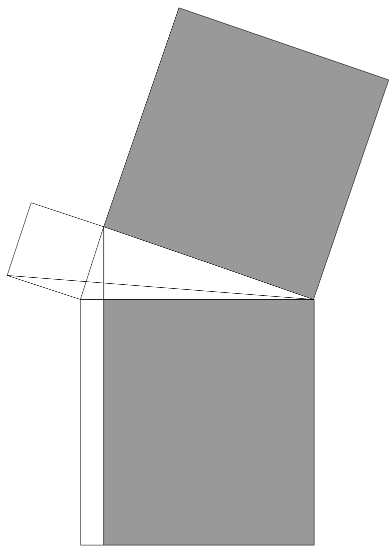
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CADERNO DIDÁTICO



Geometria Plana e Desenho Geométrico

João Batista Peneireiro
Maurício Fronza da Silva

Santa Maria, Inverno de 2008 (Revisão)

Apresentação

Prezado leitor, estas anotações de Geometria Euclidiana Plana são material de notas de aula da disciplina de Geometria Plana e Desenho Geométrico do Curso de Matemática da UFSM. Elas servem de síntese para os tópicos tratados na disciplina e nem de longe pretendem ser completas e sem falhas.

Como orientação para o uso destas notas, queremos chamar a atenção para a necessidade de dar-se uma introdução sobre o método dedutivo, com ênfase ao raciocínio lógico e as regras de lógica que são, em geral, utilizadas ao longo de todo curso. Atenção especial deve ser dada ao método de redução ao absurdo ("reductio ad absurdum").

Ao ler este texto, o leitor deve estar municiado de lápis para poder acompanhar o raciocínio com esquemas (desenhos). Os desenhos são dispensáveis para as demonstrações apresentadas, mas revelam-se um bom auxílio para o entendimento das mesmas. Lembre-se, toda demonstração deverá ser independente dos desenhos, o uso destes é somente um auxiliar útil. Argumentações baseadas em desenhos podem levar a resultados absurdos (veja o surpreendente Apêndice A).

Estas anotações constituem uma versão corrigida e ampliada daquelas do inverno de 2001. Todas as sugestões que visem a melhoria deste texto são bem vindas, erros que eventualmente existam no texto devem ser debitados, exclusivamente, aos autores.

João Batista Peneireiro (peneireiro@smail.ufsm.br)
Maurício Fronza da Silva (mfronza@smail.ufsm.br)

Lista de Símbolos

$A, B, C, ...$	ponto
$r, s, t, ...$	reta
$A\widehat{O}B, \widehat{O}$	ângulo de vértice O ou medida de ângulo
$\alpha, \beta, \gamma, ...$	ângulo ou medida de ângulo
$\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, ...$	ângulo ou medida de ângulo
$\overline{AB}$	segmento de extremidades A e B ou reta que passa por A, B
AB	medida do segmento $\overline{AB}$
$ABC, \Delta ABC$	triângulo de vértices A, B, C
$\overrightarrow{AB}$	semi-reta de origem A contendo B
γ_{rP}	semiplano determinado por r contendo P
$x\,(A)$	coordenada do ponto A em relação a um sistema de coordenadas da reta
$C\,(O, r)$	circunferência de centro O e raio r
$AB \equiv CD$	segmento $\overline{AB}$ congruente ao segmento $\overline{CD}$
$A\widehat{O}B \equiv C\widehat{O'}D$	ângulo $A\widehat{O}B$ congruente ao ângulo $C\widehat{O'}D$
$ABC \equiv XYZ$	triângulo ABC congruente ao triângulo XYZ, e a congruência é a aplicação tal que $A \mapsto X, B \mapsto Y, C \mapsto Z$
$r \parallel s$	retas r, s são paralelas
$r \perp s$	retas r, s são perpendiculares
$A_1A_2...A_n$	polígono de vértices $A_1, A_2, ..., A_n$
$ABCD$	quadrilátero cujos lados opostos são AB, CD; e AC, BD
$ABC \approx XYZ$	triângulo ABC semelhante ao triângulo XYZ, e a semelhança é a aplicação tal que $A \mapsto X, B \mapsto Y, C \mapsto Z$
$\overset{\frown}{AB}$	arco AB
$m(\overset{\frown}{AB})$	medida do arco AB (em graus)
$t\widehat{A}B$	ângulo em que um dos lados passa por B e o outro é a semi-reta t
l_n	lado de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência
a_n	apótema de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência
$a\,(R)$	área da região poligonal R
$A - C - B$	C está entre A e B.

Sumário

Capítulo 1

A Origem da Geometria e o Método Axiomático

Dá-se um curto apanhado histórico da geometria antiga, introduz-se comentários sobre método axiomático e lista-se os termos não definidos a serem considerados neste trabalho.

A palavra "geometria" vem do grego "geometrien" ($\gamma\varepsilon\omega\eta\epsilon\zeta\rho\varsigma\alpha$) onde "geo" significa terra e "metrien" medida. Geometria foi, em sua origem, a ciência de medição de terras.

O historiador grego Heródoto (500 a.C.) atribuiu aos egípcios o início da geometria, mas outras civilizações antigas (babilônios, hindus, chineses) também possuiam muitas informações geométricas.[1]

A geometria dos povos antigos era uma coleção de regras obtidas a partir de experimentações e observações de analogias, tentativas e ocasionais lampejos de intuição. Foram as necessidades práticas que impulsionaram a busca de respostas às questões geométricas, mesmo que só de forma aproximada. Assim, para os babilônios, no período de 2000 a 1600 a.C., a área do círculo era calculada tomando três vezes o quadrado do raio (isto é, eles tomavam como 3 o valor π; este também era o valor de π para os chineses naquela época). Os egípcios de 1800 a.C., de acordo com o papiro de Rhind, usavam $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,1604$ como valor aproximado de π. Muitas vezes, os egípcios tinham cálculos corretos; por exemplo, conheciam a fórmula correta para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada. Por outro lado, a fórmula correta para o cálculo da área do retângulo, era por eles aplicada também a qualquer quadrilátero.

A geometria egípcia não foi uma ciência no sentido entendido pelos gregos, era somente uma coleção de regras para cálculo sem qualquer motivação ou justificativa.

A matemática babilônica foi mais avançada que a dos egípcios na aritmética e álgebra; além disso, eles conheciam o tradicional teorema de Pitágoras, "num triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos", bem antes mesmo do que Pitágoras.

[1] As idéias de cunho histórico aqui expostas são anotações baseadas no excelente livro [10].

Foram os gregos, por volta de 600 a.C. com Tales de Mileto, que iniciaram as investigações de cunho geométrico, estabelecendo a necessidade de se empregar o método dedutivo no lugar do método de tentativa e erro. Tales, segundo Proclus[2], visitou o Egito e a Babilônia tendo trazido desses lugares os conhecimentos geométricos da época. Com o objetivo de verificar a correção dos resultados executados, ele desenvolveu a primeira geometria lógica. O desenvolvimento organizado dos teoremas através de provas (demonstrações) foi característica da matemática grega, e uma prática inteiramente nova até então.

A sistematização iniciada por Tales foi continuada, nos dois séculos seguintes, por Pitágoras de Samos e seus discípulos. Em Crotona, sul da atual Itália, ele fundou uma irmandade que ficou conhecida como Escola Pitagórica. Foram os pitagóricos, membros dessa irmandade, que descobriram os números irracionais, tais como $\sqrt{2}$, criando um verdadeiro trauma na escola, uma vez que o lema fundamental dessa irmandade era que "tudo é número", onde por número entendia-se os inteiros positivos e razão entre eles.

A fundamentação sistemática da geometria plana foi realizada pela escola pitagórica, por volta de 400 a.C., em "Elementos" escrito pelo matemático Hipócrates de Chios (não confundir com o médico). Um século depois, Euclides de Alexandria, publicou sua obra "Elementos" [12], onde reuniu, praticamente, quase tudo que se conhecia de matemática até então. No século 4 a.C., Platão fundou sua famosa academia onde na entrada estava fixado o lema "Que ninguém que ignore a geometria entre aqui". Euclides foi um discípulo da escola platônica. Por volta de 300 a.C. ele produziu o tratamento definitivo da geometria grega e da teoria dos números nos seus treze volumes do "Elementos". Neste tratado, Euclides colocou os trabalhos de Pitágoras nos livros I-IV e IX; no livro VIII, os de Architas; os de Eudoxo, nos livros V, VI e XII e os de Teeteto nos livros X e XIII. O livro "Elementos" se tornou, ao longo do tempo, a obra mais publicada e lida. Sua abordagem da geometria dominou o ensino desta matéria por mais de 2000 anos.

Fora tudo disso, o método axiomático usado por Euclides em "Elementos" é o protótipo de tudo que chamamos hoje de "matemática pura". Ela é pura no sentido de "puro pensar"; nenhum experimento físico é preciso para verificar se suas afirmações são corretas, somente o raciocínio nas demonstrações precisa ser conferido.

Os "Elementos" de Euclides é puro no sentido de que esse trabalho não inclui aplicações práticas. Naturalmente, a geometria de Euclides tem um grande número de aplicações a problemas práticos na engenharia, mas eles não são mencionados em "Elementos". Muitas vezes, resultados puramente matemáticos passam a ter importância em questões aplicadas, sendo por isso úteis à sociedade. Além disso, aquelas partes da Matemática que não têm sido "aplicadas" são também válidas à sociedade, tanto como trabalhos estéticos, comparados à música e à arte, como contribuição à expansão da consciência e do conhecimento do homem.

Matemáticos podem fazer uso da tentativa e erro, cálculo de casos especiais, computadores, ou outros meios para demonstrar teoremas. Para alguns dos mais importantes resultados em matemática foram, originalmente, dadas provas incompletas (o último Teo-

[2]Proclus (410-488 d.C.), filósofo neoplatônico, escreveu "Comentário sobre o primeiro livro de *Os Elementos* de Euclides".

rema de Fermat, por exemplo). Provas corretas serão dadas mais tarde e assim o trabalho matemático estará satisfeito.

As provas nos dão segurança de que os resultados são corretos. Em muitos casos elas nos dão resultados mais gerais. Um exemplo é o Teorema de Pitágoras, que generaliza resultados que os egípcios, hindus e outros povos conheciam só casos particulares. Finalmente, provas, muitas vezes, nos dão uma visão de relações entre coisas diferentes, nos forçando a organizar nossas idéias de um modo coerente.

Afinal, **o que é o método axiomático?** Se quisermos nos persuadir, por meio de raciocínio da necessidade de alguma afirmação A_1, podemos mostrar como esta afirmação segue logicamente de outra afirmação A_2 que podemos aceitar como verdadeira. No entanto, se não temos estabelecido A_2 como verdadeira, podemos mostrar que A_2 decorre logicamente de A_3. Podemos ter que repetir este processo muitas vezes até atingirmos uma afirmação que já tenhamos como certa e que não precise de justificativa. Essa afirmação, assumida como certa, toma o papel de um **Axioma** (ou **Postulado**). Se não pudermos atingir uma afirmação que será aceita como base de nossas argumentações, estaremos mergulhados numa "regressão infinita", dando uma demonstração após outra, sem fim. Assim, dois quesitos devem ser assumidos para que possamos concordar que uma prova está correta:

1. *Aceitação de algumas afirmações chamadas "Axiomas" ou "Postulados" sem justificação adicional.*
2. *Aceitação de certas regras de raciocínio, isto é, aceitação de como, e quando, uma afirmação "segue logicamente" de outra.*

A grande realização de Euclides foi ter estabelecido, a partir de uns poucos postulados, 465 **proposições** (**teoremas**) mais complicadas e nem sempre intuitivas, onde está contida toda a geometria conhecida de seu tempo, [12]. Uma razão para ser os "Elementos" um belo trabalho é que muito foi deduzido de tão pouco.

Tendo combinado as duas regras acima, para se poder concordar quando uma demonstração está correta, antes de tudo, precisamos fixar certas terminologias e símbolos a serem utilizados. Assim, combinamos também o seguinte:

3. *Os teoremas e símbolos usados no sistema axiomático deverão ter significado compreendido igualmente por todos.*

Temos o direito de dar definições de termos novos baseados em outros que assumimos como indefinidos. Assim, no desenvolvimento da geometria plana que faremos nos próximos capítulos, iremos assumir *quatro termos* que serão básicos para definir todos os outros termos geométricos, a saber:

- ponto;
- reta;
- incidente;
- estar entre.

Esta lista constitui-se dos **termos geométricos indefinidos** ou **termos primitivos**. Todo corpo axiomático que construiremos estará baseado nesses termos, e nas noções algébricas de conjunto, correspondência, aplicação, etc.

Capítulo 2

Axiomas de Incidência e da Ordem

O ambiente no qual constrói-se a geometria é chamado plano, e denominam-se ponto e reta os conceitos geométricos primitivos (objetos primitivos) do plano. Assume-se que o plano é constituído por pontos e que retas são subconjuntos distinguidos de pontos do plano. Lista-se um grupo de axiomas, em número de sete, que fixarão relações e definirão conceitos relativos aos objetos primitivos (não se apresenta axiomas relacionando esses entes no contexto do espaço por só estar-se interessado em desenvolver geometria de objetos planos).

2.1 Axiomas de incidência

... nos dizem sobre a disposição mútua de pontos e retas; caracteriza reta.

Axioma 1 *Dados quaisquer dois pontos distintos, A e B, existe uma única reta que os contém.*

2.1 Observação. Reservaremos as letras maiúsculas do alfabeto latino para nomear ponto e as letras minúsculas para nomear retas. Assim, dizemos simplismente "ponto P" e "reta r", por exemplo.

2.2 Observação. Usando a notação da teoria dos conjuntos podemos, sinteticamente, escreve o axioma 1 do seguinte modo: $A, B, A \neq B \Rightarrow \exists \,|\, r : A, B \in r$.

2.3 Observação. As expressões "um ponto pertence a uma reta", "um ponto é incidente em uma reta", "um ponto está sobre uma reta" e "uma reta passa por um ponto" são assumidas como equivalentes.

2.4 Observação. De acordo com este axioma, somente uma reta passa através de dois pontos. Segue-se daí, que uma reta está completamente determinada pela especificação de dois pontos. A partir disto, denotaremos então a reta que passa pelos pontos A e B, por reta $\overline{AB}$.

2.5 Definição. Se um ponto é comum a duas retas dizemos que elas se **interceptam** nesse ponto, ou que esse ponto é um **ponto de interseção** dessas retas. Duas retas que se interceptam num único ponto são ditas **concorrentes** ou mutuamente **transversais**.

2.6 Definição. A coleção de todos os pontos chamaremos de **Plano**. Nomearemos planos utilizando-se das letras do alfabeto grego. Por exemplo: plano α .

Axioma 2 *Em cada reta existem ao menos dois pontos distintos.*

Axioma 3 *Existem três pontos distintos que não pertencem a uma mesma reta.*

2.7 Observação. O axioma 3 diz que reta é um subconjunto próprio do plano.

2.8 Exercício. Prove que existem retas concorrentes.

2.9 Teorema. *Duas retas distintas ou não se interceptam, ou se interceptam somente num ponto.*

Prova: Dadas duas retas distintas, suponhamos que elas se interceptam em dois (ou mais) pontos. Se isso é um fato, essas retas serão coincidentes devido ao axioma 1, o que é uma contradição pois, por hipótese, elas são distintas. Assim a interseção dessas retas ou é vazia ou só contém um ponto. ■

2.10 Definição. Pontos pertencentes a uma mesma reta são ditos **colineares**, caso contrário são **não-colineares**.

2.11 Observação. É comum darmos uma representação gráfica aos entes primitivos da geometria euclidiana, imaginando um plano como a superfície de uma mesa que se estende indefinidamente em todas as direções. Nela, a marca da ponta de um lápis representa um ponto e a parte de uma reta é obtida usando-se uma régua. Cabe esclarecer que, ao estudarmos geometria, é hábito utilizarmos desenhos. (vide apêndice A).

Por exemplo, na Figura 2.1, estão representadas duas retas, a e b, e três pontos A, B e P. O ponto A pertence a reta a e B, a reta b; o ponto P é o ponto de interseção das duas retas.

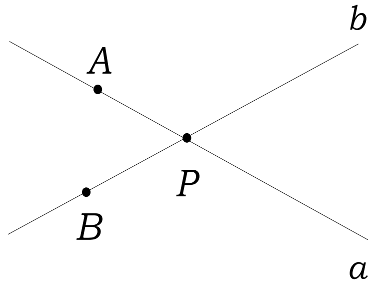


Figura 2.1: Retas a, b e pontos A, B e P.

Muitas vezes faremos uso desse artifício, mas chamamos a atenção do leitor para o fato de que o desenho é só um instrumento de apoio à intuição e à linguagem mas, em momento algum, deve ser utilizado como dado para demonstrações. (vide apêndice A).

2.2 Axiomas da ordem

...nos dizem sobre as propriedades da disposição mútua de pontos numa reta; para essa disposição de pontos usa-se o termo "estar entre".

Com os próximos axiomas, estaremos interessados em caracterizar, exatamente, o que significa "dados três pontos em uma reta dizer quando um deles se localiza entre os outros dois." Graficamente, isso está ilustrado na Figura 2.2, para pontos A, B e C de uma reta r.

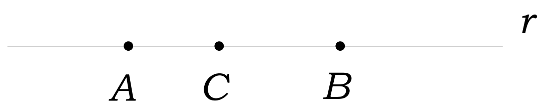


Figura 2.2: O ponto C está entre A e B.

Axioma 4 *Para quaisquer três pontos distintos colineares, um, e somente um deles, está entre os outros dois.*

2.12 Observação. As expressões, "um ponto C está entre A e B", "um ponto C separa os pontos A e B" ou "os pontos A e B estão em lados opostos do ponto C", são equivalentes.

2.13 Observação. Para dizer que "C está entre A e B" vamos usar a seguinte notação: $A - C - B$.

Axioma 5 *Se $A - C - B$ então estes três pontos são distintos, colineares e $B - C - A$.*

2.14 Observação. Em notação de teoria dos conjuntos o axioma 5 pode ser escrito do seguinte modo:

$$A - C - B \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq B, A \neq C, B \neq C; \\ \exists r : A, B, C \in r \text{ e} \\ B - C - A. \end{cases}$$

2.15 Observação. Se C separa A e B, podemos dizer também que B e C estão situados do mesmo lado em relação a A.

2.16 Definição. Dados dois pontos A e B, distintos, o conjunto de pontos constituído pelos pontos A, B e todos os pontos que estão entre A e B é chamado de **segmento** $\overline{AB}$, (ou **segmento de reta** $\overline{AB}$). Se A e B são coincidentes dizemos que $\overline{AB}$ é o **segmento nulo**.

Os pontos A e B são denominados **extremidades** ou **extremos** do segmento $\overline{AB}$.

2.17 Exercício. Use a notação da teoria de conjuntos e escreva a definição de segmento $\overline{AB}$.

2.18 Exercício. Mostre que $\overline{AB} = \overline{BA}$ (observe que esta é uma igualdade de conjuntos).

2.19 Definição. A todo subconjunto próprio do plano chamaremos de **figura geométrica**, **figura plana** ou simplesmente **figura**.

2.20 Exercício. Utilizando somente os axiomas 1 - 5, dê exemplos de figuras planas.

Utilizando-se segmentos podemos construir muitas figuras geométricas no plano. Uma das mais simples é aquela formada por três pontos não colineares e pelos segmentos definidos por esses três pontos. (Figura 2.3)

2.21 Definição. Sejam A, B, C três pontos não-colineares. **Triângulo** determinado por A, B, C é o conjunto $\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$. Os pontos A, B, C são os **vértices** do triângulo e os segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ são os **lados** do triângulo.

2.22 Observação. Indicaremos o triângulo determinado pelos pontos A, B, C por $\triangle ABC$.

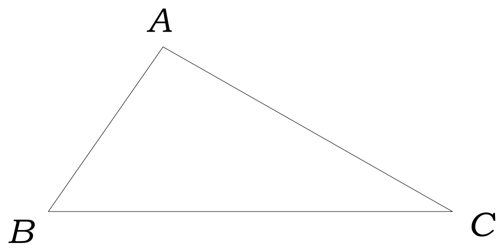


Figura 2.3: Representação gráfica do triângulo determinado pelos pontos A, B e C.

2.23 Exercício. Prove que existe pelo menos um triângulo (sugestão: use os axiomas e definições dados).

Axioma 6 *Dados dois pontos distintos A e B, existe um ponto C entre A e B.*

2.24 Exercício. Mostre que existem pelo menos sete triângulos.

Axioma 7 *Dados dois pontos distintos A e B, existe um ponto D tal que B está entre A e D e um ponto E tal que A está entre E e B.*

A partir da noção de segmento de reta vamos introduzir o conceito de semi-reta através da definição seguinte.

2.25 Definição. Dados dois pontos distintos, A e B, **semi-reta de origem A contendo o ponto B** é o conjunto de pontos do segmento $\overline{AB}$ unido com todos os pontos C tais que B está entre A e C.

2.26 Observação. Usaremos a notação $\overrightarrow{AB}$ para representar a semi-reta de origem A contendo o ponto B.

2.27 Exercício. Mostre que existe um ponto na reta $\overline{AB}$ que não pertence à $\overrightarrow{AB}$.

2.28 Exercício. Qual o conjunto de pontos definido por $\overrightarrow{AB}$?

2.29 Exercício. Mostre que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

2.30 Definição. Dada a semi-reta $\overrightarrow{AB}$ tomamos um ponto C tal que A esteja entre B e C. Chamamos a semi-reta $\overrightarrow{AC}$ de **semi-reta oposta** a $\overrightarrow{AB}$.

2.31 Observação. O conceito de semi-reta nos diz que um ponto de uma reta **divide** essa reta em duas semi-retas de mesma origem.

2.32 Exercício. Mostre que $AB = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

2.33 Definição. Dizemos que dois pontos distintos, P e Q, **estão em um mesmo lado em relação a uma reta** r se a interseção do segmento $\overline{PQ}$ com r for vazia.

Caso contrário, dizemos que os pontos **estão em lados opostos em relação a r**.

2.34 Definição. Sejam P um ponto e r uma reta que não contém P; **semiplano determinado por r contendo P** é o conjunto de todos os pontos Q tais que P e Q estão em um mesmo lado em relação à reta r.

A reta r é chamada de **origem do semiplano**.

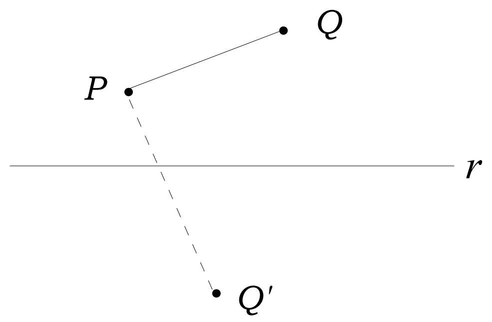


Figura 2.4: Lados em relação a reta r.

O semiplano caracterizado pela reta r e pelo ponto P será representado por γ_{rP}.

Axioma 8 ***(Separação do Plano)*** *Uma reta determina somente dois semiplanos distintos (ou opostos).*

O teorema seguinte afirma a existência de uma infinidade (neste texto, os termos "uma infinidade" e "infinito" significam "tanto quanto quisermos") de pontos num segmento de reta $\overline{AB}$.

2.35 Teorema. *Se A e B são pontos não pertencentes à uma reta r, onde A pertence a um semiplano e B ao outro daqueles determinados por r, então a interseção do segmento $\overline{AB}$ com r é não vazia. (Sugestão: prove por redução ao absurdo).*

2.36 Teorema. ***(de Pash)*** *Se ABC é um triângulo e r é uma reta que intercepta o lado $\overline{AB}$ num ponto entre A e B, então r também intercepta um dos outros dois lados.*

Prova: C pertence à r ou não. Caso afirmativo, segue a validade da conclusão; isto é, C intercepta ambos os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Consideremos o caso em que C não pertence à r (vide figura 2.5). Como A e B não pertencem à r e $\overline{AB}$ interceptam r, segue-se por definição que A e B estão em lados opostos em relação à r. Se C não pertence à r, ou C está do mesmo lado de A em relação à r ou no lado oposto a este (Axioma da Separação).

Se C e A estão do mesmo lado em relação à r, então C e B estão em lados opostos em relação à r. Isto significa que r intercepta BC e não intercepta $\overline{AC}$. Se C e B estão do mesmo lado em relação à r, de modo análogo à conclusão anterior, temos que r intercepta $\overline{AC}$, mas não intercepta $\overline{BC}$. Assim, em conclusão à todas as hipóteses para r, chegamos que r intercepta um dos outros dois lados do triângulo.

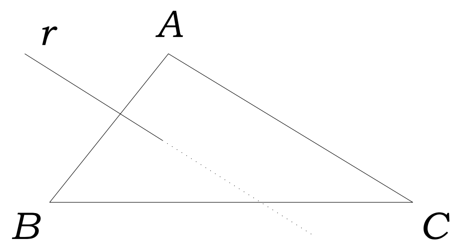


Figura 2.5: r intercepta outro lado do triângulo que não $\overline{AB}$.

2.37 Lema. *Se $A-B-C$ e $B-C-D$, então B e C pertencem ao segmento $\overline{AD}$.*

Prova: Seja E um ponto que não pertence a reta$\overline{AB}$. Seja F um ponto da reta $\overline{CE}$, tal que $C-E-F$. Sendo AEC um triângulo e $A-B-C$, temos que $\overline{BF}$ intercepta o segmento $\overline{AE}$ ou a reta$\overline{CE}$. Como $C-E-F$, F não pode estar entre C e E. Dos dois fatos anteriores, segue-se que a reta $\overline{BF}$ tem que interceptar o segmento $\overline{AE}$ (Teorema de Pash). Considerando-se agora o triângulo BFC e a reta $\overline{AE}$, temos novamente do Teorema de Pash que o ponto de interseção das retas $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ está entre os pontos B e F. Chamemos de G esse ponto de interseção. Analogamente, prova-se que $\overline{CF}$ intercepta o segmento $\overline{GD}$ em algum ponto H.

Como H deve estar no segmento $\overline{GD}$, e E não pertence ao segmento $\overline{AG}$, então a retaEH terá um ponto em comum com o segmento $\overline{AD}$ (Teorema de Pash aplicado ao AGH). Assim, C está no segmento $\overline{AD}$. Da mesma forma, pode-se facilmente mostrar que B também pertence à $\overline{AD}$. (Exercício!)

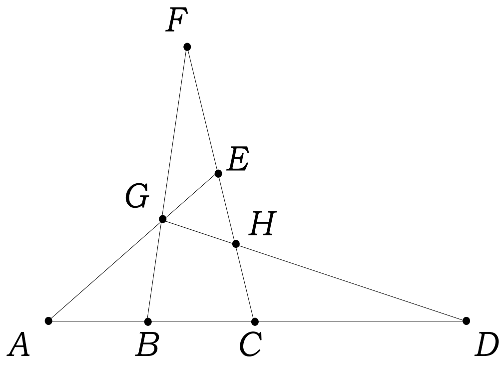


Figura 2.6: B e C estão contidos em $\overline{AD}$.

2.38 Lema. *Se $A - C - D$ e $A - B - C$, então $A - B - D$ e $B - C - D$.*

Prova: Seja G um ponto não pertencente a reta $\overline{AB}$ e F um ponto tal que $B - G - F$. A reta $\overline{CF}$ não tem ponto em comum com $\overline{AB}$, nem com $\overline{BG}$. Assim, $\overline{CF}$ não tem ponto em comum com $\overline{AG}$. Como $A - C - D$ e AGD é um trinângulo, temos do Teorema de Pash que $\overline{CF}$ intercepta $\overline{GD}$ em algum ponto H (vide figura 2.7). Pelo mesmo modo, sendo BGD um triângulo, segue-se que FH intercepta $\overline{BD}$. Vemos assim, que $B - C - D$, e daí concluímos a veracidade da segunda afirmação do lema. Das hipóteses, e, da afirmação e do lema anterior, segue-se que $A - B - D$.

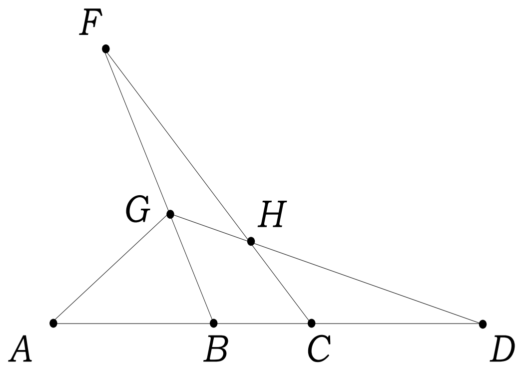


Figura 2.7: $A - B - D$ e $b - C - D$.

