das coordenadas ligadas por linhas pontilhadas dos produtos das coordenadas ligadas por linhas cheias. (Esse processo ajuda a perceber que a primeira coordenada de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ não possui índices 1, a segunda não tem índices 2 e a terceira não tem índices 3.)

u_1	v_1	
u_2	v_2	
u_3	v_3	$u_2v_3 - u_3v_2$
u_1	v_1	$u_3v_1 - u_1v_3$
u_2	v_2	$u_1v_2 - u_2v_1$

Os problemas a seguir exploram brevemente o produto vetorial.

1. Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. Mostre que $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$.

3. Usando a definição de produto vetorial, prove que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$.

4. Com a ajuda do produto vetorial, encontre uma equação na forma normal para o plano indicado a seguir:

(a) O plano que passa por $P = (1, 0, -2)$, é paralelo a $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) O plano que passa por $P = (0, -1, 1)$, $Q = (2, 0, 2)$ e $R = (1, 2, -1)$.

5. Prove as seguintes propriedades do produto vetorial:

(a) $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(c) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(d) $\mathbf{u} \times k\mathbf{v} = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

(e) $\mathbf{u} \times k\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(f) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

6. Prove as seguintes propriedades do produto vetorial:

(a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

(b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

(c) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$

7. Refaça os problemas 2 e 3 usando os problemas 5 e 6.

8. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores em $\mathbb{R}^3$ e θ o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) Prove que $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$. [Sugestão: consulte o Exercício 6(c).]

(b) Prove que a área $\mathcal{A}$ do triângulo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (como mostra a Figura 1) é dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

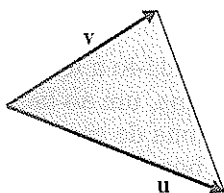


Figura 1

(c) Use o resultado da parte (b) para determinar a área do triângulo de vértices $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (5, -1, 3)$.

1.5 Vetores de Código e Aritmética Modular

A História nos mostra que as pessoas sempre transmitiram informações por meio de códigos. Por vezes, a intenção é encobrir a mensagem que está sendo enviada, como no caso em que cada letra de uma palavra é trocada por outra diferente, de acordo com uma regra de substituição. Embora fascinantes, esses códigos secretos ou cifras não são de nosso interesse aqui: são objetos de estudo do campo da *criptografia*. Em vez disso, falaremos sobre códigos utilizados quando a informação deve ser transmitida eletronicamente.

Um exemplo familiar de um desses códigos é o código Morse, com seu sistema de pontos e traços. O advento dos computadores digitais do século XX levou à necessidade de transmitir rapidamente e com precisão quantidades maciças de dados. Computadores foram projetados para codificar dados como seqüências de 0s e 1s. Muitos avanços tecnológicos recentes dependem de códigos, e nós os encontramos todos os dias sem nos darmos conta disso: comunicações via satélite, CD, Códigos Universais de Produtos (UPC – *Universal Product Codes*) associados aos códigos de barras encontrados em mercadorias e o Padrão Internacional de Numeração de Livros (ISBN – *International Standard Book Numbers*), encontrado em todo livro publicado são alguns exemplos.

Nesta seção, usaremos vetores para projetar códigos detectores de erros que podem ocorrer na transmissão de dados. Nos capítulos posteriores, construiremos códigos que não somente detectam, mas corrigem erros. Os vetores que aparecem no estudo de códigos não são os vetores familiares de $\mathbb{R}^n$, mas vetores com apenas