2.39 Teorema. *Entre dois pontos distintos , existe uma infinidade de pontos.*

Prova: Seja r uma reta e a e B dois pontos distintos desta reta. Entre A e B existe um ponto C, tal que $A - C - B$. Do mesmo modo, existe D tal que $A - D - C$. Assim, do lema anterior, segue-se que $A - D - B$, e consequentemente A, B, C, D são pontos distintos de r. De maneira análoga, pode-se afirmar que existe um ponto E em r, tal que $A - E - C$ e $A - E - B$, de forma que os pontos A, B, C, D, E são distintos e pertencentes À r. Continuando este mesmo raciocínio, podemos obter entre A e B um conjunto infinito de pontos C, D, E, ... Isto prova o teorema.

2.40 Observação. O teorema acima nos diz que qualquer segmento de reta é um conjunto infinito de pontos.

2.41 Corolário. *(a) Em uma semi-reta existe um conjunto infinito de pontos. (que não aquele de um segmento que tenha a origem como extremidade).*
(b) Em uma reta existe um conjunto infinito de pontos. (que não aquele de um segmento particular).

2.42 Observação. A representação usual para reta, semi-reta e segmento, que estamos habituados a fazer, não se justifica pelos axiomas e teoremas até aqui apresentados. A idéia de contínuo de pontos só será introduzida na geometria a partir dos axiomas sobre medidas (próximo capítulo).

2.43 Exercício. Mostre que:

a) Se $A - C - B$, então todos os pontos de $\overline{AC}$ pertencem a $\overline{AB}$. (Sugestão: use o lema 2.38)

b) Se $A - C - B$, então nenhum ponto interior de $\overline{AC}$ pode ser ponto de $\overline{CB}$. (Sugestão: Use redução ao absurdo, o lema 2.38 e o axioma 6)

c) Se $A - C - B$, então cada ponto de $\overline{AB}$, diferente de C, pertence ou a $\overline{AC}$ ou a $\overline{CB}$. (Sugestão: Suponha M pertencente à $\overline{AB}$ e $M \neq C$. Agora, considere M não pertencente à $\overline{AC}$, nem a $\overline{CB}$. Procure argumentar usando o lema 2.37 e a segunda afirmação do lema 2.38).

2.44 Definição. Um subconjunto do plano é **convexo** se o segmento que liga quaisquer dois de seus pontos está totalmente contido nele. Em símbolos: $F \subset \alpha$ é convexo se, e somente se, $\forall A, B \in F, AB \subset F$.

2.45 Exercício. Quanto a subconjuntos convexos, verifique:

a) A interseção de subconjuntos convexos é um subconjunto convexo.

b) Um semiplano é um subconjunto convexo.

c) A interseção de n semiplanos é um subconjunto convexo.

d) União de subconjuntos convexos é um subconjunto convexo?

e) Um triângulo é uma figura convexa?

f) Um triângulo determina dois conjuntos no plano, um dos quais é convexo. O conjunto convexo assim obtido, menos os pontos do triângulo é, por definição, o **interior do triângulo.**

2.3 Exercícios complementares

2.46 Exercício. Considere o conjunto $\pi = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, n ≥ 2 e os subconjuntos binários $r_{ij} = \{A_i, A_j\}, i, j = 1, 2, ..., n, i \neq j$. Chamemos A_i de pontos, r_{ij} de retas e π de plano**.**

a) Verifique que, nesta "geometria", vale o axioma 1.

b) Mostre que, nesta "geometria", vale o teorema 2.9.

2.47 Exercício. Considere um conjunto C de n ($n \geq 3$) pontos de um plano que tem um subconjunto C_1 formado por p ($2 \leq p \leq n$) pontos colineares. Sabe-se que toda vez que 3 pontos de C são colineares eles são pontos de C_1. Calcule o número de retas determinadas por esses n pontos (Sugestão: considere o conjunto formado por todos os pontos 3 a 3 colineares).

2.48 Exercício. Mostre que é impossível construir um modelo de uma "geometria" com 6, pontos, em que sejam válidos os axiomas 1 e 2 e em que todas as retas tenham exatamente 3 pontos.

2.49 Exercício. Mostre que, se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}, BC \subset \overrightarrow{AB}$ e $A \notin BC$ (sugestão: considere as várias possibilidades de C pertencer a $\overrightarrow{AB}$).

2.50 Exercício. Considere as afirmações:

i) Existem dois segmentos distintos que têm dois pontos em comum.

ii) Existem dois segmentos distintos que têm somente dois pontos em comum.

Diga quais dessas afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

Capítulo 3

Axiomas Sobre Medida de Segmentos e de Ângulos

Baseados nos axiomas de Incidência e da Ordem, definiu-se segmento e semi-reta. O conceito de medida de um segmento, ou a determinação de seu comprimento, que é introduzido, usualmente, mediante à adoção de uma unidade de comprimento, é aqui estabelecido através de axiomas. Introduz-se também o conceito de ângulo e sua medida

3.1 Axiomas sobre medida de segmentos

...dizem como medir segmentos; dão uma maneira de comparar segmentos.

Com os axiomas de incidência e de ordem, vistos nas seções anteriores, pudemos definir segmento de reta. Em geral, o conceito de medida de um segmento, ou a determinação de seu comprimento, é introduzido mediante a adoção de uma unidade de comprimento. Neste curso faremos axiomaticamente a introdução de tal medida, relacionando-a com a prática usual de adoção de uma unidade. A partir do momento em que soubermos como medir segmentos estaremos aptos à poder compará-los em tamanho e, daí, dizer se um segmento é maior, menor ou igual, em comprimento, a um outro.

Axioma 9 *Existe uma função d que a cada par (A, B) de pontos do plano, associa um número real $d\,(A, B)$ tal que:*
(i) $d\,(A, B) \geq 0, \forall A, B$, *e* $d\,(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
(ii) $d\,(A, B) = d\,(B, A)\,, \forall A, B$.

3.1 Definição. O número $d\,(A, B)$ é chamado **distância** entre os pontos A e B, ou **medida** do segmento $\overline{AB}$, ou ainda **comprimento** do segmento $\overline{AB}$.

3.2 Observação. Quase sempre indicaremos $d(A, B)$, escrevendo em seu lugar $\overline{AB}$.

O axioma seguinte estabelece uma correspondência entre números reais e pontos de uma reta.

Axioma 10 ***(Existência de Sistema de Coordenadas)*** *Para cada reta r do plano existe um bijeção $x : r \to \mathbb{R}$ que, a cada ponto $P \in r$, associa um número real $x(P)$ tal que para quaisquer dois pontos $A, B \in r$ tem-se $|x(A) - x(B)| = d(A, B)$.*

A bijeção x do axioma 10 é chamada **sistema de coordenadas** para r e o número real $x(P)$, associado ao ponto P, será chamado de **coordenada** de P em relação a r. O ponto de r associado ao número 0 é chamado de **origem** do sistema de coordenadas.

A origem de um sistema de coordenadas divide a reta r em duas semi-retas opostas. A semi-reta que contém o ponto associado ao número 1 chamaremos de **parte positiva** de r e, a outra, **parte negativa**.

O axioma seguinte estabelece que a medida de segmentos goza da propriedade de aditividade.

Axioma 11 *Se $A - C - B$ então $AC + CB = AB$.*

3.3 Observação. Agora que sabemos determinar a medida de um segmento a partir das coordenadas de suas extremidades, e lembrando que os números reais são ordenados pela relação "menor do que" (ou pela relação "maior do que"), vamos poder estabelecer uma relação de ordem para os pontos de uma reta.

Se $a < c < b$ (ou $b < c < a$), dizemos que o número c está entre a e b.

Como preâmbulo ao teorema 3.5, demonstraremos o seguinte lema:

3.4 Lema. *Se um ponto C, distinto de dois pontos A e B, pertence a $\overrightarrow{AB}$, e $\overline{AC}$ é tal que $AC < AB$ então C está entre A e B.*

Prova: Desde que A é a origem da semi-reta $S_{(AB)}$ e $B \in S_{(AB)}$, A não pode estar entre B e C. Se B estivesse entre A e C teríamos (axioma 11) $AB + BC = AC$ e, daí, $AB < AC$, contrário a hipótese $AC < AB$. Pelo axioma 3 temos então $A - C - B$. ■

A correspondência entre a relação de ordem de números reais e a relação de ordem de pontos de uma reta fica estabelecida no seguinte teorema:

3.5 Teorema. *Sejam $x(A), x(B), x(C)$ as respectivas coordenadas dos pontos A, B, C de uma mesma reta. O ponto C está entre A e B se, e somente se, o número $x(C)$ está entre $x(A)$ e $x(B)$.*

Prova: (Necessidade) Suponhamos que $A - C - B$. Decorre do Axioma 11 que $AC + CB = AB$, isto é:

$$|x(C) - x(A)| + |x(B) - x(C)| = |x(B) - x(A)|.$$

Inicialmente, vamos supor que $x(B) > x(A)$. Neste caso, temos

$$|x(B) - x(A)| = x(B) - x(A)$$

e, da igualdade anterior, segue que

$$|x(C) - x(A)| < x(B) - x(A) \text{ e } |x(B) - x(C)| < x(B) - x(A).$$

Assim:

$$-x(B) + x(A) < x(C) - x(A) < x(B) - x(A)$$

e

$$-x(B) + x(A) < x(B) - x(C) < x(B) - x(A).$$

Logo $x(C) < x(B)$ e $x(A) < x(C)$.

Assim, $x(A) < x(C) < x(B)$, isto é, $x(C)$ está entre $x(A)$ e $x(B)$.

Se $x(B) < x(A)$, um raciocínio análogo nos leva à mesma conclusão. Deste modo temos provada a condição necessária.

(Suficiência) Suponhamos que o número $x(C)$ está entre $x(A)$ e $x(B)$, isto é, $x(A) < x(C) < x(B)$. Temos então:

$$|x(C) - x(A)| + |x(B) - x(C)| = |x(B) - x(A)|,$$

e, em particular, $AC < AB$ e $CB < AB$.

Consideremos as semi-retas com origem em A; se B e C pertencem a uma mesma dessas semi-retas e sendo $AC < AB$, do lema 3.4, segue que C está entre A e B.

Resta mostrar que B e C não podem pertencer a semi-retas distintas, isto é, o ponto A não pode separar B e C. De fato, se isto acontecer então $B - A - C$ e daí $BA + AC = BC$, resultando $BA < BC$, o que contradiz a desigualdade $CB < AB$, já obtida acima. Logo, $A - C - B$. ∎

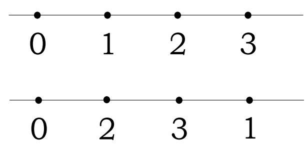


Figura 3.1: Ordem na representação dos números como pontos de uma reta.

O teorema acima justifica que a disposição dos números ao longo de uma reta, deve ser como no diagrama de cima da Figura (3.4), e não como no diagrama que aparece embaixo.

3.6 Exercício. Complete a demonstração do teorema 3.5 considerando o caso $x(B) < x(A)$.

3.7 Exercício. Dê uma caracterização para segmento e semi-reta, usando as coordenadas dos seus pontos.

3.8 Teorema. *Em qualquer segmento $\overline{AB}$ existe um único ponto C tal que $AC = CB$.*

Prova: (Existência) Dado o segmento $\overline{AB}$, aos pontos A e B estão associadas suas coordenadas $x(A)$ e $x(B)$ (axioma 10). Consideremos o número real $\frac{1}{2}\left(x(A) + x(B)\right)$. De acordo com o axioma 10, existe um ponto C da reta determinada por A e B tal que $x(C) = \frac{1}{2}\left(x(A) + x(B)\right)$. Como

$$\begin{aligned} AC = |x(A) - x(C)| &= \left| x(A) - \frac{1}{2}(x(A) + x(B)) \right| \\ &= \left| \frac{x(A)}{2} - \frac{x(B)}{2} \right| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} CB = |x(C) - x(B)| &= \left| \frac{1}{2}\left(x(A) + x(B)\right) - x(B) \right| \\ &= \left| \frac{x(A)}{2} - \frac{x(B)}{2} \right|, \end{aligned}$$

concluímos que $AC = CB$. Como o número $\frac{1}{2}\left(x(A) + x(B)\right)$ está entre $x(A)$ e $x(B)$ (mostre isto), pelo teorema 3.5 segue que o ponto C está entre A e B. Mostramos, assim, que existe um ponto que satisfaz as exigências do teorema.

(Unicidade) Suponhamos que, além do ponto C definido acima, exista um outro ponto, C', no segmento $\overline{AB}$, tal que $AC' = C'B$ e seja $x\left(C'\right)$ a coordenada desse ponto. Então $|x(C') - x(A)| = |x(B) - x(C')|$ e daí

$$x(C') - x(A) = x(B) - x(C') \text{ ou } x(C') - x(A) = x(C') - x(B).$$

A segunda possibilidade não pode ocorrer pois implicaria em $A = B$, o que é um absurdo. Logo

$$x(C') = \frac{1}{2}\left(x(A) + x(B)\right).$$

Assim, $x(C) = x(C')$ e, pelo axioma 10, concluímos que $C = C'$. Isto prova a unicidade.■

3.9 Definição. O ponto C do segmento AB, tal que $AC = CB$, é chamado **ponto médio** desse segmento.

3.10 Observação. O teorema 3.8 mostra que todo segmento tem um ponto médio e este é único.

3.11 Observação. A distância entre pontos satisfaz as seguintes propriedades:

i) $AB \geq 0$ para quaisquer pontos A e B;

ii) $AB = 0 \Leftrightarrow A = B$;

iii) $AB = BA$ para quaisquer pontos A e B.

Observe que a noção de distância satisfaz propriedades que são as intuitivamente esperadas. Uma outra propriedade, que se espera estar satisfeita, é a chamada **desigualdade triangular**, dada por:

iv) $AC \leq AB + BC$ para quaisquer três pontos A, B e C no plano. A igualdade vale se $C \in AB$.

Como veremos mais adiante (teorema 5.19), esta propriedade será uma conseqüência dos axiomas anteriores e do próximo grupo de axiomas a ser apresentado no capítulo 4.

Com a noção de distância entre pontos podemos definir circunferência. Seja A um ponto do plano e R um número real positivo.

3.12 Definição. Circunferência de centro A e raio R é o conjunto de pontos B do plano tais que AB=R. Notação: C(A,R)

Um ponto C do plano tal que $AC < R$ é dito **ponto interior** à C(A,R); neste caso, dizemos também que C **está dentro** da circunferência. Se $AC > R$, o ponto C é dito **exterior** à C(A,R); neste caso dizemos também que C **está fora** da circunferência. O conjunto de pontos interiores à circunferência é chamado **disco aberto** ou **bola aberta** de centro A e raio r; que será indicado por B(A,R).

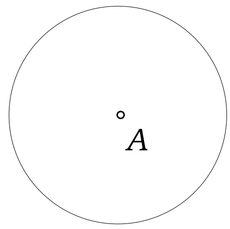


Figura 3.2: Circunferência de centro em A.

3.13 Exercício. Use notação da teoria de conjuntos para escrever, de modo sintético, os conceitos da definição acima.

3.14 Definição. Um subconjunto do plano é dito **limitado** se existe um disco aberto que o contém; caso contrário, é dito **ilimitado** (ou **não limitado**).

3.15 Exercício. Utilizando as definicões anteriores:

i) Prove que qualquer conjunto finito de pontos do plano é limitado.

ii) Prove que todo segmento é limitado.

iii) Prove que a união finita de subconjuntos limitados é ainda um conjunto limitado (observação: admita como verdadeira a desigualdade triangular).

iv) Prove que todo triângulo é limitado.

v) Prove que dados um subconjunto limitado M, no plano, e um ponto P desse plano, existe um disco aberto com centro em P e que contém M.

vi) Prove que retas são conjuntos ilimitados.

3.16 Exercício. Dizemos que o ponto C de um dado segmento $\overline{AB}$ é a **seção áurea** de $\overline{AB}$ se C é tal que $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Neste caso, dizemos também que C divide $\overline{AB}$ em **média e extrema razões**.

Mostre que se C é seção áurea de $\overline{AB}$, então $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ e que $AB = \frac{\sqrt{5}+1}{2}AC$ (o número $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é conhecido como **número áureo**). Mostre que todo segmento possui uma seção áurea.

3.2 Ângulo e Axiomas sobre medida de ângulos

... define-se ângulo e diz como medi-los; dá-se uma maneira de comparar ângulos.

3.17 Definição. **Ângulo** é uma figura formada pela união de duas semi-retas distintas que possuem a mesma origem e não estão contidas na mesma reta.

Ângulo raso é a união de duas semi-retas opostas. Semi-retas coincidentes definem um **ângulo nulo.**

As semi-retas são chamadas **lados** do ângulo e a origem comum é o **vértice** do ângulo.

3.18 Observação. Muitos são os modos para se representar um ângulo; assim, se O é o vértice e se A e B são pontos quaisquer distintos de O, um em cada lado do ângulo, este ângulo pode ser denotado por $A\widehat{O}B$ ou $B\widehat{O}A$, (Figura 3.3).

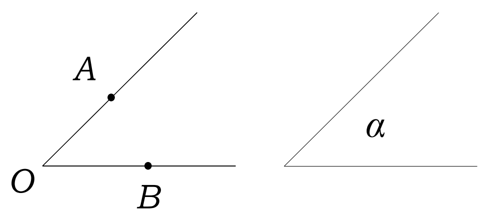


Figura 3.3: Ângulo $A\widehat{O}B$ ou $\widehat{O}$ e ângulo α.

Nesta notação, a letra que denomina o vértice deve sempre aparecer entre as outras duas. Caso nenhum outro ângulo tenha o mesmo vértice, podemos utilizar só a letra que designa o vértice para representar o ângulo. Assim, o ângulo representado na Figura 3.3 poderia ser denominado simplesmente por $\widehat{O}$. Em várias ocasiões é comum utilizar-se letras do alfabeto grego para representar um ângulo; neste caso, escreve-se, próximo do vértice e entre as duas semi-retas, a letra que designa o ângulo (Figura 3.3).

3.19 Observação. Dado um triângulo ABC, os ângulos $A\widehat{B}C, B\widehat{A}C$ e $A\widehat{C}B$ são ditos os **ângulos internos** do triângulo ABC.

De modo análogo àquele utilizado para se introduzir medida de segmento, a medida de um ângulo é feita através de alguns axiomas apropriados.

Axioma 12 *Existe uma função que a cada ângulo associa um número real positivo.*

3.20 Definição. O número associado a um ângulo, a que se refere o axioma 12, é chamado **medida** do ângulo.

3.21 Observação. Via de regras, representaremos um ângulo e sua medida pelo mesmo símbolo. Assim, os símbolos $A\widehat{O}B$ e α serão usados tanto para denotar um ângulo quanto a sua medida.

Sabemos que uma reta divide um plano em dois semiplanos (axioma 10). Tomemos um ponto O pertencente a uma reta r e uma semi-reta $\overrightarrow{OP}$, P contido no semiplano H determinado por r. Nessa situação dizemos que a **semi-reta divide o semiplano** H.

Fixemos então um número real positivo K.

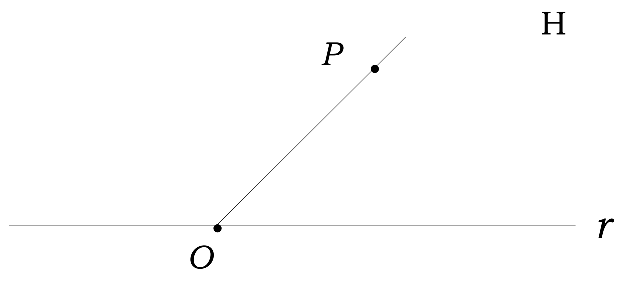


Figura 3.4: Semiplano H determinado por r.

Axioma 13 *Existe uma bijeção que a cada semi-reta* $\overrightarrow{OP}$ *que divide* H *associa um número real* $p \in]0, K[$. *Sendo a e b, respectivamente, os números associados as semi-retas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *que dividem* H, *a medida do ângulo* $A\widehat{O}B$ *é o número* $|a - b|$.

Axioma 14 *A uma das semi-retas de* r *com origem* O *está associado o número* 0 *e à semi-reta oposta a ela está associado o número K. A medida do ângulo nulo é zero e a medida do ângulo raso é K.*

3.22 Observação. No caso em que K = 180 temos o modo usual de medir ângulo, que é aquele onde usamos um transferidor. A medida de ângulos feita nesse sistema de coordenadas dá o resultado em **graus**. Falaremos em ângulo de x graus ou x° onde $0 \leq x \leq 180$. Quando K = 200 a medida é em **grado** e quando K = π a medida está dada em **radiano** . Daqui por diante, salvo menção em contrário, vamos assumir que os ângulos são medidos em graus.

3.23 Observação. Exibida uma correspondência caracterizada pelos Ax. 13 e 14, a cada semi-reta fica associado um número real entre 0 e K chamado **coordenada** da semi-reta.

3.24 Definição. Consideremos as semi-retas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$. Se o segmento $\overline{AB}$ intercepta $\overrightarrow{OC}$, dizemos que $\overrightarrow{OC}$ **divide o ângulo** $A\widehat{O}B$.

3.25 Exercício. Mostre que se $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $A\widehat{O}B$" é independente a escolha dos pontos A e B nas semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente.

O próximo axioma vai estabelecer a propriedade da aditividade, coisa que se espera de uma medida de ângulo. Para fazer isso, vamos considerar três semi-retas de mesma origem $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, tais que as duas últimas estejam contidas, propriamente, num dos semiplanos determinados pela reta que contém $\overrightarrow{OA}$.

Axioma 15 *Se uma semi-reta* $\overrightarrow{OC}$ *divide um ângulo* $A\widehat{O}B$*, então* $A\widehat{O}B = A\widehat{O}C + C\widehat{O}B$*, e reciprocamente.*

3.26 Exercício. Se a, b são as coordenadas dos lados do ângulo $A\widehat{O}B$, então a medida de $A\widehat{O}B$ é dada por $|a - b|$. (Resulta diretamente do Ax. 13).

3.27 Teorema. *Para qualquer ângulo* $A\widehat{O}B$*, existe uma única semi-reta* $\overrightarrow{OC}$ *que divide* $A\widehat{O}B$*, tal que* $A\widehat{O}C = C\widehat{O}B$*.*

Prova: Vide exercício 3.53.

3.28 Definição. A semi-reta $\overrightarrow{OC}$ do teorema acima, é chamada **bissetriz** do ângulo $A\widehat{O}B$.

3.29 Observação. O teorema 3.27 mostra que todo ângulo tem uma bissetriz e ela é única.

Vamos introduzir, baseados nos axiomas até agora fixados, algumas definições que estabelecerão terminologias úteis.

3.30 Definição. Dois ângulos são **consecutivos** se eles têm um lado em comum. Se os outros lados dos ângulos estão em semiplanos opostos, definidos pelo lado comum, esses ângulos são ditos **adjacentes**. (A Figura 3.5 ilustra a diferença entre ângulos consecutivos e adjacentes)

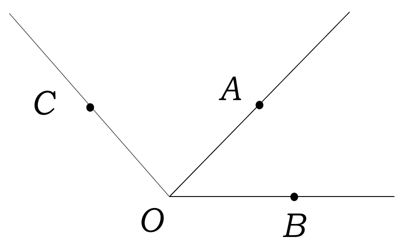


Figura 3.5: Os ângulos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ são consecutivos mas não são adjacentes.

Prolongar um lado de um ângulo significa tomar a semi-reta oposta a esse lado. A semi-reta assim obtida é dita ser o **prolongamento** do lado do ângulo. Dados dois ângulos, se a soma de suas medidas é 180° eles são ditos **suplementares**.

Se a soma das medidas de dois ângulos é 90° eles são ditos **complementares.** Dizemos que um ângulo é **complemento** de outro ângulo se eles forem adjacentes e complementares.

3.31 Definição. Um **suplemento** de um ângulo é um ângulo adjacente a esse ângulo, obtido pelo prolongamento de um de seus lados.

3.32 Exercício. Mostre que um ângulo e seu suplemento são ângulos suplementares.

3.33 Exercício. Mostre que se dois ângulos têm a mesma medida, o mesmo ocorre com os seus suplementos.

3.34 Definição. Ângulos **opostos pelo vértice** são aqueles que os lados de um são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro.

3.35 Teorema. *Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.*

3.36 Exercício. Prove o teorema anterior.

3.37 Definição. **Ângulo reto** é um ângulo cuja medida é 90°.

3.38 Definição. Se um ângulo mede menos que 90° ele é dito **agudo**, e é dito **obtuso** se mede mais de 90°.

3.39 Exercício. Mostre que o suplemento de um ângulo reto é também um ângulo reto.

3.40 Teorema. *Se duas retas são concorrentes e definem quatro ângulos tais que um deles é reto, então os outros três também são retos.*

3.41 Exercício. Prove o teorema anterior.

O teorema 3.40 motiva a seguinte definição:

3.42 Definição. Duas retas concorrentes são **perpendiculares** se um dos quatro ângulos que elas definem é reto.

3.43 Definição. Duas semi-retas de mesma origem são **perpendiculares** se cada uma delas está contida em retas perpendiculares.

O teorema seguinte dá uma caracterização de retas perpendiculares.

3.44 Teorema. *Duas retas concorrentes são perpendiculares se, e somente se, formam ângulos adjacentes suplementares de mesma medida.*

3.45 Exercício. Prove o teorema anterior.

Definimos quando duas retas são perpendiculares, mas, até agora, não exibimos uma situação mostrando que, de fato, nossa definição não é vazia de significado, isto é, ainda não mostramos que existem retas perpendiculares (falar de elefante cor-de-rosa não implica que exista elefante com essa cor).

Construção de retas perpendiculares.

Consideremos uma reta r e tomemos em r um ponto A (...podemos?). Esse ponto determina em r duas semi-retas que definem um ângulo raso. Além disso, a reta r determina dois semiplanos. Consideremos um desses semiplanos. Dentre todas as semi-retas com origem em A e contidas nesse semiplano, existe uma cuja coordenada é o número 90. Esta semi-reta forma com as semi-retas determinadas em r, pelo

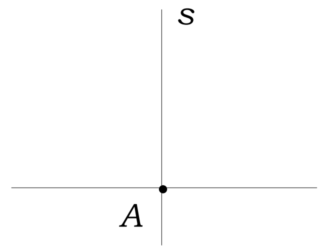


Figura 3.6: As retas r e s são perpendiculares.

ponto A, dois ângulos com medidas iguais a 90 (por que?). Logo, a semi-reta assim construída está contida numa reta s que contém o ponto A e é perpendicular à reta r dada. Assim, r e s são perpendiculares. Os argumentos acima provam que retas perpendiculares existem.

Unicidade de retas perpendiculares passando por um ponto.

Com um pouco mais de trabalho, podemos mostrar que a reta s passando por A e perpendicular à r é única.

De fato, suponhamos que s e s' são duas retas perpendiculares a r passando por A. As interseções de s e s' com um dos semiplanos são semi-retas, cujas coordenadas chamaremos de c e c', respectivamente.

Pelo axioma 13 segue que as semi-retas determinadas por A em r, têm coordenadas iguais a 0 e 180. Como r, s são perpendiculares e a medida do ângulo entre elas é dada por $|180 - c|$ ou por $|0 - c|$, segue que $|180 - c| = 90$ ou $|0 - c| = 90$. Analisemos o caso em que $|180 - c| = 90$. Como r, s' são perpendiculares e a medida do ângulo entre elas é dada por $|180 - c'|$ temos também que $|180 - c'| = 90$, logo, $|180 - c| = |180 - c'|$. Observe que os números c e c' pertencem ao intervalo $(0, 180)$, o que nos permite reescrever a última igualdade como $180 - c = 180 - c'$ e, então, $c = c'$.

Como a correspondência entre semi-retas que dividem um dado semiplano e números do intervalo $(0, 180)$ é uma função injetora, as semi-retas consideradas são coincidentes e, daí, s e s' coincidem.

Os resultados obtidos acima podem ser reunidos no seguinte teorema:

3.46 Teorema. *Dada uma reta, por qualquer um de seus pontos passa uma única reta perpendicular a ela.*

3.47 Definição. Dado um segmento $\overline{AB}$, a reta perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo seu ponto médio é chamada **mediatriz** do segmento $\overline{AB}$.

3.3 Exercícios complementares

3.48 Exercício. (Generalização do teorema 3.8) Em qualquer segmento $\overline{AB}$, mostre que existe um único ponto C entre A e B tal que $AC = kAB$, onde k é qualquer número real, $0 < k < 1$.

3.49 Exercício. Mostre que se A e B são dois pontos distintos e $k > 0$ é um número real, existe um único ponto $P \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AP = kAB$.

3.50 Exercício. a) Prove que dois ângulos que têm o mesmo complemento possuem a mesma medida.

b) Sabe-se que dois ângulos são complementares. Calcule a medida desses ângulos sabendo que o suplemento do maior é igual a 7 vezes o menor.

3.51 Exercício. Prove que se um ângulo e seu suplemento têm a mesma medida então ele é um ângulo reto.

3.52 Exercício. Mostre que:

a) O suplemento de um ângulo obtuso é sempre agudo.

b) O complemento de um ângulo agudo é sempre agudo. O suplemento de um ângulo agudo é sempre obtuso?

3.53 Exercício. Prove o teorema 3.27 (sugestão: faça uma demonstração análoga à do teorema 3.8).

3.54 Exercício. Prove que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semi-retas opostas.

3.55 Exercício. Prove que a bissetriz de um ângulo e a de um de seus suplementos são semi-retas perpendiculares entre si.

3.56 Exercício. Prove que se as bissetrizes de dois ângulos adjacentes são perpendiculares, então os ângulos são suplementares.

3.57 Exercício. Prove que as retas perpendiculares à bissetriz, com origem no vértice de um ângulo, formam ângulos de iguais medidas com os lados do ângulo dado.

3.58 Exercício. Considere o ângulo $A\widehat{O}B$ (não nulo e não raso). Seja $\gamma_{OA,B}$ o semiplano determinado pela reta $\overline{OA}$, que contém o ponto B, e $\gamma_{OB,A}$ o semiplano determinado pela reta $\overline{OB}$ e que contém o ponto A. Mostre que o conjunto $\gamma_{OA,B} \cap \gamma_{OB,A}$ é convexo. O conjunto $\gamma_{OA,B} \cap \gamma_{OB,A} - A\widehat{O}B$ é chamado **interior do ângulo** $A\widehat{O}B$ e será indicado por $intA\widehat{O}B$, e cada um de seus pontos é chamado **ponto interior** do ângulo $A\widehat{O}B$.

3.59 Exercício. Considere quatro semi-retas, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, de mesma origem, tais que $A\widehat{O}B = C\widehat{O}D, \overrightarrow{OB}$ está contida no interior de $A\widehat{O}C$ e $\overrightarrow{OC}$ está contida no interior de $B\widehat{O}D$. Mostre que $A\widehat{O}C = B\widehat{O}D$.

3.60 Exercício. Dado um ângulo $A\widehat{O}B$ e um número real positivo $k, 0 < k < 1$, mostre que existe uma única semi-reta $\overrightarrow{OC}$ tal que $C\widehat{O}B = k \cdot A\widehat{O}B$.

3.61 Exercício. Se traçarmos n semi-retas de mesma origem, $\overrightarrow{OA_i}, i = 1, 2, ..., n,\ n \geq 2$, quantos ângulos elas determinam?

3.62 Exercício. Pergunta-se: a que horas o ponteiro das horas de um relógio será a bissetriz do ângulo formado pelo ponteiro dos minutos e a posição dos mesmos, ao meio-dia.

Capítulo 4

Axiomas de Congruência

A partir das noções de medida de segmentos e de ângulos são introduzidos os conceitos de congruência de segmentos, ângulos e triângulos. São apresentados, também, teoremas que dão condições suficientes para a congruência de triângulos.

4.1 Axiomas sobre congruência de segmentos, ângulos e triângulos

... definem o conceito de congruência ou "igualdade" de segmentos de retas, triângulos. e ângulos.

4.1 Definição. Dois segmentos são **congruentes** se eles têm a mesma medida.

4.2 Definição. Dois ângulos são **congruentes** se eles têm a mesma medida.

4.3 Observação. Usamos o termo congruentes, e não iguais, para distinguir do termo "igual", que significa, matematicamente, o "mesmo objeto matemático".

Indicamos congruência entre segmentos (ângulos) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ ($\hat{A}$ e $\widehat{B}$) escrevendo $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ ($\hat{A} \equiv \widehat{B}$); assim, $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \Leftrightarrow AB = CD$ ($\hat{A} \equiv \widehat{B} \Leftrightarrow \hat{A} = \widehat{B}$). É fácil ver que a relação $\equiv$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) (reflexiva) $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$.
(ii) (simétrica) Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$.
(iii) (transitiva) Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

Assim, a relação de congruência entre segmentos é uma **relação de equivalência**.

4.4 Exercício. Mostrar que congruência entre ângulos também é uma relação de equivalência.

4.5 Definição. Dois triângulos ABC e XYZ são **congruentes** se existe uma aplicação bijetora

$$\varphi : \{A, B, C\} \to \{X, Y, Z\}$$

com a seguinte propriedade: se $X = \varphi(A), Y = \varphi(B)$ e $Z = \varphi(C)$ então

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A} \equiv \widehat{X}, & \widehat{B} \equiv \widehat{Y}, & \widehat{C} \equiv \widehat{Z}, \\ \overline{AB} \equiv \overline{XY}, & \overline{AC} \equiv \overline{XZ}, & \overline{BC} \equiv \overline{YZ}. \end{array}$$

A aplicação φ é chamada de **congruência**.

Os vértices A e X, B e Y, C e Z são ditos **correspondentes**. **Ângulos correspondentes** são aqueles cujos vértices são correspondentes, e **lados correspondentes** são os lados cujas extremidades são vértices correspondentes.

Se os triângulos ABC e XYZ são congruentes, escrevemos $ABC \equiv XYZ$, significando que a congruência leva A em X, B em Y e C em Z.

4.6 Exercício. Mostre que a relação de congruência entre dois triângulos é uma relação de equivalência.

O axioma seguinte estabelece a existência de triângulos congruentes.

Axioma 16 *Sejam ABC um triângulo e r' uma semi-reta. Existe um triângulo A'B'C', congruente ao triângulo ABC, tal que A' coincide com a origem de r', o vértice B' pertence a r' e C' é um ponto contido num dos semiplanos definidos pela reta r que contém r'.*

O lema seguinte nos fala sobre a existência de segmentos congruentes.

4.7 Lema. ***(Transporte de segmentos)*** *Sejam $\overline{AB}$ um segmento e r' uma semi-reta. Existe um único segmento $\overline{A'B'}$ contido em r' onde A' coincide com a origem de r' e tal que $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$.*

Prova: **(Existência)** Tome um ponto C que não pertence à reta $\overline{AB}$ (tal ponto existe?) determinando o $\triangle ABC$. Pelo axioma 16, existe um triângulo $A'B'C'$, congruente ao triângulo ABC, tal que A' coincide com a origem de r', o vértice B' pertence à r' e C' é um ponto num dos semiplanos definidos pela reta r que contém r'. Pela definição de congruência de triângulos, $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$.

(Unicidade) Suponhamos que, além do ponto B' obtido acima, tal que $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$, possamos marcar outro ponto B'' pertencente a $r', B'' \neq B'$, tal que $\overline{A'B''} \equiv \overline{AB}$. Dos três pontos A', B', B'', um deve estar entre os outros dois; ele não pode ser A', pois B' e B'' não são separados pela origem da semi-reta. Se é B' que está entre A' e B'', então $A'B'' = A'B' + B'B''$, e daí $B'B'' = 0$ o que é impossível, pois $B'' \neq B'$. Assim, B' não está entre A' e B''. Conclusão análoga obteremos supondo que B'' está entre A' e B'. Isto é uma contradição; logo, $B' = B''$ e, daí, temos concluída a prova da unicidade. ■

O lema seguinte nos fala sobre a existência de ângulos congruentes.

4.8 Lema. ***(Transporte de ângulos)*** *Sejam $A\widehat{O}B$ um ângulo e r' uma semi-reta. Existe um único ângulo $A'\widehat{O'}B'$, em que o vértice O' coincide com a origem de r', um lado coincide com r' e $A'\widehat{O'}B' \equiv A\widehat{O}B$.*

4.9 Exercício. Demonstre o lema 4.8 (sugestão: considere o triângulo AOB e use o axioma 16; não esqueça que este também é um resultado que envolve existência e unicidade).

Axioma 17 *Se dois triângulos ABC e XYZ são tais que $\overline{AB} \equiv \overline{XY}$, $\widehat{A} \equiv \widehat{X}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{XZ}$, então $ABC \equiv XYZ$.*

O axioma acima é conhecido como **Primeiro Caso de Congruência de Triângulos** ou simplesmente, **caso LAL**.

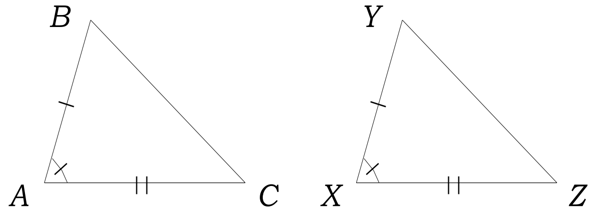


Figura 4.1: O Caso LAL de congruência de triângulos.

4.10 Observação. Pela definição 4.5, para verificarmos a congruência de dois triângulos temos que verificar seis relações: congruência dos três pares de lados correspondentes e congruência dos três pares de ângulos correspondentes. No entanto, o axioma 17 afirma que é suficiente verificar apenas três delas, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{XY} \\ \overline{AC} \equiv \overline{XZ} \\ \hat{A} \equiv \widehat{X} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{XY}, \overline{AC} \equiv \overline{XZ}, \overline{BC} \equiv \overline{YZ} \text{ e} \\ \hat{A} \equiv \widehat{X}, \widehat{B} \equiv \widehat{Y}, \widehat{C} \equiv \widehat{Z}. \end{array}\right.$$

Os resultados que seguem são conseqüências diretas, ou indiretas, do axioma 17.

4.11 Teorema. ***(Segundo Caso de Congruência de Triângulos ou caso ALA)*** *Dois triângulos ABC e XYZ são congruentes se $\overline{AB} \equiv \overline{XY}$, $\widehat{A} \equiv \widehat{X}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{Y}$.*

Prova: Sejam ABC e XYZ triângulos tais que $AB \equiv XY, \hat{A} \equiv \widehat{X}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{Y}$. Seja D um ponto da semi-reta $\overline{AC}$ tal que $\overline{AD} \equiv \overline{XZ}$ (existe este ponto?). Consideremos o triângulo ABD e comparemo-lo com o triângulo XYZ. Uma vez que $\overline{AD} \equiv \overline{XZ}, \overline{AB} \equiv \overline{XY}$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{X}$, pelo axioma 17 segue que $ABD \equiv XYZ$. Concluímos daí que $A\widehat{B}D \equiv \widehat{Y}$. Logo $A\widehat{B}D \equiv A\widehat{B}C$.

Decorre daí que as semi-retas $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{BC}$ coincidem. Logo, pelo teorema 2.9, os pontos C e D coincidem, e então os triângulos ABC e ABD também coincidem e, portanto, $ABC \equiv ABD$. Como $ABD \equiv XYZ$, pela transitividade da relação $\equiv$ segue que $ABC \equiv XYZ$. ∎

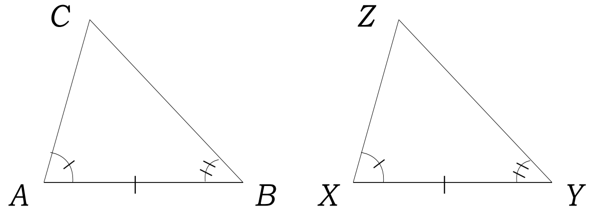


Figura 4.2: O Caso ALA de congruência de triângulos.

A seguir, definimos alguns conceitos que serão úteis para fixar linguagem sobre triângulos.

4.12 Definição. **(a)** Um triângulo que tem dois lados congruentes é dito **isósceles.** O vértice comum a esses dois lados é chamado **vértice do triângulo isóceles**, os lados congruentes são chamados **laterais** e o terceiro lado é chamado **base.** Os ângulos adjacentes à base são chamados **ângulos da base.**

(b) Um triângulo que tem os três lados congruentes é chamado **equilátero.**

(c) Um triângulo que tem um ângulo reto é chamado **retângulo**. Os lados que definem o ângulo reto são chamados **catetos** e o terceiro lado é chamado **hipotenusa** do triângulo.

Seja ABC um triângulo e D um ponto da reta determinada por B e C.

4.13 Definição. **(a)** Se D for o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, o segmento $\overline{AD}$ é chamado **mediana** do $\triangle ABC$ relativamente ao lado $\overline{BC}$ (ao vértice A).

(b) Se D é tal que $S_{(AD)}$ divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos congruentes, isto é, $C\hat{A}D \equiv D\hat{A}B$, dizemos que $\overline{AD}$ é **bissetriz** do ângulo $\widehat{A}$.

(c) Se D é tal que a reta determinada por A e D é perpendicular à reta determinada por B e C, dizemos que $\overline{AD}$ é **altura** do $\triangle ABC$ relativamente ao lado $\overline{BC}$ (ou ao vértice A).

4.14 Observação. A existência da altura de um triângulo será garantida no próximo capítulo.

4.15 Exercício. Mostre que nas definições 4.12 e 4.13, os objetos ali apresentados estão bem definidos.

4.16 Teorema. *Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*

Prova: Seja ABC um triângulo isósceles em que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. Queremos provar que $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$. Para isso vamos comparar o triângulo ABC com ele mesmo, definindo a seguinte lei de correspondência:

$$\varphi : \{A, B, C\} \to \{A, B, C\}$$

tal que

$$\varphi(A) = A, \;\; \varphi(B) = C \text{ e } \varphi(C) = B.$$

Por hipótese $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$. Como $\widehat{A} \equiv \widehat{A}$, segue, pelo axioma 17, que esta correspondência define uma congruência, isto é, $ABC \equiv ACB$. Logo, $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$. ∎

4.17 Teorema. *Se um triângulo tem dois ângulos congruentes, então ele é isósceles.*

4.18 Exercício. Prove o teorema 4.17.

4.19 Exercício. Prove que em qualquer triângulo isósceles a mediana relativamente à base também é altura e bissetriz.

4.20 Teorema. ***(Terceiro Caso de Congruência de Triângulos ou caso LLL)*** *Dois triângulos são congruentes se eles têm os lados correspondentes congruentes.*

Prova: Sejam ABC e XYZ dois triângulos tais que $\overline{AB} \equiv \overline{XY}, \overline{AC} \equiv \overline{XZ}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{YZ}$. Mostremos que $ABC \equiv XYZ$. Consideremos a semi-reta $S_{(AB)}$ e escolhamos o semiplano definido pela reta determinada por A e B e oposto àquele que contém o vértice C. Construamos um ângulo com vértice A, congruente ao ângulo $\widehat{X}$, tendo por lados $S_{(AB)}$ e uma semi-reta r' contida no semiplano escolhido acima. A partir de A, marquemos em r' um ponto D tal que $AD \equiv XZ$ (certifique-se de que tudo isso é possível de ser construído!).

Como $\overline{AB} \equiv \overline{XY}$ (por hipótese), $\overline{AD} \equiv \overline{XZ}$ (por construção) e $D\widehat{A}B \equiv \widehat{X}$ (por construção), temos que $ADB \equiv XZY$. Consideremos o segmento $\overline{CD}$; como $\overline{AD} \equiv \overline{XZ} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{DB} \equiv \overline{ZY} \equiv \overline{CB}$, os triângulos ADC e DBC são isósceles. Segue, daí, que $A\widehat{D}B \equiv A\widehat{C}B$. Pelo axioma 17, temos que $ADB \equiv ACB$. Mas havíamos provado que $ADB \equiv XZY$ logo $ACB \equiv XZY$ ou $ABC \equiv XYZ$. ∎

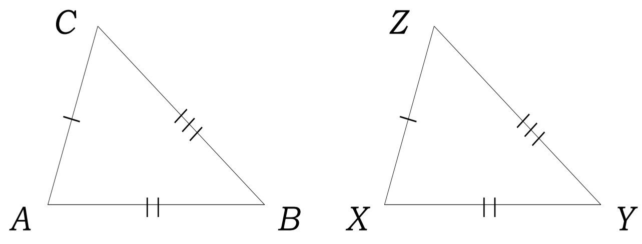


Figura 4.3: O Caso LLL de congruência de triângulos.

4.21 Exercício. Enuncie os casos de congruência de triângulos utilizando-se somente de palavras. (Sem uso de notações simbólicas).

4.2 Exercícios complementares

4.22 Exercício. Estude a possibilidade de construir um triângulo isósceles cujos lados medem a e b sendo $a > b$.

4.23 Exercício. Prove que em qualquer triângulo isósceles as bissetrizes dos ângulos da base são congruentes.

4.24 Exercício. Prove que em qualquer triângulo equilátero as três bissetrizes são congruentes.

4.25 Exercício. Prove que em qualquer triângulo isósceles as medianas relativamente, aos ângulos da base, são congruentes.

4.26 Exercício. Prove que em qualquer triângulo equilátero as três medianas são congruentes.

4.27 Exercício. Prove que em dois triângulos congruentes as bissetrizes dos ângulos respectivamente congruentes são congruentes.

4.28 Exercício. Prove que em dois triângulos congruentes as medianas relativas a lados respectivamente congruentes são congruentes.

4.29 Exercício. Detalhe o procedimento que você utilizaria para construir um triângulo congruente a um triângulo dado.

4.30 Exercício. Prove que todo triângulo, no qual uma altura e uma bissetriz são coincidentes, é isósceles.

4.31 Exercício. Prove que todo triângulo, no qual uma altura e uma mediana são coincidentes, é isósceles.

4.32 Exercício. Prove que todo triângulo equilátero tem os três ângulos congruentes, e reciprocamente.

4.33 Exercício. São dados dois ângulos adjacentes congruentes: $X\widehat{O}Y$ e $Y\widehat{O}Z$. Traçam-se suas respectivas bissetrizes $\overline{OM}, \overline{ON}$ e marcam-se sobre as semi-retas $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{ON}$ $\overrightarrow{OZ}$, respectivamente, os segmentos congruentes $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \equiv \overline{OD} \equiv \overline{OE}$. Encontre a relação entre os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DE}$. Compare os ângulos $B\widehat{A}C$ e $D\widehat{C}E$.

4.34 Exercício. Duas estradas retilíneas ligam uma cidade A a duas cidades B e C, conforme indicado na figura 4.4. Indique uma estratégia que permita você determinar a distância entre as cidades B e C, sabendo que entre B e C existe um morro (qualquer medição que não seja através do morro é possível).

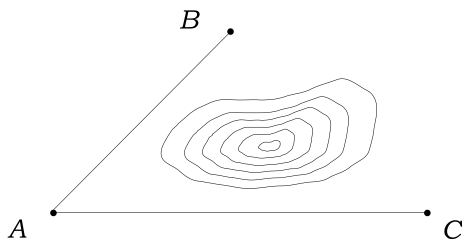


Figura 4.4: Exercício 4.34

4.35 Exercício. Na figura 4.5, os triângulos ABC e ABD são isósceles com base comum $\overline{AB}$. Prove que os ângulos $C\widehat{A}D$ e $C\widehat{B}D$ são congruentes e que $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $A\widehat{C}B$.

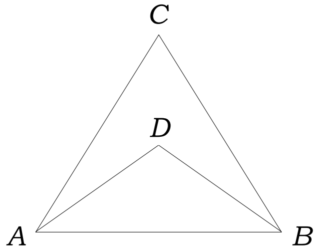


Figura 4.5: Exercício 4.35.

4.36 Exercício. Na figura 4.5, o ângulo $C\widehat{M}A$ é reto e M é ponto médio de $\overline{AB}$.Prove que $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$.

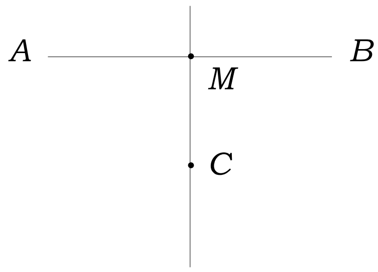


Figura 4.6: Exercícios 4.36.

Capítulo 5

Desigualdades nos Triângulos

Estabelece-se, usando o teorema do ângulo externo, a existência de retas paralelas, a existência e unicidade da perpendicular a uma reta dada passando por um ponto não pertencente a essa reta, e uma condição necessária para que três números positivos possam ser comprimentos de lados de um triângulo.

5.1 O teorema do ângulo externo e algumas de suas conseqüências

5.1 Definição. Os suplementos dos ângulos internos de um triângulo são chamados **ângulos externos** do triângulo.

5.2 Teorema. ***(Teorema do Ângulo Externo)*** *Um ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Prova: Seja ABC um triângulo qualquer. Na semi-reta $\overrightarrow{AB}$, marquemos um ponto D tal que B esteja entre A e D. O teorema estará provado se mostrarmos que $C\widehat{B}D > \widehat{C}$ e $C\widehat{B}D > \widehat{A}$. Mostremos, inicialmente, que $C\widehat{B}D > \widehat{C}$.

Para isso, consideremos o ponto médio M do segmento BC. Na semi-reta $S_{(AM)}$ marquemos um ponto N tal que $A - M - N$ e $AM = MN$. Ficam, assim, definidos os triângulos CMA e BMN.

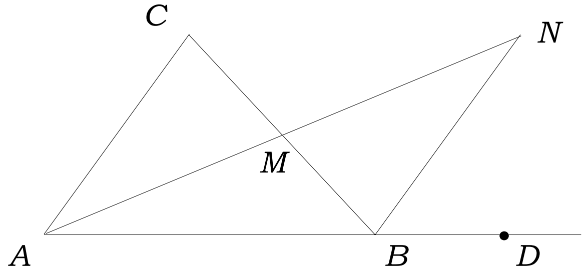


Figura 5.1: O Teorema do Ângulo Externo.

Como $CM = BM, AM = MN$ e $A\widehat{M}C = B\widehat{M}N$ (por quê?), segue que os triângulos CMA e BMN são congruentes. Logo, $\widehat{C} = M\widehat{B}N$. Como a semi-reta $\overrightarrow{BN}$ divide o ângulo $C\widehat{B}D$ então $M\widehat{B}N < C\widehat{B}D$ e, daí, $\widehat{C} < C\widehat{B}D$. De modo análogo, o leitor pode provar que $C\widehat{B}D > \widehat{A}$. ■

5.3 Exercício. Complete a demonstração do teorema anterior.

5.4 Corolário. *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que* $180°$.

Prova: Seja ABC um triângulo qualquer; mostremos que $\hat{A} + \widehat{B} < 180°$. Chamemos de θ a medida do ângulo externo deste triângulo com vértice em B. Pelo teorema 5.2 temos que $\hat{A} < \theta$. Como θ e $\widehat{B}$ são suplementares, temos que $\theta + \widehat{B} = 180°$. Logo $\hat{A} + \widehat{B} < \theta + \widehat{B} = 180°$. ■

5.5 Corolário. *Em todo triângulo existem pelo menos dois ângulos internos agudos.*

Prova: Suponhamos que um triângulo possuísse dois ângulos internos não agudos. Neste caso a soma deles seria maior ou igual a $180°$, o que não pode ocorrer devido ao teorema 5.4. Logo, vale o corolário. ■

5.6 Definição. Duas retas que não se interceptam são ditas **paralelas**.

5.7 Corolário. *Se r e s são retas distintas e perpendiculares a uma terceira, então r e s são paralelas.*

Prova: Se r e s se interceptassem, teríamos definido um triângulo com dois ângulos retos, o que é um absurdo devido ao corolário 5.5. ■

5.8 Teorema. ***(Quarto Caso de Congruência de Triângulos ou caso LAA°)*** *Dois triângulos ABC e XYZ são congruentes se $\overline{AB} \equiv \overline{XY}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{Y}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{Z}$.*

5.9 Observação. O símbolo $A°$ do teorema anterior representa o ângulo oposto ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC.

5.10 Exercício. Prove o teorema anterior.

5.11 Exercício. Mostre que existem retas paralelas (sugestão: use o teorema 3.46).

O teorema seguinte nos fornecerá um outro método para construírmos retas perpendiculares. Como consequência do corolário 5.7, podemos usar este método para construir retas paralelas.

5.12 Teorema. *Por um ponto não pertencente a uma reta passa uma única reta perpendicular à essa reta.*

Prova: (Existência) Seja r uma reta e P um ponto não pertencente à r. Tomemos em r um ponto A, qualquer. Consideremos o segmento $\overline{AP}$; se $\overline{AP}$ já é perpendicular à r, acabamos de construir a reta procurada, a saber, aquela determinada por A e P.

Caso contrário, observemos que A divide a reta r em duas semi-retas, r' e r". A semi-reta $S_{(AP)}$ define, com uma dessas semi-retas, um ângulo agudo com vértice em A. Suponhamos que r' seja essa semi-reta e chamemos esse ângulo de $P\widehat{A}r'$.

Consideremos, agora, o semiplano definido pela reta r e que não contém P; nesse semiplano construamos uma semi-reta s' com origem A e que defina com r' um ângulo congruente a $P\widehat{A}r'$. Sobre essa semi-reta tomemos um ponto P' tal que $AP = AP'$.

Mostremos que o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular à r. De fato, uma vez que P e P' são pontos pertencentes a semiplanos distintos determinados por r, temos que PP' intercepta r num único ponto M.

Ficam assim definidos dois triângulos, PAM e $P'AM$. Desde que $AP = AP', P\widehat{A}M = P'\widehat{A}M$ e $AM = AM$, os triângulos PAM e $P'AM$ são congruentes, e daí, $P\widehat{M}A = P'\widehat{M}A$. Isso implica que PP' é perpendicular à r (vide teorema 3.44) e daí, a reta s determinada por P e P' é perpendicular à r. Acabamos de provar a existência.

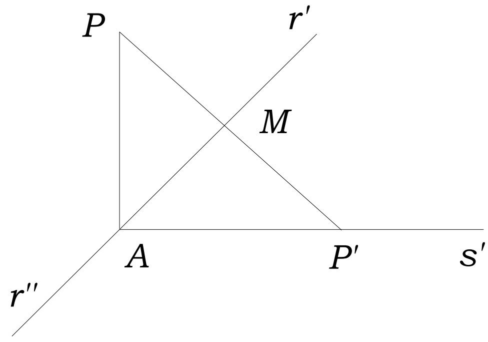


Figura 5.2: Teorema 5.12.

(Unicidade) Além de s, suponhamos que exista outra reta, t, que passa por P e é perpendicular à r. Neste caso, teríamos um triângulo com dois ângulos retos, o que é um absurdo de acordo com o corolário 5.5. Logo, a reta passando por P e perpendicular à r é única. ■

5.13 Definição. (a) O ponto M no teorema 5.12 é chamado de **pé da perpendicular** baixada do ponto P a reta r.

(b) Se N é qualquer outro ponto de r, distinto de M, dizemos que o segmento $\overline{PN}$ é **oblíquo** em relação a r.

(c) O segmento $\overline{MN}$ é chamado de **projeção** de $\overline{PN}$ sobre a reta r.

(d) O número PM é chamado de **distância** do ponto P a reta r.

5.14 Observação. Na definição 4.13, definiu-se altura de um triângulo, mas nada garantia sua existência; esta é agora garantida pelo teorema 5.12.

5.2 Desigualdades nos triângulos

5.15 Teorema. *Se num triângulo, dois de seus lados não são congruentes, então os ângulos que se opõem a esses lados não têm mesma medida e ao maior lado opõe-se o maior ângulo.*

Prova: Suponhamos que no triângulo considerado os ângulos que se opõem aos dois lados não congruentes tenham mesma medida; pelo teorema 4.17, resulta que esse triângulo é isósceles, o que é um absurdo. Logo, vale a primeira acertiva do teorema.

Mostremos agora que ao maior lado opõe-se o maior ângulo. Para isso, consideremos um triângulo ABC tal que $AB > BC$; mostremos que $A\widehat{C}B > B\widehat{A}C$. Sobre a semi-reta $S_{(BA)}$, a partir de B, marquemos um ponto X tal que $BC = BX$. Pelo lema 3.4, como

$BC < AB$, o ponto X pertence ao segmento $\overline{AB}$, e daí, a semi-reta $\overrightarrow{CX}$ divide o ângulo $A\widehat{C}B$. Logo, tem-se

$$A\widehat{C}B > B\widehat{C}X. \tag{5.1}$$

No entanto, observemos que

$$B\widehat{C}X = C\widehat{X}B > X\widehat{A}C = B\widehat{A}C, \tag{5.2}$$

uma vez que o triângulo BCX é isósceles, e a desigualdade ocorre, uma vez que $C\widehat{X}B$ é ângulo externo do triângulo CAX. Logo, de (5.1) e (5.2), temos que $A\widehat{C}B > B\hat{A}C$. ■

5.16 Corolário. *Se num triângulo, dois de seus ângulos não são congruentes, então os lados que se opõem a esses ângulos não têm a mesma medida e ao maior ângulo opõe-se o maior lado.*

5.17 Exercício. Prove o corolário anterior (sugestão: a primeira parte deste corolário segue diretamente do teorema 4.17; a prova da segunda parte é uma aplicação "esperta" do teorema 5.15).

5.18 Teorema. *Em qualquer triângulo, o comprimento de um lado é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois.*

Prova: Consideremos um triângulo qualquer ABC; mostremos que $AC < AB + BC$.

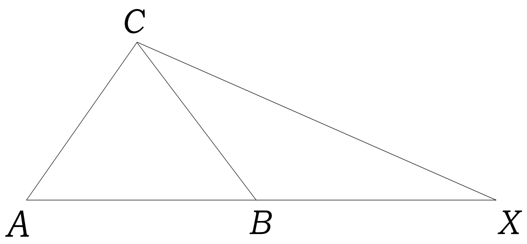


Figura 5.3: Teorema 5.18.

Para tanto, na semi-reta $S_{(AB)}$, tomemos um ponto X de tal modo que B está entre A e X, e que $BX = BC$. Assim, o triângulo CBX é isósceles com vértice B e $AX = AB + BC$. Logo, temos $B\widehat{C}X = B\widehat{X}C$. Como B está entre A e X temos que $B\widehat{X}C = B\widehat{C}X < A\widehat{C}X$. Logo, pelo corolário 5.16, segue-se que $AC < AX$, e daí $AC < AB + BC$. ■

5.19 Teorema. ***(Desigualdade triangular)*** *Para quaisquer três pontos distintos A, B, C (colineares ou não) tem-se $AB \leq AC + CB$. A igualdade vale se, e somente se, $A - C - B$.*

5.20 Exercício. Prove o teorema anterior.

5.21 Observação. Para podermos construir um triângulo cujos lados têm comprimentos dados, tais comprimentos devem, necessariamente, satisfazer à desigualdade triangular. Assim, é impossível construir um triângulo cujos lados medem 4, 5 e 11.

5.22 Teorema. *Em qualquer triângulo, o comprimento de um lado é maior do que a diferença dos comprimentos dos outros dois.*

5.23 Exercício. Prove o teorema anterior.

5.3 Exercícios complementares

5.24 Exercício. A soma dos comprimentos dos lados de um triângulo é seu **perímetro**, e a metade do perímetro é o **semiperímetro**. Mostre que o comprimento de qualquer lado de um triângulo é menor do que seu semiperímetro.

5.25 Exercício. Justifique as seguintes afirmações relativas a triângulos retângulos:

a) os ângulos opostos aos catetos são agudos;

b) o comprimento da hipotenusa é maior do que o comprimento de qualquer cateto;

c) o comprimento da hipotenusa é menor do que a soma dos comprimentos dos catetos.

d) Se dois triângulos retângulos são congruentes, os ângulos retos devem se corresponder;

e) (**Congruência de triângulos retângulos**) Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são $\widehat{A}$ e $\widehat{A'}$, respectivamente. Mostre que

i) se $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ então os triângulos são congruentes,

ii) se $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$ e $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$ então os triângulos são congruentes,

iii) se $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ então os triângulos são congruentes.

5.26 Exercício. O exercício 5.25-e-(ii) caracteriza um caso (LLA) de congruência de triângulos retângulos. Mostre que esse não é um caso de congruência para triângulos não-retângulos.

5.27 Exercício. Mostre que o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de dois pontos A, B, é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ (a expressão "lugar geométrico dos pontos" significa "conjunto dos pontos").

5.28 Exercício. Mostre que o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes das semi-retas $S_{(OA)}$ e $S_{(OB)}$ é a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.

5.29 Exercício. Prove que em qualquer triângulo isósceles as alturas relativas aos lados congruentes são congruentes.

5.30 Exercício. Prove que um triângulo que possui duas alturas congruentes é isósceles.

5.31 Exercício. Prove que um triângulo equilátero tem as três alturas congruentes.

5.32 Exercício. Prove que em triângulos congruentes as alturas relativas a lados respectivamente congruentes são congruentes.

5.33 Exercício. Mostre que, num triângulo retângulo cujos ângulos agudos medem 30° e 60°, o menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa, e reciprocamente.

5.34 Exercício. Prove que triângulos que têm dois ângulos externos congruentes são isósceles.

5.35 Exercício. Prove que todo triângulo retângulo tem dois ângulos externos obtusos.

5.36 Exercício. Com relação à definição 5.13, mostre que $PN > PM$ e $PN > NM$.

5.37 Exercício. Mostre que o ponto P' obtido na demonstração do teorema 5.12, independe do ponto A escolhido sobre a reta r.

5.38 Exercício. Na construção feita no teorema 5.12, o ponto P', obtido a partir do ponto P e da reta r, é chamado de **reflexo** do ponto P relativamente à reta r (ou imagem de P relativamente à reta r). Mostre que P' é o reflexo de P relativamente à reta r se, e somente se, $\overline{PP'}$ é perpendicular à r e r intercepta $\overline{PP'}$ no seu ponto médio.

5.39 Exercício. Se $P \in r$, por definição, $P' = P$. Seja r uma reta fixada no plano; designemos por φ_r a função que a cada ponto do plano associa o seu reflexo relativamente à reta r. Esta função é chamada **reflexão.** Prove que a função reflexão goza das seguintes propriedades:

i) para todo ponto P do plano, $\varphi_r(\varphi_r(P)) = P$;

ii) φ_r é uma isometria, isto é, ela preserva distância entre pontos do plano. Assim, para quaisquer pontos P e Q do plano, tem-se:

$$\varphi_r(P)\varphi_r(Q) = PQ;$$

iii) se $P \in r$ e $Q \notin r$ e $Q' = \varphi_r(Q)$ então r é a bissetriz do ângulo $Q\widehat{P}Q'$.

5.40 Exercício. Mostre que é possível, utilizando somente uma régua não graduada e um compasso, construir um triângulo cujos lados são segmentos (dados) com comprimentos a, b, c tais que $c < a + b$, sendo c o maior lado do triângulo.

5.41 Exercício. Dados dois pontos, A e B, não pertencentes a uma reta r, mostre que existe um ponto X sobre r tal que $AX + XB$ é mínimo. Considere os dois casos: a) A e B estão em semiplanos distintos relativamente a r; b) A e B estão em um mesmo semiplano relativamente a r.

5.42 Exercício. Na figura 5.4 (pág.7), $\alpha = \beta$; mostre que as retas r e s são paralelas.

5.43 Exercício. Use o exercício 5.42 para construir duas retas paralelas.

5.44 Exercício. Na figura 5.5 (pág.7), r e s são retas perpendiculares e P, Q são pontos dados. Determine o caminho mais curto para se ir do ponto P ao ponto Q tocando-se uma única vez em cada reta.

5.45 Exercício. Na figura 5.6 (pág.7), se ABC é equilátero e $AD = BE = CF$, mostre que o triângulo EDF é equilátero.

5.46 Exercício. Prove que em qualquer triângulo, a soma dos comprimentos das medianas está compreendida entre o perímetro e o semiperímetro.

5.47 Exercício. Se ABC é um triângulo e P um ponto de seu interior, mostre que vale a relação: $PA + PB¡CA + CB$.

5.48 Exercício. Se ABC é um triângulo e P um ponto de seu interior, mostre que a soma das distâncias de P aos três vértices está compreendida entre o perímetro e o semiperímetro do referido triângulo.

5.49 Exercício. Mostre que, dados uma reta e um ponto não pertencente a ela, dentre todos os segmentos com uma extremidade neste ponto e outra num ponto da reta, o de menor comprimento é aquele que é perpendicular à reta dada.

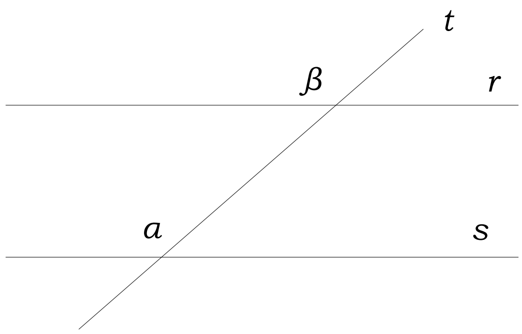


Figura 5.4: t transversal as retas r e s.

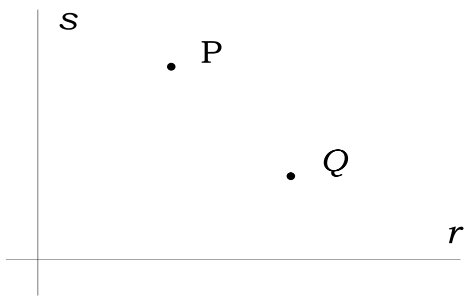


Figura 5.5: $r \perp s$

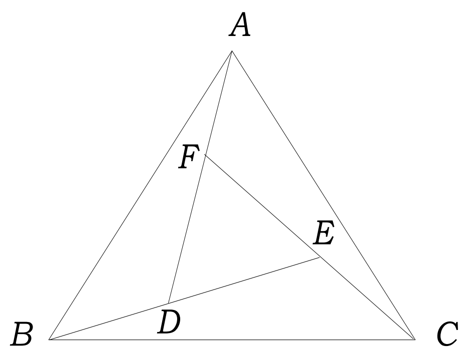


Figura 5.6: Exercício 5.45

Capítulo 6

Axioma das Paralelas

O corolário 5.7 acena para a possibilidade de existirem retas paralelas; os teoremas 3.46 e 5.12 dão meios de construir retas paralelas e, daí, permitir afirmar que elas existem. O axioma seguinte afirma a unicidade de reta passando por um ponto e paralela a uma reta dada.

6.1 O axioma das paralelas e algumas consequências

Axioma 18 *Por um ponto não pertencente a uma reta r passa uma única reta paralela à r.*

Deste axioma decorre que o paralelismo de retas goza da propriedade transitiva, como mostra o teorema seguinte.

6.1 Teorema. *Sejam r, s, w retas duas a duas distintas. Se r é paralela à s e s é paralela à w, então r é paralela a w.*

Prova: Se r e w não fossem paralelas, elas seriam concorrentes num ponto P (teorema 2.9); desse modo teríamos duas retas passando por um ponto e paralelas a s, o que contradiz o axioma 18. Assim, r e w são paralelas. ■

6.2 Teorema. *Se uma reta intercepta uma de duas retas paralelas, então ela também intercepta a outra.*

Prova: Se r e s são retas paralelas e se t interceptasse uma delas, digamos r, num ponto P, mas não interceptasse a outra, s, teríamos, passando por P, duas retas, r e t, paralelas à s. Isto contradiria o axioma 18. ■

Antes de enunciarmos as proposições que garantem paralelismo, vamos, para efeito de nomenclatura, dar algumas definições. Dadas duas retas r e s, cortadas por uma reta transversal t, ficam determinados oito ângulos, como os indicados na figura 6.1.

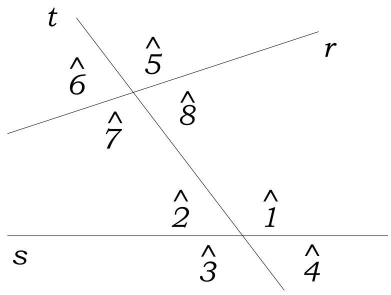


Figura 6.1: Retas r, s e t.

Os pares $\widehat{1}$ e $\widehat{5}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{6}$, $\widehat{3}$ e $\widehat{7}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{8}$ são **ângulos correspondentes**.

Os pares $\widehat{1}$ e $\widehat{7}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{8}$ são **ângulos alternos internos.**

Os pares $\widehat{3}$ e $\widehat{5}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{6}$ são **ângulos alternos externos.**

Os pares $\widehat{1}$ e $\widehat{8}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{7}$ são **ângulos colaterais internos.**

Os pares $\widehat{4}$ e $\widehat{5}$, $\widehat{3}$ e $\widehat{6}$ são **ângulos colaterais externos.**

6.3 Exercício. Conclua que $\widehat{1} = \widehat{3}$, $\widehat{2} = \widehat{4}$, $\widehat{5} = \widehat{7}$ e $\widehat{6} = \widehat{8}$.

6.4 Exercício. Mostre que se $\widehat{1} = \widehat{5}$ então $\widehat{2} = \widehat{6}$, $\widehat{3} = \widehat{7}$ e $\widehat{4} = \widehat{8}$.

Os teoremas seguintes dão meios de se poder afirmar o paralelismo de duas retas.

6.5 Teorema. *Se r e s são retas cortadas por uma transversal t, de modo que um par de ângulos correspondentes (alternos internos) são congruentes, então as retas r e s são paralelas.*

Prova: Suponhamos que r e s se interceptem num ponto P; se A é o ponto de interseção de r com t e B o ponto de interseção de s com t, os três pontos A, B, P definem um triângulo ABP (figura 6.2).

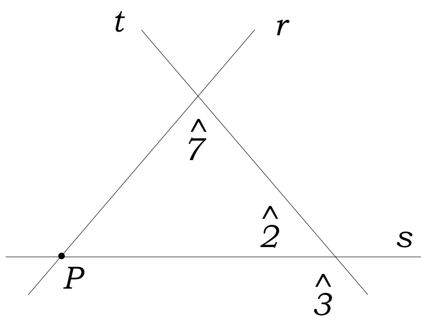


Figura 6.2: Triângulo ABP.

Suponhamos que $\widehat{3}$ e $\widehat{7}$ é o par de ângulos correspondentes que, por hipótese, são congruentes. No triângulo ABP, $\widehat{3}$ é um ângulo externo e $\widehat{7}$ é um ângulo interno não adjacente ao ângulo $\widehat{3}$. Pelo teorema do ângulo externo (teorema 5.2), teríamos $\widehat{3} \neq \widehat{7}$, o que contraria a hipótese de serem congruentes. Logo, r e s não se interceptam. ■

6.6 Exercício. Prove o teorema anterior, no caso em que um par de ângulos alternos internos são congruentes.

6.7 Corolário. *Se r e s são retas cortadas por uma transversal, t, de modo que um par de ângulos alternos externos são congruentes, então as retas r e s são paralelas.*

6.8 Corolário. *Se r e s são retas cortadas por uma transversal t, de modo que um par de ângulos colaterais internos (colaterais externos) são suplementares, então as retas r e s são paralelas.*

6.9 Corolário. *Se r e s são retas cortadas por uma transversal t, de modo que um par de ângulos colaterais internos (colaterais externos) não são suplementares, então as retas r e s não são paralelas.*

6.10 Exercício. Prove o corolário acima.

O recíproco do teorema 6.5 é também verdadeiro, e é um resultado importante que será registrado no seguinte:

6.11 Teorema. *Duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos correspondentes congruentes.*

Prova: Sejam r e s duas retas paralelas e t uma reta que corta r e s nos pontos A e B, respectivamente.

Consideremos r' uma reta passando por A e que forma com t quatro ângulos congruentes aos ângulos correspondentes formados por s e t. Pelo teorema 6.5, r' e s são paralelas. Pelo axioma 18, r e r' devem ser coincidentes. Logo, r forma ângulos com a reta t congruentes aos correspondentes formados por s e t. ■

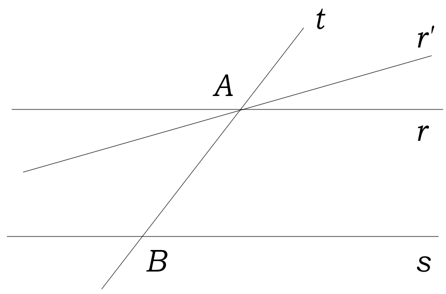


Figura 6.3: Teorema 6.11

6.12 Exercício. Prove o teorema anterior no caso em que um par de ângulos alternos internos são congruentes.

6.13 Exercício. Prove que duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos alternos externos congruentes.

6.14 Exercício. Prove que duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos colaterais internos (colaterais externos) suplementares.

6.15 Teorema. *a) Se uma reta r é paralela à uma reta s e uma reta m é paralela à uma reta n, de tal modo que m é transversal a r e s, então o mesmo ocorre com n.*

b) Segmentos de paralelas compreendidos entre paralelas são congruentes.

6.16 Exercício. Prove o teorema 6.15

6.17 Teorema. *Prove que o segmento de paralela à base do $\triangle ABC$ pelo ponto médio M do lado $\overline{AB}$, passa pelo ponto médio do outro lado e mede a metade do comprimento da base $\overline{BC}$.*

6.18 Exercício. Prove o teorema 6.17

6.19 Observação. O axioma 18 (axioma das paralelas), da forma como está enunciado, é atribuído ao matemático escocês John Playfair ($1748 - 1819$), embora já fosse conhecido por Proclus, no século V d.C. e usado por vários autores. Euclides (± 300 a.C.) apresentou um axioma das paralelas (quinto postulado) numa forma "um pouco diferente", a saber: "Se uma linha reta encontrando-se com outras duas retas fizer ângulos internos da mesma parte menores que dois retos, estas duas retas, prolongadas ao infinito, concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos". Outros quatro axiomas, fixados por Euclides no "Elementos" são os seguintes:

1- Pode-se traçar uma reta passando por dois pontos;

2- Uma reta pode ser continuada até onde seja necessário;

3- Pode-se traçar uma circunferência com qualquer centro e qualquer distância;

4- Todos os ângulos retos são iguais.

No "Elementos" de Euclides, as 28 primeiras proposições do Livro 1 foram demonstradas somente com base nos quatro axiomas acima. Pode-se provar que nosso axioma 18, junto com os quatro axiomas acima, é equivalente àquele enunciado por Euclides. Outras declarações que podem ser tomadas como axiomas no lugar do axioma das paralelas, e que dão origem às mesmas proposições demonstradas no “Elementos”, podem ser encontradas em [13].

6.20 Teorema. *A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é* 180°.

Prova: Seja ABC um triângulo qualquer. Pelo vértice C, consideremos a reta paralela ao lado $\overline{AB}$. C determina sobre essa reta duas semi-retas, $S_{(CX)}$ e $S_{(CY)}$, onde X é um ponto no semiplano determinado pela reta $\overline{BC}$ e que não contém A, enquanto Y é um ponto no semiplano determinado pela reta $\overline{AC}$ e que não contém B. Temos que:

$$X\widehat{C}B + B\widehat{C}A + A\widehat{C}Y = 1 \ raso.$$

Como as retas determinadas por X, Y e por A, B, respectivamente, são paralelas e a reta determinada por A, C é transversal a elas, o teorema 6.11 implica que $A\widehat{C}Y = B\widehat{A}C$. Analogamente, concluímos que $X\widehat{C}B = C\widehat{B}A$. Logo $C\widehat{B}A + B\widehat{C}A + B\hat{A}C = 1$ raso ou, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$. ■

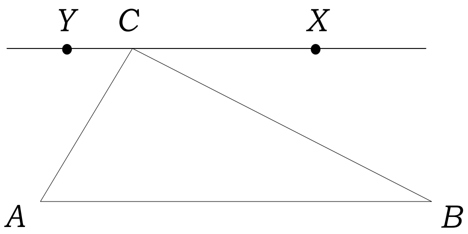


Figura 6.4: Teorema 6.20

6.21 Corolário. *Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.*

6.22 Exercício. Prove o corolário anterior.

6.23 Exercício. Mostre que, num triângulo retângulo a soma das medidas dos ângulos agudos é 90°.

6.24 Exercício. Os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°. Prove isso.

6.25 Teorema. *Se r e s são retas paralelas, então qualquer ponto de r dista igualmente de s.*

6.26 Exercício. Prove o teorema anterior (sugestão: utilize o teorema 6.15).

O teorema 6.25 motiva a seguinte definição.

6.27 Definição. A **distância entre duas retas paralelas** é a distância de um ponto qualquer de uma delas a outra. A **distância entre duas retas concorrentes** é zero.

6.28 Observação. Pode-se provar que o teorema 5.4 (ou teorema 5.12), junto com os quatros primeiros postulados de Euclides, é equivalente ao axioma das paralelas.

6.2 Construção de um sistema de coordenadas no plano

Sejam r e s retas concorrentes num ponto O. Em cada uma delas tomamos um sistema de coordenadas que tenha o ponto O como origem. Chamamos a reta r de **eixo das abscissas** e a reta s de **eixo das ordenadas.** O par ordenado de retas (r, s) é chamado **um sistema de coordenadas**, e o ponto O, é a **origem** do sistema. Dado um ponto P do plano, a ele associamos um par ordenado de números reais como segue.

(a) Se $P \in r$, então associamos a P o par $(x, 0)$, sendo x a coordenada de P em relação à r.

(b) Se $P \in s$, então associamos a P o par $(0, y)$, sendo y a coordenada de P em relação à s.

(c) Se $P \notin r$ e $P \notin s$, então passamos por P uma paralela à s, que encontra r num ponto cuja coordenada chamaremos de x, e uma paralela à r, que encontra s num ponto cuja coordenada chamaremos de y. Ao ponto P associamos o par (x, y) acima construído.

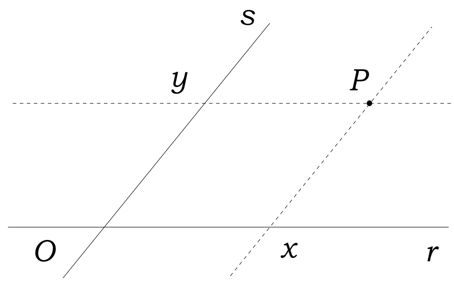


Figura 6.5: Sistema de coordenadas no plano.

O par de números reais (x, y) é, por definição, as **coordenadas** do ponto P no sistema de coordenadas (r, s). O número x é chamado de **abscissa** de P e o número y de **ordenada** de P.

Quando as retas r e s são perpendiculares, o sistema de coordenadas (r, s) é chamado de **sistema de coordenadas cartesianas ortogonais**.

6.29 Observação. A aplicação que a cada ponto do plano associa um par ordenado de números reais, como definido acima, é bijetiva. Isto nos permite identificar pontos do plano com pares ordenados de números reais, abrindo a possibilidade de resolvermos problemas geométricos utilizando álgebra, como se faz normalmente em Geometria Analítica. Por isso muitas vezes escrevemos $P = (x, y)$.

6.30 Exercício. Justifique a afirmação feita na observação 6.29.

6.3 Exercícios complementares

6.31 Exercício. Prove que a bissetriz de um ângulo externo, relativo ao vértice de um triângulo isósceles, é paralela à base desse triângulo.

6.32 Exercício. Sejam ABC um triângulo isósceles e P um ponto qualquer da base $\overline{BC}$. Sejam $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$ os segmentos perpendiculares às laterais desse triângulo. Mostre que $PM + PN$ é um valor constante, que é a medida da altura relativa a uma das laterais.

6.33 Exercício. Provar que se P é um ponto interior a um triângulo equilátero, então a soma das distâncias de P ao lados do triângulo é igual à altura do mesmo.

6.34 Exercício. Prove que se r é uma reta cujos pontos são equidistantes de uma reta s (isto é, todos os pontos de r estão a mesma distância de s), então r e s são retas coincidentes ou paralelas (este é o recíproco do teorema 6.25).

6.35 Exercício. Descubra qual o erro na demonstração do "Teorema"do Apêndice A.

Capítulo 7

Polígonos

Apresenta-se uma série de definições seguidas de exercícios que são, basicamente, consequências de resultados dos capítulos anteriores, principalmente daqueles sobre congruência e paralelismo. Os resultados de muitos exercícios são informações importantes (verdadeiros teoremas), outros são curiosidades que valem pelo treinamento que eles impõem ao raciocínio.

7.1 Definições gerais

7.1 Definição. Uma **linha poligonal,** ou simplesmente **poligonal,** é uma figura geométrica formada por uma sequência de n $(n \geq 3)$ pontos distintos $A_1, A_2, ..., A_n$, e pelos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... , $\overline{A_{n-1}A_n}$. Os pontos são os **vértices** e os segmentos os **lados** da poligonal. **Ângulo** de uma poligonal com vértice A_j é o ângulo definido pelos lados que têm A_j como ponto comum.

7.2 Definição. Polígono é uma poligonal que satisfaz as seguintes condições:

(i) $A_{n+1} = A_1$;

(ii) os lados da poligonal interceptam-se somente em suas extremidades;

(iii) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

7.3 Observação. Um polígono com vértices $A_1, A_2, ..., A_n$, será denotado por $A_1A_2...A_n$. Ele tem n lados, n vértices e n ângulos.

7.4 Observação. Uma classificação para polígonos pode ser feita, facilmente, segundo o número de lados. Os mais usuais são (para $n \geq 3$, onde n representa o número de seus lados):

Número de lados	Nome do polígono
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octágono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
15	pentadecágono
20	icoságono

7.5 Exercício. Quais dos desenhos da figura 7.1, representam polígonos?

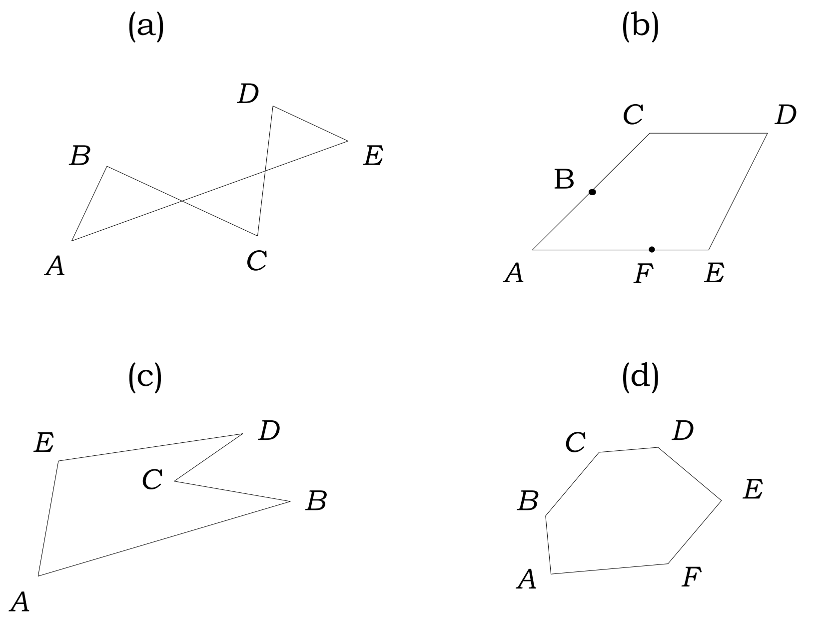


Figura 7.1: Exercício 7.5.

7.6 Definição. **Diagonal** de um polígono é um segmento que tem por extremidade dois de seus vértices que não pertencem a um mesmo lado.

7.7 Exercício. (a) Quantas diagonais têm um polígono de: (i) 6 lados; (ii) 17 lados ?
(b) Mostre que um polígono com n lados tem $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

7.8 Exercício. Qual o polígono que possui 27 diagonais distintas?

7.9 Definição. Um polígono que possui todos os ângulos congruentes é dito **equiângulo**. Um polígono que possui todos os lados congruentes é dito **equilátero**.

7.10 Exercício. Mostre que um polígono separa o plano em dois subconjuntos dos quais um é limitado e outro é não limitado.

7.11 Definição. O subconjunto limitado menos os pontos do polígono é chamado **interior do polígono**. Se do subconjunto não limitado excluírmos os pontos do polígono, teremos o **exterior do polígono**.

7.12 Definição. Um polígono é **convexo** se cada reta que contém dois vértices do polígono determina um semiplano que contém todos os outros vértices.

7.13 Exercício. Mostre que o interior de um polígono convexo é uma figura convexa.

7.14 Exercício. Sejam P um polígono convexo, A um ponto no interior de P e B um ponto em seu exterior. Mostre que existe um único ponto comum a P e ao segmento $\overline{AB}$.

7.15 Definição. Ângulo de um polígono convexo é chamado de **ângulo interno** do polígono. **Ângulo externo** de um polígono convexo é um suplemento de um ângulo interno do polígono.

7.16 Definição. Um **polígono regular** é um polígono convexo, equilátero e equiângulo, isto é, todos os lados são congruentes entre si e todos os ângulos internos são congruentes entre si.

7.17 Teorema. *A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a* $[180(n-2)]^\circ$*, onde* n *é o número de lados do polígono.*

7.18 Exercício. Prove o teorema anterior.

7.19 Teorema. *A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo vale* 360°.

7.20 Exercício. Prove o teorema anterior.

7.21 Exercício. Nos dois exercícios anteriores poderíamos tirar o adjetivo convexo e manter a conclusão das proposições?

7.22 Exercício. Mostre que um polígono convexo não pode ter mais do que três ângulos agudos.

7.23 Exercício. Calcule a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados.

7.24 Exercício. Calcule a medida do ângulo externo de um polígono regular de n lados.

7.25 Exercício. Quer-se revestir um soalho com tacos na forma de polígonos regulares. Que tipo de polígonos, de mesmo formato, pode-se utilizar de modo a cobrir todo o soalho?

7.26 Exercício. Suponha que para revestir um soalho possam ser utilizadom tacos na forma de polígonos regulares, mas não necessariamente de mesmo formato. Estude as possibilidades para tal revestimento.

7.27 Definição. **Perímetro** de um polígono é a soma das medidas de seus lados. **Semi-perímetro** de um polígono é a metade do perímetro.

7.28 Exercício. Seja $A_1A_2...A_n$ um polígono convexo e $A_1'A_2'...A_n'$ outro polígono convexo que possui cada um de seus vértices sobre os lados do polígono anterior. Prove que o perímetro do polígono $A_1'A_2'...A_n'$ é menor do que o perímetro do polígono $A_1A_2...A_n$.

7.29 Exercício. Mostre que, em todo polígono convexo, a soma dos comprimentos dos segmentos definidos por seus vértices e um ponto no seu interior é maior do que seu semiperímetro.

7.2 Quadriláteros convexos

7.30 Definição. **Quadriláteros convexos** são polígonos convexos que possuem quatro lados.

7.31 Definição. Num quadrilátero, vértices não consecutivos são ditos **opostos,** assim como dois ângulos e dois lados não consecutivos são ditos **opostos.**

7.32 Exercício. A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é igual a 4 vezes a medida de um ângulo reto.

7.33 Definição. **Paralelogramo** é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

7.34 Teorema. *Em um paralelogramo temos sempre:*
(i) ângulos adjacentes a um lado suplementares;
(ii) ângulos opostos congruentes;
(iii) lados opostos congruentes;
(iv) as diagonais se interceptam em um ponto que é o ponto médio das duas diagonais.

7.35 Exercício. Prove o teorema 7.34.

7.36 Exercício. Mostre que:
(i) Se um paralelogramo tem um ângulo reto então todos os demais ângulos são retos.
(ii) Se num paralelogramo dois de seus lados consecutivos são congruentes, então todos os seus lados são congruentes.

7.37 Teorema. *Um quadrilátero é um paralelogramo se:*
(i) os ângulos adjacentes a cada um dos seus lados são suplementares;
(ii) os ângulos opostos são congruentes;
(iii) os lados opostos são congruentes;
(iv) as diagonais interceptam-se mutuamente em seus pontos médios.

7.38 Exercício. Prove o teorema 7.37.

7.39 Teorema. *Se um quadrilátero possui dois lados opostos congruentes e paralelos, então ele é um paralelogramo.*

7.40 Exercício. Prove o teorema 7.39.

7.41 Definição. Um quadrilátero que possui todos os seus ângulos retos recebe o nome de **retângulo.**

7.42 Exercício. Mostre que todo retângulo é um paralelogramo.

7.43 Exercício. Mostre que as diagonais de um retângulo são congruentes.

7.44 Exercício. Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são congruentes, então o paralelogramo é um retângulo.

7.45 Definição. **Losango** é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes.

7.46 Exercício. Mostre que todo losango é um paralelogramo.

7.47 Exercício. Mostre que, num losango, as diagonais são perpendiculares entre si e cada uma é bissetriz do ângulo correspondente.

7.48 Exercício. Um paralelogramo é um losango se:
(i) suas diagonais são perpendiculares entre si;
(ii) uma das diagonais bissecta os ângulos opostos.

7.49 Definição. **Quadrado** é um retângulo que também é um losango.

7.50 Exercício. Mostre que num quadrado,
(i) as diagonais são congruentes e perpendiculares;
(ii) cada diagonal é bissetriz dos seus ângulos.

7.51 Exercício. Mostre que se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e se interceptam num ponto que é ponto médio de ambas, e ainda são perpendiculares, então o quadrilátero é um quadrado.

7.52 Definição. **Trapézio** é um quadrilátero em que somente dois lados são paralelos.

7.53 Definição. Os lados paralelos de um trapézio são chamados **bases** e os outros dois são as suas **laterais**. Um trapézio é dito **isósceles** se suas laterais são congruentes.

7.54 Definição. Um trapézio que possui um ângulo reto é dito **trapézio retângulo.**

7.55 Exercício. Se $ABCD$ é um trapézio isósceles e $\overline{AB}$ é uma base, mostre que $\widehat{A} = \widehat{B}, \widehat{C} = \widehat{D}$, e reciprocamente (basta $\widehat{A} = \widehat{B}$ ou $\widehat{C} = \widehat{D}$).

7.56 Exercício. Mostre que num trapézio isósceles, as diagonais são congruentes, e reciprocamente.

7.57 Exercício. Mostre que num trapézio isósceles, a mediatriz de uma das suas bases é mediatriz da outra base, e reciprocamente.

7.58 Teorema. *O segmento determinado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e mede a metade do comprimento desse lado.*

7.59 Exercício. Demonstre o teorema anterior (sugestão: se X e Y são os pontos médios de dois lados, marque em $\overrightarrow{XY}$ um ponto D tal que $XD = 2XY$).

7.60 Exercício. Prove que qualquer triângulo que possui duas medianas congruentes é isósceles.

7.61 Exercício. Mostre que o segmento que liga os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e que seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos das bases.

7.62 Exercício. Prove que ligando-se os pontos médios dos lados de um triângulo qualquer, este ficará dividido em quatro triângulos congruentes.

7.63 Exercício. Prove que as paralelas aos lados de um triângulo qualquer, traçadas passando pelos vértices opostos aos respectivos lados, formam um novo triângulo cujos pontos médios dos lados são os vértices do triângulo inicialmente dado.

7.64 Exercício. Mostre que ligando-se os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer obtém-se um paralelogramo.

7.65 Exercício. Mostre que se num triângulo qualquer ABC prolongarmos a mediana $\overline{AM}$, relativa ao lado $\overline{BC}$, até um ponto D tal que $MD = AM$, obtemos o quadrilátero $ABCD$, que é um paralelogramo.

7.66 Exercício. Prove que qualquer triângulo no qual uma mediana e uma bissetriz são coincidentes, é isósceles.

7.67 Exercício. Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opostos de um paralelogramo são coincidentes ou paralelas.

7.68 Exercício. Mostre que as bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo interceptam-se formando um retângulo.

7.69 Exercício. Mostre que se o paralelogramo do exercício anterior é um retângulo, o retângulo formado é um quadrado.

7.70 Exercício. Em um triângulo isósceles ABC, com vértice em A, toma-se um ponto P sobre a base e traçam-se os segmentos $\overline{PR}$ e $\overline{PS}$, paralelos a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, onde $R \in AC$ e $S \in AB$. Prove que o perímetro do paralelogramo $ASPR$ é independente da posição do ponto P sobre a base $\overline{BC}$.

7.71 Exercício. A partir de cada vértice de um quadrado $ABCD$, cujos lados são percorridos em um mesmo sentido, marcam-se pontos U, F, S, M, tais que $AU = BF = CS = DM$. Mostre que o quadrilátero $UFSM$ também é um quadrado.

7.72 Exercício. Qual a figura obtida quando ligamos os pontos médios dos lados de um retângulo?

7.73 Exercício. Pelo ponto de encontro das diagonais de um quadrado, traçam-se dois segmentos perpendiculares entre si e limitados pelos lados do quadrado. Mostre que esses segmentos são congruentes.

7.74 Exercício. Mostre que em um trapézio isósceles, o ângulo formado pelas bissetrizes de seus ângulos agudos é congruente a um de seus ângulos obtusos.

Capítulo 8

Paralelismo e o Teorema do Feixe de Retas Paralelas

Estabelece-se resultados gerais sobre feixe de retas paralelas cortado por retas transversais e demonstra-se o teorema da bissetriz interna.

8.1 Feixe de retas paralelas

A uma coleção de retas paralelas dá-se o nome de **feixe de retas paralelas.**

8.1 Teorema. *Sejam r, s, t retas de um feixe de retas paralelas que cortam as retas transversais u e v nos pontos A, B, C e A', B', C', respectivamente.*
i) Se $A - B - C$, então $A' - B' - C'$.
ii) Se $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ então $\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'}$.

Prova: *i)* Se $A - B - C$ então A e C pertencem a semiplanos distintos relativamente à reta s.

Uma vez que r e s são retas paralelas e A, A' pertencem à r, segue que A, A' pertencem a um mesmo semiplano definido por s. De modo análogo, concluímos que C e C' pertencem a um mesmo semiplano determinado por s.

Assim A' e C' pertencem a semiplanos distintos, relativamente a reta s. Logo, s intercepta o segmento $\overline{A'C'}$ em um único ponto (!). Como B' é o ponto de interseção de v com s, e A', C' pertencem à v (... e daí determinam v), concluímos que $\overline{A'C'}$ intercepta s exatamente no ponto B'. Assim, B' pertence à $\overline{A'C'}$ e daí $A' - B' - C'$. Isto prova i).

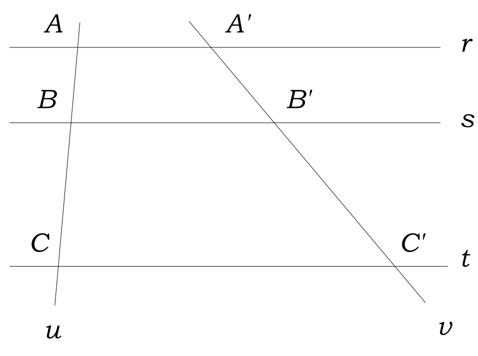


Figura 8.1: Feixe de paralelas r, s, t cortadas pelas transversais u, v.

ii) Passando por B', consideremos a única reta u' paralela à u.

Esta reta intercepta as retas r e t, respectivamente, nos pontos D e E. Como $DB'BA$ e $B'ECB$ são paralelogramos (!), então $\overline{DB'} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{B'E} \equiv \overline{BC}$. Como, por hipótese, $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, segue que $\overline{DB'} \equiv \overline{B'E}$ (!); por outro lado, $D\widehat{B'}A' \equiv E\widehat{B'}C'$ (!) e $B'\widehat{D}A' \equiv B'\widehat{E}C'$ (!). Pelo caso ALA de congruência de triângulos, concluímos que os triângulos $A'DB'$ e $C'EB'$ são congruentes. Daqui decorre $\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'}$. Isto prova (ii).■

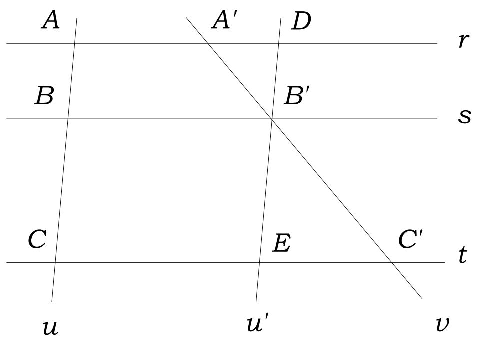


Figura 8.2: Prova de (ii).

8.2 Corolário. *Se a_i,($i = 1, 2, ..., k$), é um feixe de retas paralelas que interceptam duas retas transversais u e v nos pontos A_i e A'_i, ($i = 1, 2, ..., k$), respectivamente, e tais que $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{k-1}A_k$, então $A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = ... = A'_{k-1}A'_k$.*

8.3 Exercício. Prove o corolário 8.2.

O próximo teorema é um resultado básico para se estabelecer uma teoria de semelhança de triângulos (próximo capítulo); sua demonstração fundamenta-se no axioma 10 e no fato do corpo dos números reais ser completo.

8.4 Teorema. ***(Tales)*** *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, intercepta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.*

Prova: Sejam ABC um triângulo e r uma reta, paralela ao lado $\overline{BC}$, que intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos P e Q, respectivamente. (Ver figura 8.3)

O teorema afirma que:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}. \tag{8.1}$$

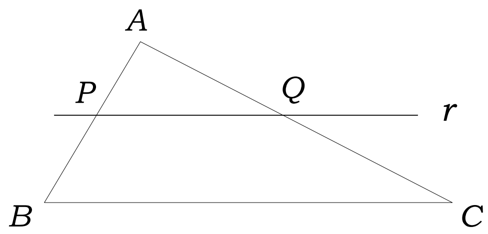


Figura 8.3: Teorema de Tales

Para mostrar isso, tomemos na semi-reta $S_{(AB)}$ um segmento $\overline{AX_1}$ de modo que as razões $\frac{AP}{AX_1}$ e $\frac{AB}{AX_1}$ não sejam números inteiros (o caso em que as razões são números inteiros fica como exercício para o leitor). Em $S_{(AB)}$ consideremos os pontos $X_2, X_3, ..., X_k, ...$ tais que $AX_k = k \cdot AX_1$ para todo $k \geq 2$. Existem dois números inteiros m e n, $m \leq n$, tais que $X_m - P - X_{m+1}$ e $X_n - B - X_{n+1}$, isto é,

$$m \cdot AX_1 < AP < (m+1) \cdot AX_1 \tag{8.2}$$

e

$$n \cdot AX_1 < AB < (n+1) \cdot AX_1. \tag{8.3}$$

Da primeira desigualdade em (8.2) segue

$$\frac{m}{n+1} < \frac{AP}{(n+1) \cdot AX_1}. \tag{8.4}$$

Por outro lado, da segunda desigualdade em (8.3), segue que

$$\frac{1}{(n+1)\cdot AX_1} < \frac{1}{AB}$$

e como $AP > 0$ temos

$$\frac{AP}{(n+1)\cdot AX_1} < \frac{AP}{AB}.$$

Usando isto em (8.4) resulta

$$\frac{m}{n+1} < \frac{AP}{AB}. \tag{8.5}$$

Da primeira desigualdade em (8.3) tem-se

$$\frac{1}{AB} < \frac{1}{n\cdot AX_1}.$$

Assim,

$$\frac{AP}{AB} < \frac{AP}{n\cdot AX_1}. \tag{8.6}$$

Por outro lado, da segunda desigualdade em (8.2) temos

$$\frac{AP}{n\cdot AX_1} < \frac{(m+1)\cdot AX_1}{n\cdot AX_1} = \frac{m+1}{n}.$$

Assim, de (8.6) segue que

$$\frac{AP}{AB} < \frac{m+1}{n}. \tag{8.7}$$

De (8.5) e (8.7) vem que

$$\frac{m}{n+1} < \frac{AP}{AB} < \frac{m+1}{n}. \tag{8.8}$$

Pelos pontos $X_{1,}X_2,...,X_{n+1}$, tracemos as retas paralelas a $\overline{BC}$ (que existem e são únicas); estas retas cortam a semi-reta $S_{(AC)}$ em pontos $Y_1, Y_2, ..., Y_{n+1}$ (segundo o corolário 8.2), de modo que $k\cdot AY_1 = AY_k$ para todo k, $2 \leq k \leq n+1$. Além disso $Y_m - Q - Y_{m+1}$ e $Y_n - C - Y_{n+1}$. Assim

$$m\cdot AY_1 < AQ < (m+1)\cdot AY_1 \quad \text{e} \quad n\cdot AY_1 < AC < (n+1)\cdot AY_1.$$

Raciocínio análogo ao que fizemos anteriormente implica que

$$\frac{m}{n+1} < \frac{AQ}{AC} < \frac{m+1}{n}. \tag{8.9}$$

De (8.8) e (8.9) segue que

$$\frac{m}{n+1} - \frac{m+1}{n} < \frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC} < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}$$

isto é,

$$\left|\frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC}\right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}.$$

Desde que $m \leq n$, temos que

$$\left|\frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC}\right| < \frac{m+n+1}{n(n+1)} \leq \frac{2n+1}{n(n+1)} < \frac{2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n}.$$

Assim,

$$\left|\frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC}\right| < \frac{2}{n}. \tag{8.10}$$

Agora, como o segmento $\overline{AX_1}$ é arbitrário, podemos tomá-lo tão pequeno quanto quisermos de modo que o número n possa ser tomado suficientemente grande, resultando $\frac{2}{n}$ tão pequeno quanto quisermos. Como o membro esquerdo de (8.10) independe de n, concluimos que o número $\frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC}$ deve ser zero e daí $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$, provando que vale (8.1). ■

O teorema seguinte é uma conseqüência direta do teorema 8.4.

8.5 Teorema. *Um feixe de paralelas cortadas por duas transversais determina sobre elas, segmentos correspondentes proporcionais.*

8.6 Exercício. Demonstre o teorema anterior.

8.7 Observação. Os teoremas 8.4 e 8.5 são conhecidos como **Teoremas de Tales**.

8.8 Teorema. ***(Bissetriz Interna)*** *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos cujos comprimentos são proporcionais aos comprimentos dos lados adjacentes.*

Prova: Seja ABC um triângulo e $\overline{AD}$ a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$. O ponto D é tal que $B-D-C$ e determina sobre o lado $\overline{BC}$ os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$. Mostremos que $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

Na semi-reta $\overrightarrow{BA}$ tomemos o ponto E tal que $B-A-E$ e $AE = AC$. O triângulo EAC é isósceles com vértice A e, daí, $A\widehat{C}E = A\widehat{E}C$. Por outro lado, $B\widehat{A}C$ é ângulo externo, donde $B\widehat{A}C = A\widehat{C}E + A\widehat{E}C$ e, portanto, $B\widehat{A}C = 2A\widehat{E}C$. Como $\overline{AD}$ é bissetriz de $B\widehat{A}C$, temos que $B\widehat{A}C = 2B\widehat{A}D$. Destas duas últimas relações segue que $A\widehat{E}C = B\widehat{A}D$.

Pelo teorema 6.5 temos que $\overline{AD}$ é paralela a $\overline{EC}$ e, no $\triangle BEC$, pelo teorema 8.4, temos que $\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{BE}$. Deste modo,

$$\frac{BD}{BD+DC} = \frac{AB}{AB+AE} \Rightarrow \frac{BD+DC}{BD} = \frac{AB+AE}{AB}$$

Logo, como $\frac{DC}{BD} = \frac{AE}{AB}$ e $AE = AC$, segue-se que

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}.$$

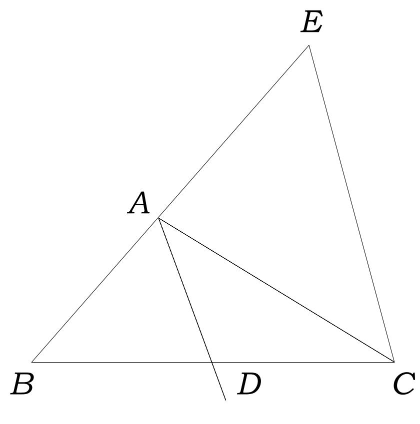


Figura 8.4: Teorema da Bissetriz Interna

■

8.2 Exercícios complementares

8.9 Exercício. Enuncie e demonstre o recíproco do Teorema da Bissetriz Interna.

8.10 Exercício. Usando o resultado do corolário 8.2, crie um método, usando régua e compasso, para dividir um segmento de reta em um número dado de parte iguais.

8.11 Exercício. Mostre que em qualquer triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da medida da hipotenusa.

8.12 Exercício. Num paralelogramo $ABCD$ traça-se uma paralela à diagonal $\overline{AC}$ que corta $\overline{AB}$ no ponto E e $\overline{BC}$ no ponto F . Dos pontos E e F, traçam-se as paralelas a $\overline{BD}$ que cortam $\overline{AD}$ no ponto H e $\overline{CD}$ no ponto G, respectivamente. Mostre que $AH \cdot CD = AD \cdot CG$.

Capítulo 9

Triângulos Semelhantes e Semelhança de Polígonos

Define-se semelhança de triângulos e de polígonos, estabelecendo-se condições suficientes que garantam semelhança; como consequência, obtém-se o famoso Teorema de Pitágoras e seu recíproco. A semelhança de polígonos é apresentada na forma de exercícios no final do capítulo.

9.1 Definições e considerações gerais

9.1 Definição. Dois triângulos são **semelhantes** se existe uma bijeção (chamada **semelhança**) entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais.

A definição acima tem o seguinte significado: dados dois triângulos, ABC e $A'B'C'$, seja $\varphi : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$ tal que $A' = \varphi(A), B' = \varphi(B), C' = \varphi(C)$; se $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'}$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Quando dois triângulos são semelhantes os ângulos correspondentes são ditos **homólogos**, assim como os lados correspondentes são chamados **lados homólogos.**

A razão entre as medidas de dois lados homólogos é chamado **razão de semelhança** entre os dois triângulos.

Se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, indicaremos esse fato usando a notação $ABC \approx A'B'C'$. Assim

$$ABC \approx A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}. \end{cases}$$

9.2 Exercício. Mostre que a relação $\approx$ satisfaz as seguintes propriedades:

i) $ABC \approx ABC$ (reflexiva),

ii) $ABC \approx A'B'C' \Rightarrow A'B'C' \approx ABC$ (simétrica),

iii) $ABC \approx A'B'C'$ e $A'B'C' \approx A''B''C'' \Rightarrow ABC \approx A''B''C''$ (transitiva).

Assim, $\approx$ é uma **relação de equivalência**.

9.3 Exercício. Mostre que:

a) Congruência de triângulos é um caso particular de semelhança. Neste caso, qual é a razão de semelhança?

b) Se dois triângulos são semelhantes, com razão de semelhança igual a um, então eles são congruentes.

9.4 Teorema. *Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados (ou o prolongamento deles), determinando um novo triângulo semelhante ao primeiro (considere todas as situações possíveis).*

9.5 Exercício. Demonstre o teorema anterior.

9.2 Casos de semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras

Neste ítem, veremos que para verificar se dois triângulos são semelhantes basta que algumas das relações entre ângulos e/ou entre lados estejam satisfeitas.

9.6 Teorema. ***(Primeiro Caso de Semelhança)*** *Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes se $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$.*

Prova: Consideremos a correspondência

$$\varphi : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\},$$

definida por $A' = \varphi(A), B' = \varphi(B), C' = \varphi(C)$. Por hipótese, temos que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$; como em qualquer triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é 180°, como, $\widehat{C} = 180° - \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right)$ e $\widehat{C'} = 180° - \left(\widehat{A'} + \widehat{B'}\right)$, segue que $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Mostremos agora que os lados correspondentes são proporcionais.

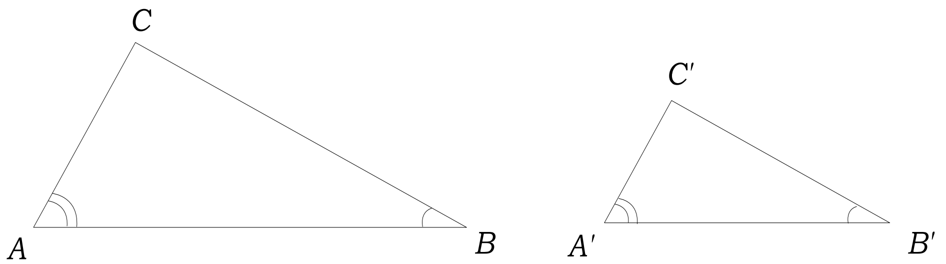


Figura 9.1: Primeiro caso de semelhança de triângulos.

Para isso, consideremos a semi-reta $\mathrm{S}_{(A'B')}$ e sobre ela um ponto X tal que $A'X = AB$ (transporte de segmento). Pelo ponto X, consideremos a reta paralela ao lado $B'C'$. Esta paralela corta a semi-reta $S_{(A'C')}$ num ponto Y (!). Fica assim determinado o triângulo $A'XY$ congruente ao triângulo ABC, uma vez que $\widehat{A} = \widehat{A'}, AB = A'X$ e $A'\widehat{X}Y = \widehat{B'} = \widehat{B}$ (!). Pelo teorema 8.4 segue que $\frac{A'X}{A'B'} = \frac{A'Y}{A'C'}$. Como $A'X = AB$ e $A'Y = AC$, temos $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$. De modo análogo, prova-se que $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$. ■

9.7 Exercício. Conclua a prova do teorema anterior mostrando que $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

9.8 Exercício. Mostre que:
a) Dois triângulos isósceles que têm ângulos do vértice congruentes são semelhantes.
b) Dois triângulos isósceles que têm ângulos da base congruentes são semelhantes.

9.9 Exercício. Mostre que se dois triângulos têm os seus lados dois a dois paralelos ou perpendiculares, então eles são semelhantes.

9.10 Exercício. Mostre que dado um triângulo, é sempre possível, usando régua (não graduada) e compasso, construir outro triângulo semelhante a ele (conclua que é possível construir uma infinidade de triângulos semelhantes ao triângulo dado).

9.11 Teorema. ***(Segundo Caso de Semelhança)*** *Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes se $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.*

Prova: Consideremos a mesma correspondência entre vértices usada no teorema 9.6.

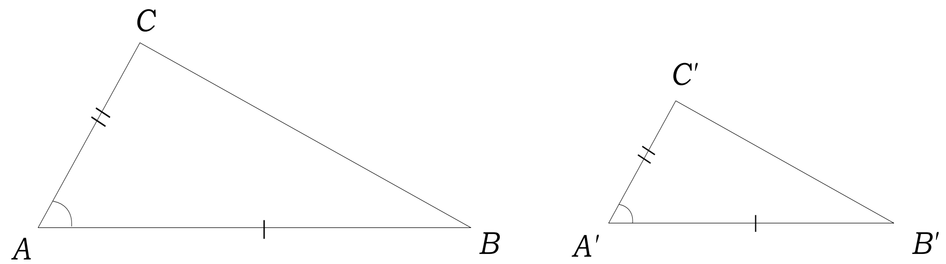


Figura 9.2: Segundo caso de semelhança de triângulos.

Construamos um triângulo XYZ tal que $XY = A'B'$, $\widehat{X} = \widehat{A}$ e $\widehat{Y} = \widehat{B}$ (conforme o exercício 9.10). Pelo teorema 9.6, os triângulos XYZ e ABC são semelhantes; logo,

$$\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XZ}. \tag{9.1}$$

Como $XY = A'B'$ (por construção) e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ (por hipótese), temos que

$$\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{A'C'}. \tag{9.2}$$

Assim, de (9.1) e (9.2), vem que $XZ = A'C'$. Como $XY = A'B'$ e $\widehat{X} = \widehat{A} = \widehat{A'}$ (!), segue, pelo Primeiro Caso de Congruência de Triângulos, que $A'B'C'$ e XYZ são congruentes. Assim, $XYZ \approx A'B'C'$. Como sabemos que $ABC \approx XYZ$, segue que $ABC \approx A'B'C'$. ■

9.12 Exercício. Enuncie e demonstre os recíprocos dos teoremas 8.4 e 9.4.

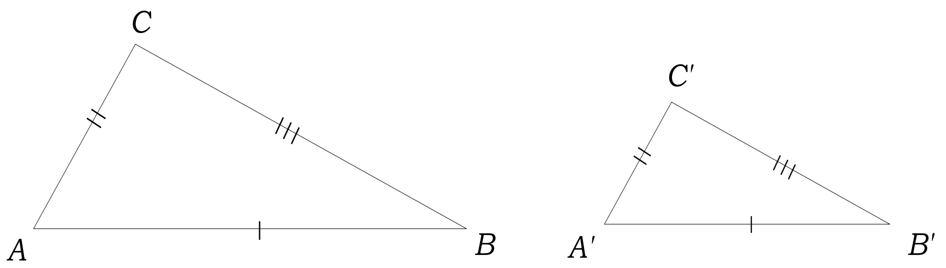


Figura 9.3: Terceiro caso de semelhança de triângulos.

9.13 Teorema. ***(Terceiro Caso de Semelhança)*** *Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes se $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.*

Prova*:* Consideremos a mesma correspondência entre os vértices usada no teorema anterior. Construamos um triângulo XYZ tal que $XY = A'B', \widehat{X} = \widehat{A}$ e $XZ = A'C'$ (mostre que esta construção é possível). Como, por hipótese, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, segue que $\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XZ}$. Logo, pelo teorema 9.11, os triângulos ABC e XYZ são semelhantes. Daí decorre que $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ}$. Como por hipótese, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ (e $XY = A'B'$) temos que $\frac{BC}{B'C'} = \frac{BC}{YZ}$, logo $= B'C'$.

Assim, $XY = A'B', XZ = A'C'$ (por construção) e $YZ = B'C'$ implicam (pelo Terceiro Caso de Congruência de Triângulos) que $XYZ \equiv A'B'C'$ e daí $XYZ \approx A'B'C'$. Como $ABC \approx XYZ$ (por construção, lembra?), segue que (transitividade) $ABC \approx A'B'C'$. ■

O exercício seguinte nos dá três condições suficientes para que dois triângulos retângulos sejam semelhantes.

9.14 Exercício. Verifique que:

a) Dois triângulos retângulos são semelhantes quando um ângulo agudo de um é congruente ao ângulo agudo, correspondente, do outro.

b) Dois triângulos retângulos são semelhantes quando têm os catetos correspondentes proporcionais.

c) Dois triângulos retângulos são semelhantes, quando um deles têm a hipotenusa e um dos catetos proporcionais a hipotenusa e ao cateto correspondentes, do outro.

9.15 Exercício. Escreva, usando palavras (sem notação simbólica), os enunciados dos teoremas sobre semelhança de triângulos.

9.16 Teorema. *Em qualquer triângulo retângulo, a medida da altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Prova: Consideremos um triângulo ABC, retângulo em A. Tracemos a altura $\overline{AD}$ relativamente ao lado $\overline{BC}$ (hipotenusa). O ponto D está entre B e C (!) e define os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$. Para efeito de simplificação, vamos fixar a seguinte notação: $BC = a, AB = c, AC = b, AD = h, BD = m, DC = n$, (vide figura **??**). Os triângulos ADB e ADC são retângulos em D. Como $C\widehat{A}D + \widehat{C} = 90°$ e $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$, segue que $C\widehat{A}D = \widehat{B}$. Analogamente, temos que $B\widehat{A}D = \widehat{C}$. Assim, os triângulos ADB e CDA são semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo CAB.

Usando a definição de semelhança, podemos escrever várias relações entre as medidas a, b, c, m, n e h. Assim

$$ADB \approx CDA \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}.$$

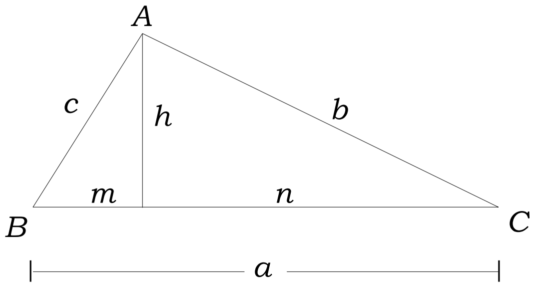


Figura 9.4: Triângulos retângulo ABC.

9.17 Teorema. ***(Pitágoras)*** *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Prova*:* Usando a notação estabelecida, temos que mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$. De fato, já sabemos que os triângulos ADB, CDA, CAB são semelhantes. De $ADB \approx CAB$, segue que $\frac{c}{a} = \frac{m}{c}$; logo

$$am = c^2. \tag{9.3}$$

De $CDA \approx CAB$, segue que $\frac{b}{a} = \frac{m}{b}$; logo,

$$an = b^2. \tag{9.4}$$

Assim, de (9.3) e (9.4), temos: $a(m+n) = c^2 + b^2$. Desde que $m + n = a$, temos, finalmente, $a^2 = b^2 + c^2$. ■

9.18 Teorema. ***(Recíproco do Teorema de Pitágoras)*** *Se um triângulo possui lados medindo a, b, c e se $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo e a hipotenusa é o lado com medida a.*

Prova*:* Seja ABC um triângulo com lados que medem a, b, c e são tais que $a^2 = b^2 + c^2$. Construamos um triângulo retângulo com catetos medindo b e c. Nesse triângulo, pelo teorema de Pitágoras, temos que sua hipotenusa mede $\sqrt{b^2 + c^2}$, que é igual a a (por hipótese). Assim, este novo triângulo (que é retângulo) tem lados medindo a, b, c. Pelo Terceiro Caso de Congruência de Triângulos, segue que ele é congruente ao triângulo ABC. Logo, ABC é triângulo retângulo e sua hipotenusa mede a. ■

9.3 Exercícios complementares

9.19 Exercício. Demonstre os três casos de semelhança de triângulos, utilizando o teorema 9.4.

9.20 Exercício. Dois polígonos convexos, $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$ são semelhantes se existe uma correspondência bijetiva (chamada **semelhança**) entre seus vértices, $A_i \leftrightarrow B_i$, $i = 1, 2, ..., n$ tal que $\widehat{A_i} = \widehat{B}_i, i = 1, 2, ..., n$

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = ... = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = k.$$

O número k é a **razão de semelhança** entre os dois polígonos. Dois polígonos semelhantes, cuja razão de semelhança é igual a 1, são ditos congruentes (note que, pela definição, dois polígonos são congruentes quando possuem todos os lados e todos os ângulos, respectivamente, congruentes).

a) Mostre que dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos ordenadamente semelhantes.

b) Dois polígonos compostos por um mesmo número de triângulos ordenadamente semelhantes são semelhantes.

9.21 Exercício. Mostre que a razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança.

9.22 Exercício. Chamam-se **pontos homólogos** de dois polígonos semelhantes os pares de pontos P e P' tais que, ligando-se P a dois vértices quaisquer A, B do primeiro polígono e, P' aos correspondentes A', B' do segundo polígono, os triângulos PAB e $P'A'B'$ são semelhantes.**Segmentos homólogos** são aqueles que têm como extremos pares de pontos homólogos.

Mostre que em dois polígonos semelhantes a relação de comprimento de segmentos homólogos é igual à razão de semelhança.

9.23 Exercício. Demonstre que em dois triângulos semelhantes,

a) a razão entre os comprimentos das bissetrizes de ângulos correspondentes é igual à razão de semelhança;

b) a razão entre os comprimentos das medianas relativas a lados homólogos é igual à razão de semelhança;

c) a razão entre os comprimentos das alturas relativas a lados homólogos é igual à razão de semelhança.

9.24 Exercício. Determine o comprimento do lado do quadrado inscrito num triângulo ABC, cuja base $\overline{BC}$ mede l e a altura $\overline{AD}$, relativa à base $\overline{BC}$, mede h.(suponha um lado do quadrado paralelo à base BC)

9.25 Exercício. Dado um triângulo ABC, calcule a que distância x que o vértice B deve estar de um ponto P quando os segmentos $\overline{PQ}$ $(PQ = r)$ e $\overline{PR}$ $(PR = s)$ paralelos aos lados $\overline{BC}$ $(BC = a)$ e $\overline{AC}$ $(AC = b)$, respectivamente, satisfazem a condição $r + s = p + q$.(figura 9.5).

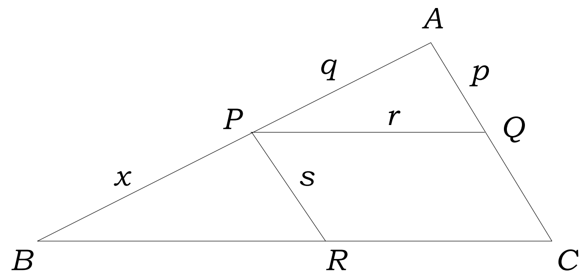


Figura 9.5: Triângulo ABC.

9.26 Exercício. Sejam p, q inteiros positivos tais que $p > q$. Mostre que todo triângulo cujos lados medem $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$, é um triângulo retângulo.

9.27 Exercício. Demonstre que, num paralelogramo, as distâncias de um ponto da diagonal aos dois lados adjacentes a ela são inversamente proporcionais aos comprimentos desses lados.

9.28 Exercício. Os lados de um triângulo ABC medem $AB = c, AC = b$ e $BC = a$. Por um ponto D , sobre o lado $\overline{AB}$, traça-se a paralela ao lado $\overline{BC}$, formando um trapézio $BDEC$, onde E é um ponto de $\overline{AC}$. Se o perímetro do trapézio é $2p$, ache o perímetro do triângulo ADE .

9.29 Exercício. Mostre que em todo triângulo ABC, a medida h_a, da altura relativa ao vértice A é dada por $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$, sendo $a = BC, b = AC, c = AB$ e p o semi perímetro do triângulo (sugestão: considere a altura $\overline{AD}$ e aplique o teorema de Pitágoras aos dois triângulos retângulos formados).

9.30 Exercício. Um triângulo isósceles cuja razão entre a base e uma lateral é o número áureo, é chamado de triângulo áureo (analogamente, define-se retângulo áureo, elipse áurea, etc.). Calcule os ângulos de um triângulo áureo. Mostre que todos os triângulos áureos são semelhantes entre si.

Capítulo 10

Circunferência

Relacionam-se os fatos básicos relativos à geometria na circunferência, procurando-se enfatizar as relações entre ângulos e arcos. Resultados relacionados a figuras inscritas e circunscritas são também abordados.

10.1 Elementos da circunferência

Recapitulamos, aqui, a definição 3.12, que introduz o conceito de circunferência.

Sejam O um ponto do plano e r um número real positivo. **Circunferência de centro** O e **raio** r é o conjunto de pontos P tais que $OP = r$.

10.1 Observação. Para efeito de notação, indicaremos uma circunferência de centro O e raio r por $C(O, r)$. Muitas vezes, também chamaremos de raio um segmento determinado por O e um ponto qualquer da circunferência.

10.2 Definição. Corda é um segmento cujas extremidades são dois pontos de uma circunferência. **Diâmetro** é uma corda que passa pelo centro.

10.3 Observação. A medida de um diâmetro de uma circunferência de raio r é $2r$ (muitas vezes, chamaremos $2r$ de diâmetro da circunferência!).

10.4 Definição. Uma **secante** a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos.

10.5 Teorema. *Seja s secante a uma circunferência $C(O, r)$ nos pontos A e B (onde $\overline{AB}$ não é um diâmetro). Então um raio intercepta $\overline{AB}$ em seu ponto médio se, e somente se, é perpendicular à s (ou à corda $\overline{AB}$).*

Prova. Suponha que um raio intercepte $\overline{AB}$ em seu ponto médio, M. Os pontos A, M, O e os pontos B, M, O determinam os triângulos AMO e BMO, que são congruentes, pois $AO = BO, AM = MB$ e MO é lado comum. Assim, $A\widehat{M}O = B\widehat{M}O$. Como $A\widehat{M}O$ e $B\widehat{M}O$ são suplementares segue que $A\widehat{M}O = B\widehat{M}O = 90°$; logo, a reta determinada por O e M é perpendicular à reta determinada por A e B, que é a secante considerada. ■

10.6 Exercício. Complete a demonstração do teorema 10.5.

10.7 Definição. Uma **tangente** a uma circunferência é uma reta que tem um único ponto em comum com a circunferência. O ponto comum a uma tangente e a uma circunferência é chamado **ponto de tangência**.

10.8 Definição. Toda semi-reta que tem apenas um ponto em comum com uma círcunferência é dita uma **semi-reta tangente** à circunferência.

10.9 Exercício. Prove que os pontos de uma tangente a uma circunferência, distintos do ponto de tangência, são pontos exteriores à circunferência. (Vide Def. 3.13)

10.10 Teorema. *Uma reta é tangente a uma circunferência se, e somente se, ela é perpendicular a um raio em sua extremidade que não o centro.*

Prova: Seja t a tangente a uma circunferência C(O,r) e T o ponto de tangência.

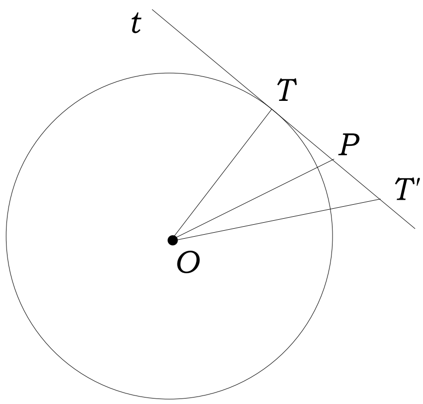


Figura 10.1: Teorema 10.10.

Suponhamos que t não seja perpendicular ao raio $\overline{OT}$. Chamemos de P o pé da perpendicular baixada do ponto O à t. Temos assim definido o $\triangle OPT$, retângulo em P.

Escolha um ponto $T' \neq T$ de t tal que $PT = PT'$. Temos construído o $\triangle OPT'$, congruente a OPT (!); logo, $OT = OT'$. Assim, T' pertence à circunferência e é outro ponto de t distinto de T. Isto significa que t não é tangente à $C(O,r)$, o que contradiz a hipótese. Logo, t é perpendicular ao raio $\overline{OT}$.

Seja OT um raio de uma circunferência e t uma reta perpendicular a $\overline{OT}$ em T. Mostremos que t é tangente à circunferência em T, isto é, que t não tem outro ponto distinto de T, em comum com $C(O,r)$. Seja P qualquer outro ponto de t, $P \neq T$; fica determinado o triângulo OTP, retângulo em T. Logo, $OP > OT$ (!). Portanto, P está no exterior da circunferência. Assim, T é o único ponto comum à t e à $C(O,r)$, e daí t é tangente a $C(O,r)$ em T. ■

10.11 Exercício. Mostre que se P é um ponto exterior a uma circunferência, os segmentos das tangentes traçadas por P são congruentes.

10.12 Exercício. Mostre que uma circunferência está contida em um dos semiplanos determinados por cada uma de suas tangentes.

10.2 Ângulos e arcos numa circunferência

10.13 Definição. Numa circunferência $C(O,r)$ tomemos dois pontos A, B e consideremos o ângulo $A\hat{O}B$. Esse ângulo é chamado **ângulo central.** O subconjunto de $C(O,r)$ obtido pela interseção de $C(O,r)$ com o interior de $A\hat{O}B$ unido com $\{A,B\}$, é um **arco** determinado pelos pontos A e B. Esse arco indicaremos por $\overset{\frown}{AB}$. Se $A\hat{O}B$ é um ângulo raso ao arco $\overset{\frown}{AB}$ chamaremos de **semicircunferência**. Ao subconjunto $(C(O,r) - \overset{\frown}{AB}) \cup \{A,B\}$, chamaremos **arco maior.**

10.14 Observação. A reta determinada por A e B separa o plano em dois semiplanos. Quando $\overline{AB}$ não é um diâmetro, o centro da circunferência está contido no mesmo semiplano que contém o arco maior. Os raios definidos pelo centro O da circunferência e pontos do arco $\overset{\frown}{AB}$ interceptam a corda $\overline{AB}$; aqueles que ligam O aos pontos do arco maior não interceptam a corda $\overline{AB}$.

A cada ângulo central $A\widehat{O}B$ fica associado um único arco $\overset{\frown}{AB}$ na circunferência, e reciprocamente. Isto nos permite dar a seguinte definição para medida de arco.

10.15 Definição. A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é a medida em graus do ângulo central $A\widehat{O}B$. A **medida do arco maior** é 360° menos a medida em graus do arco $\overset{\frown}{AB}$. Caso $\overline{AB}$ seja um diâmetro, os dois arcos determinados por $A\widehat{O}B$ medem 180°. A medida de um arco $\overset{\frown}{AB}$ indicaremos por $m(\overset{\frown}{AB})$.

Uma vez que existe uma correspondência biunívoca entre ângulos centrais e arcos numa circunferência, podemos falar em adição de arcos e comparação de arcos. Assim, numa mesma circunferência, temos as seguintes definições:

10.16 Definição. **1)** $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{A'B'} \Leftrightarrow A\widehat{O}B \equiv A'\widehat{O}B'$ (congruência de arcos)
2) $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A'B'} \Leftrightarrow A\widehat{O}B > A'\widehat{O}B'$ (comparação de arcos)
3) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB} \Leftrightarrow A\widehat{O}B = A\widehat{O}C + C\widehat{O}B$ (adição de arcos)

10.17 Exercício. Mostre que em circunferências de mesmo raio, ângulos centrais congruentes determinam cordas congruentes, e reciprocamente.

10.18 Exercício. Mostre que em circunferências de mesmo raio, cordas congruentes determinam arcos congruentes e arcos maiores de mesma medida.

10.19 Definição. Um ângulo é dito **inscrito** numa circunferência se seu vértice é um ponto da circunferência e seus lados interceptam a circunferência em dois pontos distintos do vértice.

O arco determinado pelos dois pontos distintos e que não contém o vértice do ângulo inscrito é dito **arco subentendido pelo ângulo** ou que **o ângulo subentende o arco**.

10.20 Teorema. *A medida de um ângulo inscrito numa circunferência é igual a metade da medida do arco subentendido por este ângulo.*

Prova. A prova será feita considerando três casos particulares, a saber:
(i) um dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro,
(ii) o ângulo inscrito é dividido pelo diâmetro com extremidade em seu vértice,
(iii) o ângulo inscrito não é dividido pelo diâmetro com extremidade em seu vértice.

Caso (i). Seja $B\widehat{A}C$ o ângulo inscrito com vértice em A. Suponhamos que $\overline{AB}$ é o diâmetro, isto é, $O \in AB$. Assim, $m(\overset{\frown}{BC}) = B\widehat{O}C$. Como $\overline{CO}$ =AO, o triângulo AOC é isósceles com vértice em O e daí $O\widehat{A}C = O\widehat{C}A$. Como $B\widehat{O}C$ é ângulo externo ao triângulo AOC, temos que $B\widehat{O}C = O\widehat{A}C + O\widehat{C}A = 2 \cdot O\widehat{A}C = 2 \cdot B\widehat{A}C$. Logo: $B\widehat{A}C = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC})$. Provamos assim o teorema no caso (i).

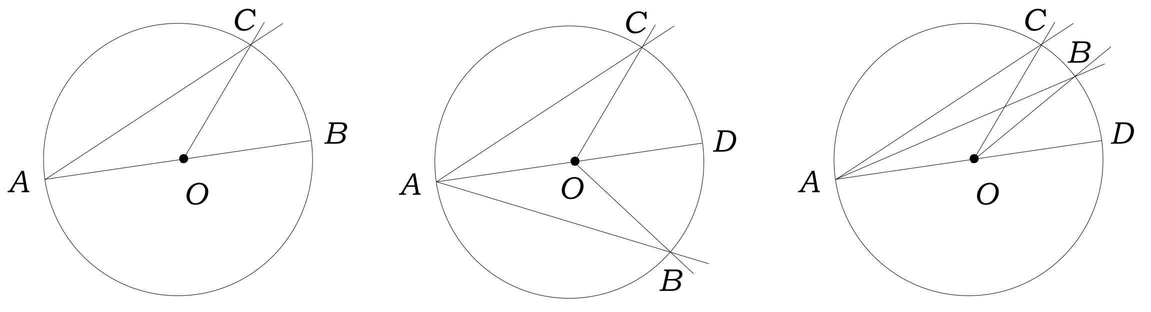


Figura 10.2: Teorema 10.20.

Suponhamos agora que nenhum dos lados do ângulo inscrito contenha um diâmetro. Seja $\overline{AD}$ o diâmetro com extremidade no vértice A do ângulo inscrito. Pelo caso (i) temos que

$$\frac{1}{2}B\widehat{O}D = B\widehat{A}D \text{ e } \frac{1}{2}D\widehat{O}C = D\widehat{A}C. \tag{10.1}$$

Temos nesta situação que considerar os casos (ii) e (iii).

Caso (ii)**:** $\overline{AD}$ divide o ângulo inscrito. Neste caso, $B\widehat{A}C = B\widehat{A}D + D\widehat{A}C$. Daqui e de (10.1), segue que

$$B\widehat{A}C = \frac{1}{2}B\widehat{O}D + \frac{1}{2}D\widehat{O}C = \frac{1}{2}(B\widehat{O}D + D\widehat{O}C) = \frac{1}{2}B\widehat{O}C$$

e, daí, $B\widehat{A}C = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC})$, provando o caso (ii).

Caso (iii)**:** $\overline{AD}$ não divide o ângulo inscrito. No caso em que $\overline{AB}$ divide o ângulo $D\widehat{A}C$ temos que $D\widehat{A}C = D\widehat{A}B + B\widehat{A}C$. Daqui e de (10.1), segue que $\frac{1}{2}D\widehat{O}C = \frac{1}{2}B\widehat{O}D + B\widehat{A}C$. Como $D\widehat{O}C = D\widehat{O}B + B\widehat{O}C$, obtemos

$$\frac{1}{2}\left(D\widehat{O}B + B\widehat{O}C\right) = \frac{1}{2}B\widehat{O}D + B\widehat{A}C,$$

logo,

$$B\widehat{A}C = \frac{1}{2}B\widehat{O}C = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC}).$$

O caso em que é $\overline{AC}$ que divide o ângulo $B\widehat{A}D$ pode ser tratado de forma análoga e é deixada para o leitor como exercício. ■

10.21 Corolário. *Ângulos inscritos que subentendem um mesmo arco são congruentes.*

Prova. Basta observar que a cada ângulo inscrito nessa situação está associado o mesmo ângulo central e aplicar o teorema anterior. ■

10.22 Corolário. *Todos os ângulos inscritos que subentendem uma semicircunferência são retos.*

Prova. Aplicação direta do corolário acima. ■

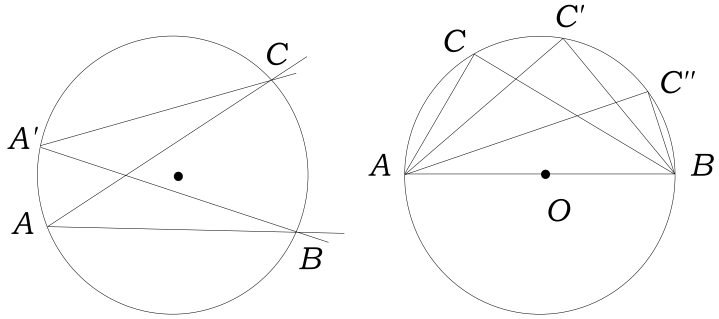


Figura 10.3: Corolários 10.21 e 10.22.

10.23 Exercício. Para qualquer triângulo retângulo existe uma única circunferência que passa pelos três vértices do triângulo (dizemos que todo triângulo retângulo é **inscritível** numa circunferência).

10.24 Observação. Veremos mais adiante (teorema 10.38) que todo triângulo é inscritível numa circunferência.

10.25 Definição. Ângulo semi-inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem vértice na circunferência, um lado secante e o outro lado tangente à circunferência.

Sejam A, B pontos distintos de $C(O,r)$ e t uma reta tangente à $C(O,r)$ em A. Seja C um ponto de t distinto de A; o ângulo com vértice A e lados definidos pelas semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é um ângulo semi-inscrito e o denotaremos por $C\widehat{A}B$. O arco $\overset{\frown}{AB}$ que tem um ponto no interior de $C\widehat{A}B$ é chamado **arco correspondente** ao ângulo $C\widehat{A}B$.

10.26 Teorema. *A medida de um ângulo semi-inscrito é igual à metade da medida do seu arco correspondente.*

Prova. Vamos dividir a demonstração em três casos:
(i) $C\widehat{A}B$ é agudo;
(ii) $C\widehat{A}B$ é reto;
(iii) $C\widehat{A}B$ é obtuso.

Caso (i) : $C\widehat{A}B$ é agudo. O triângulo AOB é isósceles e $B\widehat{A}O + A\widehat{O}B + O\widehat{B}A = 180°$. Como $B\widehat{A}O = O\widehat{B}A$, segue que $2 \cdot B\widehat{A}O = 180° - A\widehat{O}B$ e, então,

$$B\widehat{A}O = 90° - \frac{1}{2}A\widehat{O}B. \tag{10.2}$$

Sendo t tangente à circunferência em A, temos que $C\widehat{A}B + B\widehat{A}O = 90°$ ou

$$B\widehat{A}O = 90° - C\widehat{A}B. \tag{10.3}$$

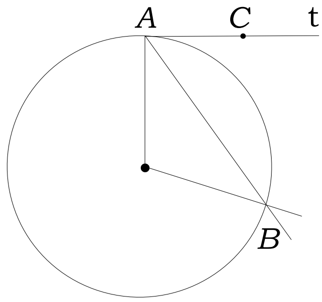


Figura 10.4: Teorema 10.26.

De (10.2) e (10.3), vem que

$$C\widehat{A}B = \frac{1}{2}A\widehat{O}B = \frac{1}{2}m\left(\widehat{AB}\right)$$

e o caso (i) está provado.

Caso (ii): $C\widehat{A}B$ é reto. Neste caso, $\overline{AB}$ é diâmetro e $m(\widehat{AB}) = 180°$. Isto prova (ii).

Caso (iii): $C\widehat{A}B$ é obtuso. Como o suplemento de $t\widehat{A}B$ é agudo, aplicando a este o caso (i), concluímos a prova. ■

10.27 Definição. Consideremos um arco $\widehat{AB}$ contido numa circunferência $C(O,r)$. O **arco complementar de $\widehat{AB}$ relativamente à** $C(O,r)$ é o conjunto de pontos $\{C(O,r) - \widehat{AB}\}$.

10.28 Teorema. *Os vértices dos ângulos inscritos (ou semi-inscritos) a uma circunferência $C(O,r)$ que tem lados passando por dois pontos $A, B \in C(O,r)$ e medem α, $\alpha = \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{AB})$, estão no arco complementar de α relativamente à $C(O,r)$.*

10.29 Definição. O arco construído acima é chamado **arco capaz de α sobre o segmento** $\overline{AB}$.

10.30 Observação. Todos os pontos deste arco "enxergam" o segmento $\overline{AB}$ segundo um ângulo de medida α.

10.31 Exercício. Mostre que dado um segmento $\overline{AB}$ e um ângulo de medida α, existe um arco capaz de α sobre o segmento AB. Esse arco capaz é único?

10.32 Teorema. *Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são cordas distintas de uma mesma circunferência que interceptam-se num ponto P, então $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.*

Prova. Os triângulos APD e CPB são semelhantes, pois $D\widehat{A}P = B\widehat{C}P$, $P\widehat{D}A = C\widehat{B}P$ e $A\widehat{P}D = C\widehat{P}B$ (qual é a semelhança?).

Logo $\frac{CP}{AP} = \frac{PB}{PD}$ e, daí, $AP \cdot PB = CP \cdot PD$. ■

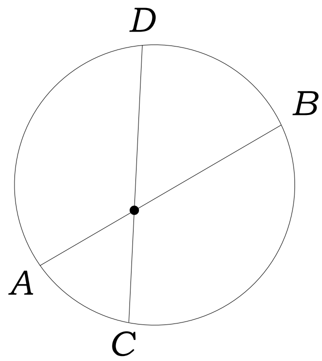


Figura 10.5: Teorema 10.32.

10.33 Exercício. Mostre que se $A_1A_2, A_3A_4, ..., A_{n-1}A_n$ é uma sequência de cordas de uma mesma circunferência e elas interceptam-se num único ponto P, então $A_1P \cdot PA_2 = A_3P \cdot PA_4 = ... = A_{n-1}P \cdot PA_n$. O produto $A_{n-1}P \cdot PA_n$ é chamado **potência de P em relação à circunferência.**

10.34 Exercício. Se por um ponto P, externo a uma circunferência, passamos duas retas que interceptam a circunferência nos pontos A, B, C, D, respectivamente, então $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

10.35 Definição. Um polígono é **inscritível** se existe uma circunferência que contenha todos os seus vértices. Neste caso, a circunferência é dita **circunscrita** ao polígono e o polígono é dito estar **inscrito** na circunferência.

10.36 Lema. *Se ABC é um triângulo qualquer e m, n são retas perpendiculares a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamenteentão m e n se interceptam num ponto.*

10.37 Exercício. Prove o lema acima.

10.38 Teorema. *Todo triângulo é inscritível numa única circunferência.*

Prova. **Existência da circunferência circunscrita.** Seja ABC um triângulo qualquer.

Para provar que o $\triangle ABC$ é inscritível numa circunferência, basta exibir um ponto (que será o centro da circunferência) eqüidistante de A, B e C. Para isso, tomemos os pontos médios M, N de AB, AC, respectivamente, e sua respectivas mediatrizes t, s. Do exercício 5.27, segue o ponto P, interseção de t e s, é eqüidistante de A, B e C, logo, a circunferência $C(P, r)$ com $r = PA$ circunscreve o triângulo. Isto prova a existência.

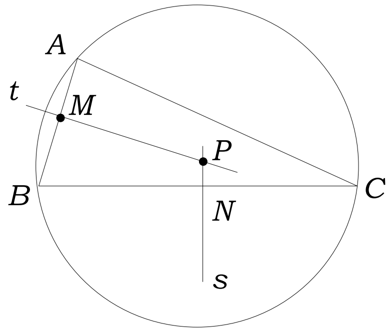


Figura 10.6: Teorema 10.38.

Unicidade. Seja $C(O, r')$ outra circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Seu raio que passa por M é perpendicular a AB, conforme o teorema 10.5, logo, este raio é mediatriz de $\overline{AB}$ e, então, O pertence à mediatriz de AB. Mas, pelo mesmo motivo, o raio de $C(O, r')$ que passsa por N é a mediatriz de AC, de modo que O pertence à mediatriz de AC. Acabamos de mostrar que O é o ponto de interseção das mediatrizes de $\overline{AB}$ e AC. Desde que P é, por definição, o ponto comum das mediatrizes de $\overline{AB}$ e AC, segue que $O = P$. Note que

$$r' = OA = PA = r,$$

sendo a primeira e última igualdades válidas por $C(O, r')$ e $C(P, r)$ serem circunferências circunscritas ao $\triangle ABC$ (a primeira por hipótese e a segunda por construção). Segue que as circunferências $C(O, r')$ e $C(P, r)$ possuem mesmo centro e mesmo raio e, portanto, são iguais. ∎

10.39 Exercício. Diga onde, na prova do teorema acima, foi usado o lema 10.36.

Como consequência imediata do teorema anterior temos o seguinte corolário:

10.40 Corolário. *Em qualquer triângulo, as mediatrizes dos seus lados interceptam-se num único ponto.*

10.41 Corolário. *Três pontos não colineares determinam uma única circunferência.*

10.42 Definição. O ponto comum às três mediatrizes de um triângulo é chamado **circuncentro** do triângulo (centro da circunferência circunscrita).

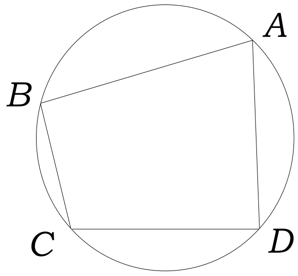


Figura 10.7: Quadrilátero inscrito.

Pelo que vimos no teorema 10.38, os triângulos têm a propriedade de estarem inscritos numa circunferência. Isto não é verdadeiro para um polígono qualquer. Só em situações bem particulares polígonos estarão inscritos numa circunferência. As proposições que seguem esclarecem esse fato.

10.43 Teorema. *Todo quadrilátero inscritível possui um par de ângulos opostos suplementares, e reciprocamente.*

Prova. a) Suponhamos que $ABCD$ seja um quadrilátero que está inscrito numa circunferência. Daí segue que cada um de seus ângulos está inscrito na circunferência, logo, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ subentendem arcos determinados pelos pontos B e D (arcos complementares). Como a medida desses dois arcos soma $360°$, de acordo com o teorema 10.20, $\widehat{A}+\widehat{C}=180°$. Assim, $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ são suplementares.

b) Seja $ABCD$ um quadrilátero que tem um par de ângulos opostos suplementares. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$, segue que o outro par também constitui-se de ângulos opostos suplementares. Consideremos a circunferência determinada pelos pontos A, B, C (vide observação 10.41). Para o outro vértice, D, do quadrilátero só temos três alternativas:

(i) D pertence ao interior da circunferência;
(ii) D pertence ao exterior da circunferência;
(iii) D pertence à circunferência.

Suponhamos que vale **(i)**. Neste caso, tracemos o segmento BD, e seja E o ponto de interseção da semi-reta $\overrightarrow{BD}$ com a circunferência. Obtemos, assim, um quadrilátero $ABCE$ que está inscrito na circunferência. Da parte **a)** do teorema, segue que seus ângulos opostos são suplementares. Em particular, temos:

$$A\widehat{B}C + A\widehat{E}C = 180°. \tag{10.4}$$

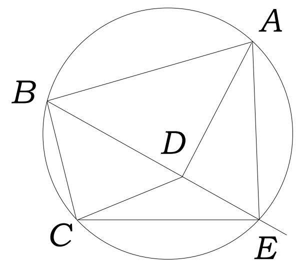


Figura 10.8: Teorema 10.43.

Por hipótese, temos que

$$A\widehat{B}C + A\widehat{D}C = 180°. \tag{10.5}$$

Assim, de (10.4) e (10.5), segue que

$$A\widehat{D}C = A\widehat{E}C. \tag{10.6}$$

Observemos, no entanto, que aplicando o teorema do ângulo externo aos $\triangle AED$ e $\triangle CDE$ temos, respectivamente

$$A\widehat{D}B > A\widehat{E}B \text{ e } C\widehat{D}B > C\widehat{E}B.$$

Assim,

$$A\widehat{E}C = A\widehat{E}B + B\widehat{E}C < A\widehat{D}B + B\widehat{D}C = A\widehat{D}C.$$

Isto entra em contradição com (10.6). Assim, D não pertence ao interior da circunferência.

Se supusermos **(ii)**, isto é, D pertence ao exterior da circunferência, raciocínio análogo também nos levará a uma contradição. Assim, só resta a situação **(iii)**, isto é, D pertence à circunferência e, daí, o quadrilátero $ABCD$ está inscrito na circunferência. ∎

10.44 Exercício. Complete a prova do teorema 10.43 mostrando que **(ii)** também leva a uma contradição.

10.45 Teorema. *Todo polígono regular é inscritível.*

Prova. Seja $A_1A_2...A_n$ um polígono regular. Consideremos a circunferência determinada pelos pontos $A_1A_2A_3$ e seja O o seu centro. O $\triangle A_2OA_3$ é isósceles com vértice O pois $OA_2 = OA_3$, daí, $O\widehat{A}_2A_3 = O\widehat{A}_3A_2$.

Como o polígono é regular todos os seus ângulos internos são congruentes, logo $A_1\widehat{A}_2A_3 = A_2\widehat{A}_3A_4$. Assim, $A_1\widehat{A}_2O = O\widehat{A}_3A_4$ (!) e, como $A_1A_2 = A_3A_4$ e $OA_2 = OA_3$, pelo caso LAL os triângulos OA_1A_2 e OA_3A_4 são congruentes. Segue daí que $OA_4 = OA_1$. Assim, A_4 pertence à circunferência considerada. De modo análogo pode-se provar que A_5 também pertence a essa circunferência. Como o número de vértices do polígono é finito, através de uma sequência de raciocínios análogos ao anterior, mostra-se que todos os vértices pertencem à circunferência. ■

10.46 Exercício. A circunferência que circunscreve um polígono, quando existe, é única.

10.47 Definição. Uma circunferência em que um polígono tem todos os seus lados tangentes é dita estar **inscrita** no polígono. Neste caso, dizemos que o polígono é **circunscritível** e que o polígono **circunscreve** a circunferência.

10.48 Teorema. *Todo triângulo é circunscritível numa única circunferência.*

Prova. Mostremos, inicialmente, a existência da circunferência inscrita.

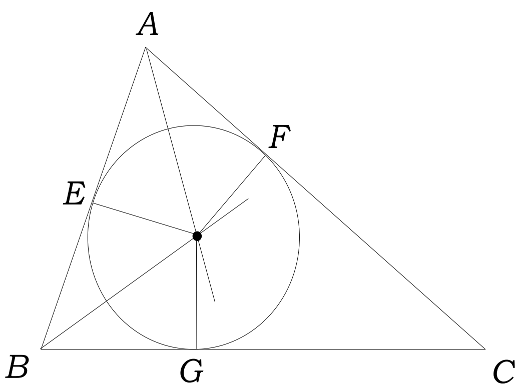


Figura 10.9: Teorema 10.48.

Seja ABC um triângulo; consideremos as bissetrizes b_A e b_B dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$. Essas bissetrizes interceptam-se num ponto P. Por esse ponto, tomemos as retas perpendiculares aos lados AB, AC, BC. Sejam, respectivamente, E, F e G esses pontos. Se mostrarmos que $PE = PF = PG$, o ponto P será centro de uma circunferência que passa pelos pontos E, F, G. Os lados AB, AC e $\overline{BC}$ serão tangentes a essa circunferência nos pontos E, F e G, pois serão perpendiculares, respectivamente, aos raios PE, PF e $\overline{PG}$. Logo, a circunferência construída estará inscrita no triângulo.

Prova de que $PE = PF = PG$. Consideremos os triângulos PFA e PEA. Eles são triângulos retângulos, com PA lado comum e $P\widehat{A}F = P\widehat{A}E$. Assim, $PFA \equiv PEA$ e, daí, $PE = PF$. De modo análogo nos triângulos PEB e PGB, que são triângulos retângulos, temos $P\widehat{B}E = P\widehat{B}G$ e PB lado comum; logo $PEB \equiv PGB$, e, daí, $PE = PG$. Isto conclui a prova da existência.

Provemos agora a unicidade. Seja $C\,(O, r)$ circunferência inscrita em ABC, e E', F', G' os pés das perpendiculares a AB, AC, BC baixadas por O, respectivamente. Os triângulos retângulos OAE' e OAF' são congruentes, pois possuem hipotenusa comum e um par de catetos congruentes. Daí, segue que $\overline{OA}$ é bissetriz de $\widehat{A}$. Analogamente mostra-se que $OAE' \equiv OAG'$, de modo que $\overline{OB}$ é a bissetriz de $\widehat{B}$. O ponto O é a interseção entre as bissetrizes de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, como P é, por definição, o ponto comum a tais bissetrizes, segue que $O = P$. Desde que a perpendicular a uma reta passando por um ponto é única, $E' = E, F' = F$ e $G' = G$; logo, $C(O, r)$ possui o mesmo centro e o mesmo raio da circunferência construída na primeira parte da demonstração deste teorema, portanto, as duas circunferências são iguais. ■

10.49 Exercício. Mostre que o segmento $\overline{PC}$, da prova do teorema anterior, também é bissetriz do triângulo ABC. Conclua daí que "as bissetrizes de um triângulo interceptam-se num único ponto."

10.50 Definição. O ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo chama-se **incentro** (centro da circunferência inscrita).

10.51 Teorema. *Todo quadrilátero circunscritível possui a soma dos comprimentos de dois lados opostos igual a soma dos comprimentos dos outros dois lados, e reciprocamente.*

10.52 Exercício. Prove o teorema anterior.

10.53 Exercício. Prove que todo polígono regular é circunscritível.

10.54 Definição. **Apótema** de um polígono regular é a distância do centro da circunferência inscrita a um dos lados do polígono. **centro** de um polígono regular é o centro desta circunferência (que coincide com o centro da circunferência circunscrita).

10.55 Exercício. Dados uma circunferência e um natural n, mostre que existe um polígono regular de n lados inscrito (circunscrito) na circunferência.

10.56 Exercício. A circunferência inscrita em um polígono, quando existe, é única.

10.3 Trigonometria

Seja θ um número qualquer do intervalo $(0, 180)$. Construamos um ângulo $\widehat{O}$ de medida θ e, sobre um de seus lados, tomemos um ponto arbitrário A, distinto do vértice. Denotamos por B o pé da perpendicular de A ao outro lado do ângulo (ou ao seu prolongamento).

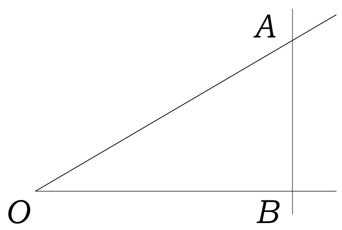


Figura 10.10: Definição 10.57.

10.57 Definição. **(i)** Chamamos de **seno** do número θ, e denotamos por $\operatorname{sen}\theta$, o quociente $\frac{AB}{OA}$.

(ii) Se $0 < \theta \leq 90$, chamamos de **cosseno** do número θ o quociente $\frac{OB}{OA}$. Se $90 < \theta < 180$, chamamos de **cosseno** do número θ o quociente $-\frac{OB}{OA}$. Denotamos o cosseno do número θ por $\cos\theta$.

Definimos ainda,

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \operatorname{sen} 180 = 0, \cos 0 = 1, \cos 180 = -1.$$

10.58 Teorema. *Os valores* $\operatorname{sen}\theta$ *e* $\cos\theta$ *independem do ponto* A *escolhido.*

10.59 Exercício. Prove o teorema anterior (sugestão: use semelhança de triângulos).

Como os valores de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ dependem somente do número θ escolhido, definimos as funções **seno** e **cosseno**, respectivamente, por

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sen}: & [0,180] & \to & \mathbb{R} \\ & \theta & \mapsto & \operatorname{sen}\theta \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \cos: & [0,180] & \to & \mathbb{R} \\ & \theta & \mapsto & \cos\theta. \end{array}$$

10.60 Observação. Note que, as funções seno e cosseno estão bem definidas devido ao teorema 10.58. Se escolhermos o ponto A tal que $OA = 1$, então as definições de seno e cosseno do número θ ficam simplificadas.

10.61 Teorema. *Para todo número real* $\theta \in [0,180]$, *tem-se:*

$\operatorname{sen} 90 = 1$	$\cos 90 = 0$
$0 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$	$-1 \leq \cos\theta \leq 1$
$\operatorname{sen}(180-\theta) = \operatorname{sen}\theta$	$\cos(180-\theta) = -\cos\theta.$

10.62 Exercício. Prove o teorema anterior.

10.63 Teorema. *Para todo número real* $\theta \in [0,180]$, *tem-se*

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1.$$

10.64 Exercício. Prove o teorema anterior.

Nos próximos teoremas desta seção, usaremos a notação $a = BC, b = AC, c = AB$ para as medidas dos lados de um triângulo ABC.

10.65 Teorema. ***(Lei dos senos)*** *Em todo triângulo* ABC, *tem-se*

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{b} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R},$$

sendo R *o raio da circunferência circunscrita ao triângulo* ABC.

Prova. Seja $C(O,R)$ a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

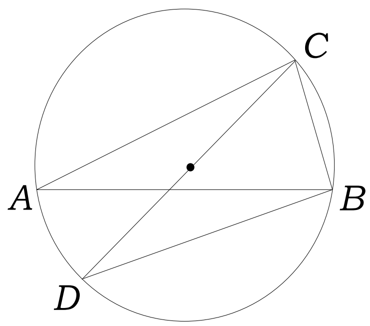


Figura 10.11: O caso $0 < \theta \leq 90$.

Façamos inicialmente o caso $0 < \widehat{A} \leq 90$. Considere o diâmetro $\overline{CD}$ e observe que, do fato de $C\widehat{B}D$ ser um triângulo retângulo, segue que $\operatorname{sen}\widehat{D} = \frac{a}{2R}$. Como os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são congruentes, pois subentendem o mesmo arco, resulta que $\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{a}{2R}$; logo, $\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{a} = \frac{1}{2R}$. Se $90 < \widehat{A} < 180$, então tome E no arco maior determinado por B e C. Como o quadrilátero $ABCE$ está inscrito na circunferência $C(O,R)$, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{E}$ são suplementares; logo, $0 < \widehat{E} \leq 90$. Pelo que acabamos de provar, $\operatorname{sen}\widehat{E} = \frac{a}{2R}$ e, sendo os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{E}$ suplementares, $\operatorname{sen}\widehat{A} = \operatorname{sen}\widehat{E}$. Portanto, $\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{a} = \frac{1}{2R}$. A demonstração de $\frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{b} = \frac{1}{2R}$ e $\frac{\operatorname{sen}\widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R}$ se faz de modo análogo. ■

10.66 Teorema. ***(Lei dos cossenos)*** *Em todo triângulo ABC, tem-se*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Prova. Seja D o pé da perpendicular a $\overline{AC}$ baixada por B. Façamos o caso em que o ângulo $\widehat{A}$ é agudo. Dos triângulos retângulos ABD e BCD resulta que

$$c^2 = BD^2 + AD^2 \text{ e } a^2 = BD^2 + CD^2.$$

Caso D esteja entre A e C, temos que $AD + CD = b$; logo,

$$\begin{aligned} a^2 &= BD^2 + (b - AD)^2 \\ &= BD^2 + b^2 - 2bAD + AD^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bAD \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}. \end{aligned}$$

Caso C esteja entre A e D, temos que $b + CD = AD$; logo,

$$\begin{aligned} a^2 &= BD^2 + (AD - b)^2 \\ &= BD^2 + b^2 - 2bAD + AD^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bAD \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova para o caso em que o ângulo $\widehat{A}$ é agudo. ■

10.67 Observação. Observe que quando $\widehat{A}$ é um ângulo reto, a igualdade do teorema anterior reduz-se ao Teorema de Pitágoras.

10.68 Exercício. Complete a demonstração do teorema anterior para o caso em que $\widehat{A}$ é um ângulo obtuso.

10.4 Comprimento de uma circunferência e de arco de uma circunferência

Seja $C(O,R)$ uma circunferência dada. Pelo exercício 10.55, para cada natural n, existe um polígono regular de n lados inscrito na circunferência. Denotaremos o lado e o perímetro deste polígono por l_n e p_n, respectivamente.

A cada lado do polígono está associado um triângulo isósceles com um vértice em O, laterais de medida R e base de medida l_n. O ângulo do vértice O de cada um destes triângulos mede $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$; logo,

$$p_n = n \cdot l_n = n2R\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}$$

e, então

$$p_n = 2\pi R\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 1,$$

e à medida que n cresce, o perímetro dos polígonos inscritos aproximam-se cada vez mais do comprimento da circunferência, tomamos a seguinte definição:

10.69 Definição. O **comprimento de uma circunferência** de raio R, é $2\pi R$.

Observe que ao multiplicarmos o ângulo central por qualquer natural n, o comprimento do arco correspondente deverá ficar multiplicado por n. Além disso, o comprimento do arco aumenta à medida que o ângulo central cresce, isto é, o comprimento de arco é uma função crescente do ângulo central.

Pelo teorema fundamental da proporcionalidade (vide [14]), temos que o comprimento l de um arco é diretamente proporcional à medida θ do ângulo central, isto é,

$$l = k\theta,$$

sendo k a constante de proporcionalidade. Ela pode ser determinada observando que, para $\theta = \pi$, temos $l = \pi R$; logo, $k = R$. Por isso, tomamos a seguinte definição:

10.70 Definição. O **comprimento de um arco** determinado por um ângulo central de medida θ radianos é $R\theta$.

10.71 Observação. Note que as definições de medida de arco e de comprimento de arco são distintas.

10.5 Exercícios complementares

Indicaremos por R, l_n, a_n as medidas do raio da circunferência circunscrita, do lado e do apótema de um polígono regular de n lados, respectivamente.

10.72 Exercício. Dado o raio da circunferência circunscrita, calcule as medidas do lado e doo apótema do quadrado.

10.73 Exercício. Dado o raio da circunferência circunscrita, calcule as medidas do lado e do apótema do hexágono regular.

10.74 Exercício. Dado o raio da circunferência circunscrita, calcule as medidas do lado e do apótema do triângulo regular.

10.75 Exercício. Dado o raio da circunferência circunscrita, calcule as medidas do lado e o do apótema do decágono regular.

10.76 Exercício. Dado o raio da circunferência circunscrita, calcule as medidas do lado e do apótema do pentágono regular.

10.77 Exercício. Dados o raio da circunferência circunscrita e o lado l_n, calcule a medida do apótema a_n.

10.78 Exercício. Dados o raio da circunferência circunscrita e o lado l_n, calcule a medida del_{2n}.

10.79 Exercício. Calcule a medida do ângulo central determinado pelos lados de um polígono regular de n lados.

10.80 Exercício. Se $A_1A_2...A_{2n}$ é um polígono regular de $2n$ lados (número par de lados!), então suas diagonais $\overline{A_1A_{n+1}}$, $\overline{A_2A_{n+2}}$, ... , $\overline{A_nA_{2n}}$ passam por um único ponto, e este ponto é o centro do polígono. Prove isso.

10.81 Exercício. Se $A_1A_2...A_{2n}$ é um polígono regular de $2n$ lados (número par de lados!), então seus lados $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$; $\overline{A_2A_3}$ e $\overline{A_{n+2}A_{n+3}}$; ... ; $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_{2n}A_1}$; são dois a dois paralelos. Prove isso.

10.82 Exercício. Prove que numa circunferência ou em circunferências de mesmo raio, cordas são congruentes se, e somente se, são equidistantes do centro.

10.83 Exercício. Prove que a mediatriz de uma corda passa pelo centro da circunferência.

10.84 Exercício. Prove que numa mesma circunferência ou em circunferências congruentes, se duas cordas têm comprimentos diferentes, a mais curta é aquela mais afastada do centro.

10.85 Exercício. Prove que todo paralelogramo circunscrito a uma circunferência é um losango.

10.86 Exercício. Prove que a soma dos diâmetros das circunferências inscritas e circunscritas a um triângulo retângulo é igual à soma dos catetos desse triângulo.

10.87 Exercício. Prove que todo trapézio inscrito em uma circunferência é isósceles.

10.88 Exercício. Prove que todo paralelogramo inscrito em uma circunferência é retângulo.

10.89 Exercício. Prove que o segmento determinado por um vértice de um polígono regular e o centro da circunferência em que ele está inscrito é bissetriz do ângulo daquele vértice.

10.90 Exercício. Além do triângulo, existem polígonos inscritos em uma circunferência que são equiângulos, mas que não são regulares? Além do triângulo, existem polígonos circunscritos em uma circunferência que são equiláteros, mas não são regulares?

10.91 Exercício. Além dos polígonos regulares, existem outros polígonos equiângulos inscritíveis. É conveniente subdividirmos os polígonos equiângulos em dois grupos: os que possuem um número ímpar de lados, e os que possuem um número par de lados. Mostre que todo polígono equiângulo, inscritível, com um número ímpar de lados, é regular. Mostre que um polígono $A_1A_2A_3A_4...A_{n-1}A_n$ equiângulo, com um número par de lados, tal que $A_1A_2 = A_3A_4 = ... = A_{n-2}A_{n-1}$ e $A_2A_3 = A_4A_5 = ... = A_{n-1}A_n$, é inscritível.

10.92 Exercício. Além dos polígonos regulares, existem outros polígonos equiláteros circunscritíveis. É conveniente subdividirmos os polígonos equiláteros em dois grupos: os que possuem um número ímpar de lados, e os que possuem um número par de lados. Mostre que todo polígono equilátero, circunscritível, com um número ímpar de lados, é regular. Mostre que um polígono $A_1A_2A_3A_4...A_{n-1}A_n$ equilátero, com um número par de lados, tal que $\widehat{A_1} = \widehat{A_3} = ... = \widehat{A_{n-1}}$ e $\widehat{A_2} = \widehat{A_4} = ... = \widehat{A_n}$, é circunscritível.

10.93 Exercício. Mostre que o diâmetro é a maior corda de uma circunferência.

10.94 Exercício. Mostre que toda reta cuja distância ao centro de uma circunferência seja menor do que o raio, é secante à circunferência.

10.95 Exercício. Mostre que toda reta cuja distância ao centro de uma circunferência é maior do que o raio, é exterior à mesma.

10.96 Exercício. Mostre que, toda reta cuja distância ao centro de uma circunferência é igual ao raio, é tangente à mesma.

10.97 Exercício. Mostre que uma reta e uma circunferência não podem ter mais do que dois pontos em comum.

10.98 Exercício. Mostre que três pontos quaisquer de uma circunferência não estão alinhados.

10.99 Exercício. Enuncie e prove o recíproco do exercício 10.93.

10.100 Exercício. Mostre que em cada ponto de uma circunferência a reta tangente é única.

10.101 Exercício. No caso do exercício 10.11, mostre que se O é o centro da circunferência, T e T' os pontos de tangência, então a semi-reta $\overrightarrow{PO}$ é bissetriz do ângulo $T\widehat{P}T'$, é bissetriz do ângulo $T\widehat{O}T'$ e os ângulos $T\widehat{O}T'$ e $T\widehat{P}T'$ são suplementares.

10.102 Exercício. Estude todas as possíveis posições relativas de duas circunferências.

10.103 Exercício. A reta que contém os centros de duas circunferências é dita **reta dos centros**. Se duas circunferências são tangentes a uma mesma reta em um mesmo ponto, elas são chamadas **circunferências tangentes** e o ponto é chamado **ponto de contato.**

Mostre que se duas circunferências são tangentes, a reta dos centros passa pelo ponto de contato.

10.104 Exercício. Na figura 10.12, P é a interseção de duas tangentes comuns a duas circunferências. Mostre que a reta dos centros passa por P .

10.105 Exercício. Mostre que se duas circunferências têm dois pontos em comum, a reta dos centros é mediatriz do segmento determinado por esses dois pontos.

10.106 Exercício. Mostre que duas circunferências distintas não podem ter mais do que dois pontos em comum.

10.107 Exercício. Descreva um método para traçar uma circunferência de raio conhecido e que seja tangente aos lados de um ângulo dado.

10.108 Exercício. Duas circunferências interceptam-se nos pontos A e B . Por B traça-se uma reta que intercepta uma das circunferências num ponto X e a outra num ponto Y . Mostre que a medida do ângulo $X\widehat{A}Y$ independe da reta traçada.

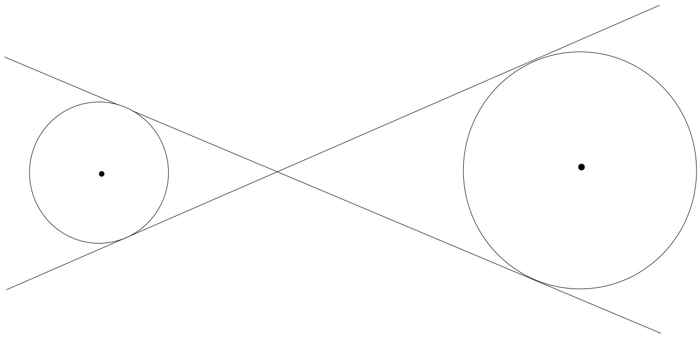


Figura 10.12: Exercício 10.104.

10.109 Exercício. Sejam dadas duas circunferências tangentes exteriores (isto é, uma não está contida no interior da outra) e, pelo ponto de tangência, tracemos duas secantes comuns. Mostre que as cordas que ligam as extremidades das secantes em cada circunferência são paralelas.

10.110 Exercício. Mostre que as tangentes traçadas à uma circunferência pelos extremos de um mesmo diâmetro são paralelas.

10.111 Exercício. Utilizando a lei dos cossenos, expresse cada uma das medianas de um triângulo em função de seus lados.

10.112 Exercício. Mostre que todo segmento definido por um ponto fora e por outro ponto dentro de uma circunferência tem um ponto em comum com a circunferência.

10.113 Exercício. Mostre que a razão entre os raios das circunferências inscritas de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança.

10.114 Exercício. Mostre que a razão entre os raios das circunferências circunscritas de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança.

10.115 Exercício. Mostre que o raio da circunferência inscrita em um triângulo de lados a, b, c e semiperímetro p é dado por $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

10.116 Exercício. O lugar geométrico dos pontos que "enxergam" um segmento $\overline{AB}$ segundo um ângulo α é o arco capaz de α sobre AB. Qual é o lugar geométrico dos pontos que "enxergam" uma circunferência segundo um ângulo α?

Capítulo 11

Resultados Notáveis sobre Triângulos

Apresenta-se alguns resultados que são característicos de triângulos; em particular, mostra-se a existência de alguns pontos notáveis, além de teoremas que afirmam certas propriedades curiosas.

11.1 Pontos notáveis de um triângulo

No corolário 10.40, vimos que, em todo triângulo, as três mediatrizes interceptam-se num mesmo ponto. Esse ponto é chamado **circuncentro** do triângulo; ele é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. Do mesmo modo, no teorema 10.48, vimos que a todo triângulo existe uma circunferência inscrita e que o centro dela é o ponto comum às três bissetrizes do triângulo. Esse ponto é chamado **incentro** do triângulo.

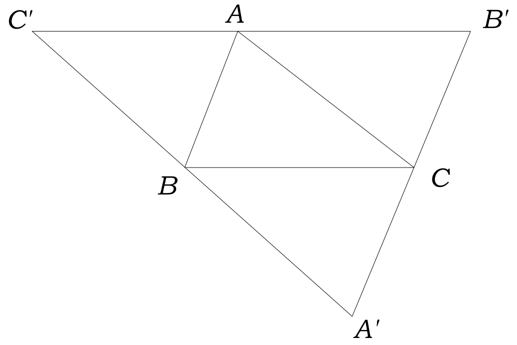
O resultado seguinte nos diz que as três alturas de um triângulo interceptam-se num único ponto

11.1 Teorema. *As retas que contém as três alturas de um triângulo interceptam-se num ponto. (esse ponto é chamado* ***ortocentro*** *do triângulo).*

Prova*:* Seja ABC um triângulo qualquer e, através de cada um de seus vértices, tracemos retas paralelas aos lados opostos, obtendo um triângulo $A'B'C'$, onde A' está na interseção das paralelas passadas por B e C, B' está na interseção das paralelas que passam por A e C, e C' na interseção das paralelas que passam por A e B (figura 11.1 a esquerda).

Assim, os quadriláteros $ABCB'$ e $ACBC'$ são paralelogramos e, daí, $AB' = overlineBC = C'A$. Desde que $\overline{B'C'}$ é paralelo a $\overline{BC}$, a altura traçada a partir de A ao lado $\overline{BC}$ é a perpendicular que bissecta o segmento $\overline{B'C'}$; o mesmo valendo para as alturas traçadas por B e C. Em outras palavras, as três alturas do triângulo ABC são perpendiculares, que bissectam os três lados do triângulo $A'B'C'$ (isto é, são as mediatrizes do triângulo $A'B'C'$). Daí, pelo corolário 10.40, segue que essas três alturas interceptam-se num ponto. ■

O próximo teorema afirma que as medianas de um triângulo interceptam-se num único ponto.



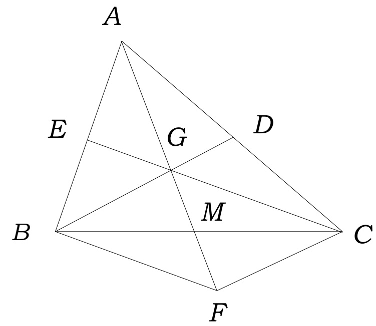


Figura 11.1: Teoremas 11.1 e 11.2.

11.2 Teorema. *As retas que contém as três medianas de um triângulo interceptam-se num ponto. (esse ponto é chamado* ***centróide*** *ou* ***baricentro*** *do triângulo).*

Prova: Seja ABC um triângulo, com $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ medianas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente (figura 11.1 a direita).

Seja G o ponto de interseção de $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$. Prolonguemos $\overline{AG}$ até um ponto F tal que $GF = AG$. No triângulo ABF, os pontos E e G são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AF}$, respectivamente. Do teorema 7.58, segue que $\overline{BF}$ e $\overline{EG}$ são paralelas e, daí, $\overline{BF}$ e $\overline{GC}$ são paralelas.

Analogamente, $\overline{CF}$ e $\overline{GB}$ são paralelas. O quadrilátero $BFCG$ é um paralelogramo; suas diagonais $\overline{BC}$ e $\overline{FG}$ interceptam-se no ponto médio, M. Assim, o prolongamento de $\overline{AG}$ passa por M, ponto médio de $\overline{BC}$, isto é, $\overline{AM}$ é mediana relativa ao lado BC. Portanto, as três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto. ■

11.3 Corolário. *O baricentro divide cada mediana em dois segmentos na razão de* 2 *para* 1.

Prova: Da prova do teorema 11.2, temos que:

$$AG = GF = 2 \cdot GM$$
$$CG = FB = 2 \cdot CE$$

Analogamente, $BG = 2 \cdot GD$. ■

11.4 Exercício. Na prova do teorema 11.2, justifique a existência do ponto G e do ponto F. No corolário 11.3, prove que $BG = 2 \cdot GD$.

11.5 Teorema. *Em qualquer triângulo, as bissetrizes de dois ângulos externos e aquela do ângulo interno restante interceptam-se num ponto. (esse ponto é chamado* ***excentro*** *do triângulo).*

Prova: A prova deste teorema é análoga àquela do teorema 10.48.

11.6 Observação. O ponto mencionado acima é também centro de uma circunferência que é tangente ao prolongamento de dois lados e ao lado restante do triângulo. Um triângulo tem três excentros.

11.7 Teorema. ***(Giovanni Ceva, 1648-1734)*** *Sejam P, Q, R pontos sobre os lados BC, AC, AB (ou prolongamento deles) do triângulo ABC. As semi-retas $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{CR}$ interceptam-se num ponto se, e somente se,*

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

<u>**Prova:**</u> A figura 11.2 ilustra as duas situações:

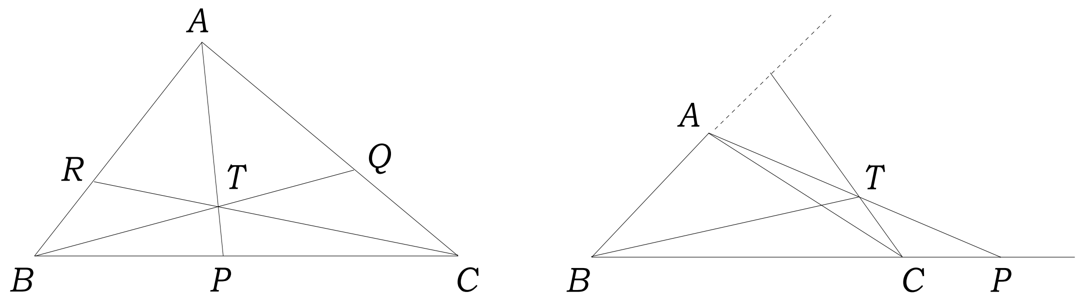


Figura 11.2: Teorema de Ceva.

Suponhamos que AP, BQ e $\overline{CR}$ interceptam-se num ponto, digamos T. Tracemos a reta que passa por A e é paralela a $\overline{BC}$; ela intercepta $\overline{BQ}$ e $\overline{CR}$ nos pontos B' e C', respectivamente (ou seus prolongamentos). Desde que os triângulos BPT e $B'AT$ são semelhantes, bem como os triângulos CPT e $C'AT$ são semelhantes, temos que

$$\frac{BP}{PT} = \frac{AB'}{AT} \text{ e } \frac{PT}{PC} = \frac{AT}{AC'};$$

logo,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB'}{AC'}.$$

Analogamente,

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{AB'} \text{ e } \frac{AR}{RB} = \frac{AC'}{BC}.$$

Multiplicando membro a membro as três últimas igualdades, temos que:

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

Provemos agora a recíproca. Seja T a interseção de $\overline{BQ}$ e $\overline{CR}$ (ou de seus prolongamentos) e P' a interseção de $\overline{AT}$ e $\overline{BC}$ (ou seus prolongamento). Do que já provamos, segue que

$$\frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \tag{11.1}$$

Por outro lado, por hipótese, temos que:

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1. \tag{11.2}$$

De (11.1) e (11.2), segue que

$$\frac{BP'}{P'C} = \frac{BP}{PC} \tag{11.3}$$

Adicionando 1 a ambos os membros de (11.3) caso $B - P - C$, e -1 caso contrário, temos

$$\frac{BP' + P'C}{P'C} = \frac{BP + PC}{PC};$$

logo $\frac{BC}{P'C} = \frac{BC}{PC}$ e daí $P'C = PC$,o que implica $P' = P$. ∎

Como corolários do Teorema de Ceva podemos obter os resultados dos teoremas 10.48, (11.1) e (11.2). De fato, se no Teorema de Ceva, tomarmos P, Q, R como pontos médios de $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$, respectivamente, temos:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{AR}{RB} = 1,$$

e, daí, a condição suficiente do teorema estará satisfeita, levando-nos a concluir que as medianas de um triângulo interceptam-se num ponto (vide teorema 11.2).

Se tomarmos as retas passando por A, B, C e perpendiculares a BC, AC, AB, respectivamente, temos P, Q, R os pés dessas perpendiculares; com $a = BC$, $b = CA$ e $c = AB$, temos:

$$BP = c\cos\widehat{B}, PC = b\cos\widehat{C}, CQ = a\cos\widehat{C},$$
$$QA = c\cos\widehat{A}, AR = b\cos\widehat{A}, RB = a\cos\widehat{B}.$$

Daí,

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB} = \frac{c\cos\widehat{B}}{b\cos\widehat{C}}\cdot\frac{a\cos\widehat{C}}{c\cos\widehat{A}}\cdot\frac{b\cos\widehat{A}}{a\cos\widehat{B}} = 1,$$

e, pelo Teorema de Ceva, concluímos que as alturas de um triângulo interceptam-se num ponto (vide teorema 11.1).

Vimos, no Teorema da Bissetriz Interna que, as bissetrizes de um ângulo de um triângulo, dividem o lado oposto em dois segmentos cujos comprimentos estão na mesma razão que o comprimento dos dois lados restantes.

Sejam, então, P, Q e R as interseções das bissetrizes em A, B e C com os respectivos lados opostos. Pelo resultado acima, segue que

$$\frac{BP}{PC} = \frac{c}{b}, \frac{CQ}{QA} = \frac{a}{c}, \frac{AR}{RB} = \frac{b}{a},$$

e, daí,

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB} = \frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a} = 1.$$

Pelo Teorema de Ceva, concluímos que as bissetrizes de um triângulo interceptam-se num ponto (vide teorema 10.48).

Em resumo: os resultados dos teoremas 10.48, 11.1 e 11.2 são casos especiais do Teorema de Ceva.

11.8 Teorema. ***(Euler)*** *Em qualquer triângulo, seu baricentro, ortocentro e circuncentro são pontos colineares.*

Prova: *S*eja ABC um triângulo qualquer. Consideremos as medianas relativas aos lados BC, AC, AB e chamemos de M_A, M_B, M_C os pontos médios de BC, AC, AB, respectivamente. Seja G o baricentro do triângulo ABC, isto é, G é o ponto comum a M_A, M_B, M_C (vide teorema 11.2). Fica, assim, determinado o triângulo $M_AM_BM_C$.

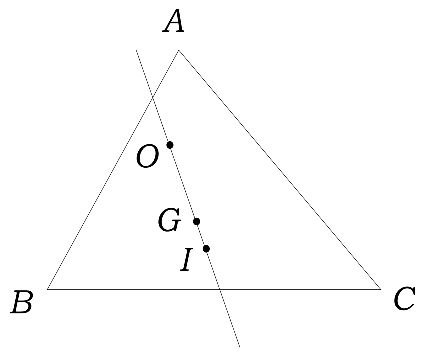


Figura 11.3: A reta de Euler.

Como $M_CM_B = \frac{1}{2}BC$, $M_CM_A = \frac{1}{2}AC$ e $M_AM_B = \frac{1}{2}AB$, segue que os triângulos $M_AM_BM_C$ e ABC são semelhantes com razão de semelhança igual a $1/2$. Sabemos, do exercício 9.22, que, nesses triângulos, segmentos homólogos estão entre sí na mesma razão, $1/2$.

Agora, pelo ponto A tracemos o segmento $\overline{AH_A}$, altura relativa ao lado $\overline{BC}$. Por M_B, tracemos a perpendicular a $\overline{AC}$ que vai interceptar a perpendicular a $\overline{BC}$ pelo ponto M_A, no ponto I. Essas perpendiculares são mediatrizes dos lados $\overline{AC}$ e BC, respectivamente; logo, I é o circuncentro do triângulo ABC (vide teorema.10.38). Por outro lado, a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ intercepta $\overline{AH_A}$ num ponto O, o ortocentro do triângulo ABC (vide teorema 11.1).

Queremos provar que G, O, I, estão sobre uma mesma reta. Para isso, vamos considerar o triângulo AOG e M_AIG. Temos que I é o ortocentro do triângulo $M_AM_BM_C$ (!), daí $M_AI = \frac{1}{2}AO$, e ainda, $M_AG = \frac{1}{2}AG$. Por outro lado, $\overline{AO}$ e $\overline{M_AI}$ são paralelas cortadas pela transversal $\overline{AM_A}$; logo, os ângulos $G\widehat{A}O$ e $G\widehat{M_A}I$ são congruentes. Pelo segundo caso de semelhança de triângulos, segue que os triângulos AOG e M_AIG são semelhantes, logo, os ângulos $A\widehat{G}O$ e $M_A\widehat{G}I$ são congruentes. Assim $\overrightarrow{GO}$ e $\overrightarrow{GI}$ são semi-retas opostas (!) e, portanto, os pontos G, O, I são colineares. ■

11.9 Observação. A reta que contém o baricentro, ortocentro e o circuncentro de um triângulo é chamada **reta de Euler** (em homenagem a Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço que descobriu e demonstrou o teorema 11.8).

11.10 Exercício. Mostre que o ponto I no teorema 11.8 é o ortocentro do triângulo $M_AM_BM_C$.

11.2 Pontos de Brocard

Seja ABC um triângulo qualquer.

11.11 Definição. O ponto P, no interior de ABC, é chamado **primeiro ponto de Brocard** se $P\widehat{A}C = P\widehat{C}B = P\widehat{B}A$. O ponto Q, no interior de ABC, é chamado **segundo ponto de Brocard** se $Q\widehat{A}B = Q\widehat{C}A = Q\widehat{B}C$ (figura 11.4).

11.12 Teorema. *Em qualquer triângulo, existe um único primeiro ponto de Brocard.*

Prova: Seja ABC um triângulo e sobre seus lados construamos os triângulos A_1BC, AB_1C e ABC_1, semelhantes ao triângulo ABC, como mostrado na figura 11.5. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC.

Como $P\widehat{C}B = \widehat{C} - P\widehat{C}A$, as relações $P\widehat{A}C = P\widehat{C}B$ e $P\widehat{A}C = \widehat{C} - P\widehat{C}A$ são equivalentes. Assim, $\widehat{C} = P\widehat{A}C + P\widehat{C}A = 180° - A\widehat{P}C$. Daí, para um ponto P no interior do triângulo ABC,

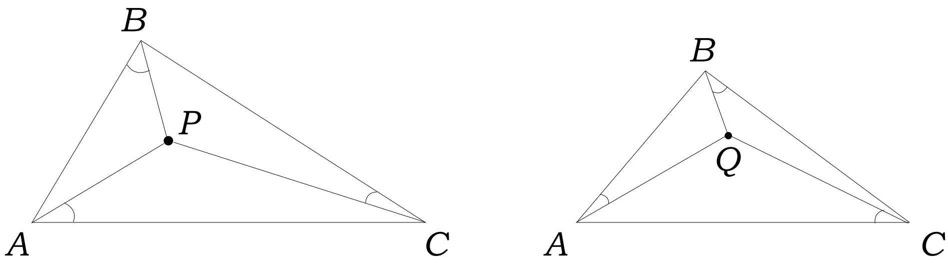


Figura 11.4: Pontos de Brocard.

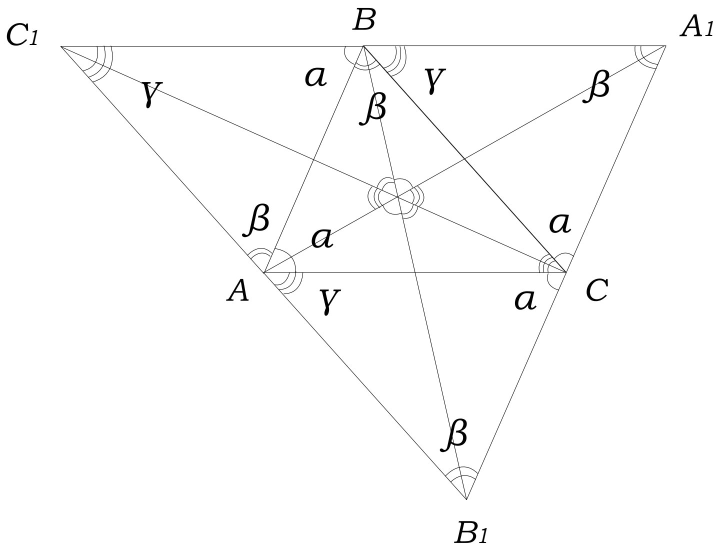


Figura 11.5: Triângulos A_1BC, AB_1C, ABC_1.

temos: $\widehat{C} = 180° - A\widehat{P}C$ se, e somente se, P é um ponto sobre a circunferência circunscrita ao triângulo AB_1C (teorema 10.43).

Um argumento análogo para os outros ângulos mostra que vale o seguinte resultado (existência do primeiro ponto de Brocard): P é o primeiro ponto de Brocard se, e somente se, ele pertence às três circunferências circunscritas aos três triângulos A_1BC, AB_1C e ABC_1.

A unicidade do primeiro ponto de Brocard segue da unicidade das circunferências circunscritas aos triângulos A_1BC, AB_1C e ABC_1. ■

11.13 Corolário. *Os segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ e $\overline{CC_1}$ passam pelo ponto P.*

Prova: Liguemos o ponto P a todos os vértices dos triângulos considerados. Da congruência de ângulos inscritos que subentendem o mesmo arco, os ângulos são precisamente como mostrado na figura 11.5. Desde que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, temos que os segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ e $\overline{CC_1}$ passam pelo ponto P. ■

11.14 Corolário. *P é ponto de interseção das três circunferências tangentes às retas AB, BC, AC nos pontos A, B e C, e que passam pelos pontos C, A e B, respectivamente.*

<u>Prova:</u> Desde que $A\widehat{B}C \equiv B\widehat{A_1}C, B\widehat{C}A \equiv C\widehat{B_1}A, C\widehat{A}B \equiv A\widehat{C_1}B$, segue que as circunferências circunscritas aos triângulos A_1BC, AB_1C, ABC_1 são tangentes às retas AB, BC, AC nos pontos A, B e C, respectivamente. ■

11.15 Exercício. Sobre os lados do triângulo ABC construa triângulos A_1BC, AB_1C e ABC_1, semelhantes ao triângulo ABC, de modo que $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ e $\overline{CC_1}$ interceptam-se no segundo ponto de Brocard (justifique sua construção). Prove ainda que o segundo ponto de Brocard é único.

Vejamos agora algumas propriedades interessantes dos pontos de Brocard.

11.16 Teorema. *Se P é o primeiro ponto de Brocard e se as retas $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CP}$ interceptam a circunferência circunscrita ao triângulo ABC nos pontos A_1, B_1e C_1, respectivamente, então os triângulos ABC e $B_1C_1A_1$ são congruentes (para o segundo ponto de Brocard temos ABC e $C_1A_1B_1$ congruentes).*

<u>Prova:</u> Os arcos $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{A_1C_1}$ são congruentes pois

$$BA_1C = \overset{\frown}{BA_1} + \overset{\frown}{A_1C}, A_1\overset{\frown}{B}C_1 = \overset{\frown}{A_1B} + \overset{\frown}{BC_1}$$

e $\overset{\frown}{BC_1} = \overset{\frown}{A_1C}$, daí, subentendem cordas congruentes, isto é, $BC = A_1C_1$. Analogamente, podemos mostrar que $AB = C_1B_1$ e $AC = A_1B_1$. Assim, pelo teorema 4.20, segue que $ABC \equiv B_1C_1A_1$. ■

11.17 Exercício. Prove que para o segundo ponto de Brocard $ABC \equiv C_1A_1B_1$.

11.18 Teorema. *Se $\overline{PA'}$, $\overline{PB'}$ e $\overline{PC'}$ são segmentos com extremidades no primeiro ponto de Brocard, P, e perpendiculares aos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, então os triângulos ABC e $B'C'A'$ são semelhantes e a razão de semelhança é $sen\varphi$, onde $\varphi = P\hat{A}C = P\widehat{C}B = P\widehat{B}A$. φ é chamado* ***ângulo de Brocard****.*

Prova: Os pontos B' e C' pertencem à circunferência com diâmetro AP, daí,

$$B'\widehat{C'}P = B'\widehat{A}P = \varphi \text{ e } C'\widehat{B'}P = C'\widehat{A}P = \alpha - \varphi.$$

Analogamente,

$$C'\widehat{A'}P = \varphi \text{ e } A'\widehat{C'}P = \beta - \alpha; A'\widehat{B'}P = \varphi \text{ e } B'\widehat{A'}P = \gamma - \varphi.$$

Assim, os ângulos do triângulo $B'C'A'$ são congruentes aos ângulos do triângulo ABC e, daí, esses triângulos são semelhantes. Além disso, os ângulos dos triângulos ABP e $B'PC'$ são congruentes, logo $\frac{B'C'}{AB} = \frac{B'P}{AP} = sen\varphi$. ■

11.3 Exercícios complementares

11.19 Exercício. Mostre que traçando-se pelo baricentro de um triângulo uma reta qualquer que corta dois lados do mesmo, a soma das distâncias dessa reta a dois vértices, situados no mesmo semi plano relativo à reta traçada, é igual à distância dessa reta ao terceiro vértice.

11.20 Exercício. Prove que a soma das distâncias dos vértices de um triângulo a uma reta qualquer é igual a três vezes a distância dessa reta ao baricentro do triângulo considerado.

11.21 Exercício. Prove que a soma das distâncias dos vértices de um triângulo a uma reta arbitrária é igual à soma das distâncias desta reta ao ponto médio dos três lados do triângulo.

11.22 Exercício. Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer.

Mostre que entre o ângulo de Brocard e os ângulos α, β, γ do $\triangle ABC$ subsistem as relações:

(a) cotgφ =cotgα+cotgβ+cotgγ (sugestão: observe a figura 11.6).

(b) sen$^3\varphi$ =sen$(\alpha-\beta)$sen$(\beta-\varphi)$sen$(\gamma-\varphi)$(sugestão: use a lei dos senos nos triângulos APB, APCe BPC).

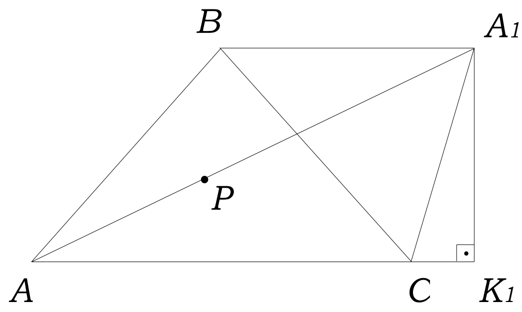


Figura 11.6: Exercício 11.22.

Capítulo 12

Construções com Régua e Compasso

Os gregos antigos, pais da geometria axiomática, sempre tiveram verdadeiro fascínio por resolverem problemas de geometria, construíndo suas soluções mediante uso de uma régua não gra- duada e de um compasso. Para isso, eles possuíam regras para construção que definiam quais as operações permitidas para poder-se traçar figuras num plano. Apresenta-se nesse capítulo essas regras e descreve-se a resolução de alguns problemas, apresentando uma construção para cada um deles.

12.1 Regras para construção com régua e compasso

Regra 1: *Só é permitido traçar segmentos e circunferências utilizando-se uma régua não graduada e um compasso.*

Regra 2: *Supõe-se, previamente dado, um segmento com comprimento unitário.*

Regra 3: *Se A e B são pontos previamente dados ou construídos, pode-se "ligar" A e B construíndo o segmento AB; se este segmento intercepta qualquer segmento ou circunferência previamente construídos, tem-se construídos os pontos de interseção.*

Regra 4: *Se AB é um segmento previamente construído e O um ponto dado, ou previamente construído, pode-se traçar uma circunferência com centro em O e raio AB; se esta circunferência intercepta qualquer segmento ou circunferência previamente construídas, tem-se construídos os pontos de interseção.*

Regra 5: *Se AB é um segmento previamente construído, pode-se prolongá-lo, em ambos os sentidos, até interceptar um segmento ou circunferência previamente construídos (assumindo que o segmento ou a circunferência intercepta o prolongamento do segmento dado), construindo-se, assim, um ponto.*

Regra 6: *O único meio de se construir uma figura é aplicando as regras anteriores um número finito de vezes.*

12.2 Alguns problemas de construção e suas soluções

Para cada construção proposta nos problemas, execute os traçados indicados.

12.1 Problema. *Dados dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, construir um segmento soma de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (entende-se por soma de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ um segmento que tenha medida igual à soma das medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$).*

Construção:

Figura 12.1: Problema 12.1.

1. Com centro em B e raio $\overline{CD}$ traçamos uma circunferência.

2. Prolongamos $\overline{AB}$ (no sentido de A para B) até interceptar a circunferência construída no ponto E. O segmento $\overline{AE}$ é a soma desejada.

Desenho*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.1.

12.2 Problema. *Dado um segmento $\overline{AB}$, obter seu ponto médio M e sua mediatriz.*

Construção:

1. Com centro em A e raio $\overline{AB}$ traçamos uma circunferência C_1;

Figura 12.2: Problema 12.2.

2. Com centro em B e raio $\overline{AB}$ traçamos uma circunferência C_2. Obtemos os pontos P_1 e P_2 na interseção de C_1 e C_2.

3. Traçamos o segmento $\overline{P_1P_2}$ obtendo o ponto procurado, M, na interseção dele com $\overline{AB}$. A reta $\overline{P_1P_2}$ é a mediatriz procurada.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.2.

12.3 Problema. *Construir um segmento que passa por um ponto dado e é paralelo a um dado segmento de reta que não contém esse ponto.*

Construção:

Seja P o ponto e $\overline{AB}$ o segmento dado.

1. Centro em B e raio $\overline{AP}$ traçamos uma circunferência C_1.

2. Com centro em P e raio $\overline{AB}$ traçamos uma segunda circunferência, C_2. Seja D o ponto de interseção de C_1 e C_2, onde D e A estão em lados opostos relativamente a $\overline{PB}$. Assim, $\overline{PD}$ é a paralela desejada.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.3.

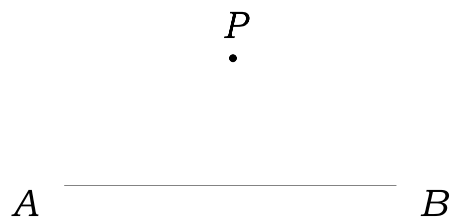


Figura 12.3: Problema 12.3.

12.4 Problema. *Construir um segmento que passa por um ponto dado, e é perpendicular a uma reta, também dada.*

Construção:
Sejam P e r o ponto e a reta dados, respectivamente.

1. Marquemos um ponto A sobre r e traçamos uma circunferência de centro P, cortando a reta r em outro ponto B.

2. Tracemos circunferências de raio $\overline{AB}$ com centros em A e B obtendo Q, um dos pontos de interseção. A reta $\overline{PQ}$ é perpendicular a $\overline{AB}$.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.4.

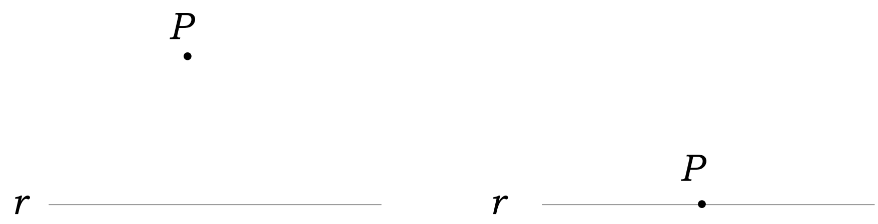


Figura 12.4: Problema 12.4.

12.5 Observação. A partir de agora, é permitido utilizar esquadros para o traçado de perpendiculares e paralelas. Note que, de acordo com os problemas acima, estes instrumentos são dispensáveis para tais traçados, visto que, somente com régua não graduada e compasso, podemos traçar perpendiculares e paralelas. O uso dos esquadros tem a vantagem de agilizar a resolução dos problemas seguintes.

12.6 Problema. *Construir uma semi-reta que divide um ângulo dado em dois outros ângulos congruentes (bissecção de um ângulo).*

Construção: Seja $A\widehat{B}C$ um ângulo dado.

1. Com centro em B e raio $\overline{BA}$, tracemos uma circunferência que intercepta $\overline{BC}$ no ponto E. Pode ocorrer que a circunferência não intercepte $\overline{BC}$. Neste caso, prolonguemos $\overline{BC}$ no sentido de B para C até interceptar a circunferência num ponto que será chamado de E.

2. Com centro em A e raio AE, tracemos a circunferência C_1 e com centro em E raio AE, tracemos a circunferência C_2. Essas duas circunferências interceptam-se em dois pontos. Seja

F o ponto de interseção que está no semi plano oposto àquele determinado por $\overline{AE}$ e que não contém B. Observemos que AEF é um triângulo equilátero.

3. Liguemos B a F para obter o segmento $\overline{BF}$ que bissecta o ângulo $A\widehat{B}C$.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.5, a esquerda.

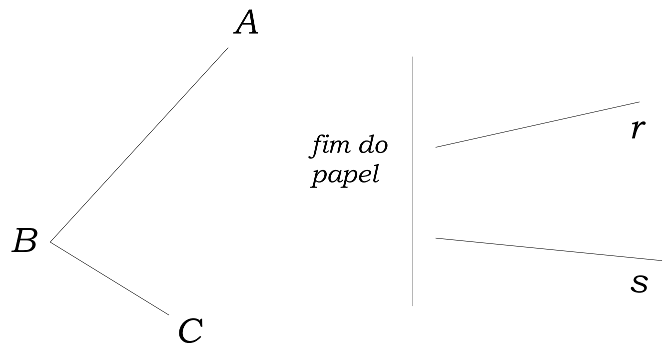


Figura 12.5: Problemas 12.6 e 12.7.

12.7 Problema. *Construir a bissetriz de um ângulo cujo vértice é inacessível.*

Construção:
Sejam r, s os lados do ângulo.

1. Passemos uma paralela à r que intercepta s no ponto A.

2. Centro em A e raio qualquer, tracemos uma circunferência que intercepta s e a paralela à r nos pontos B, C, respectivamente.

3. Unimos B a C e prolonguemos até encontrar r num ponto D.

4. A mediatriz de $\overline{BD}$ é a bissetriz procurada.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima.

12.8 Problema. *Dado um ângulo θ de vértice O e uma semi-reta $\overrightarrow{O'B}$, construir um ângulo $A\widehat{O'}B = \theta$.*

Construção:

1. Tracemos uma circunferência qualquer de centro O, determinando os pontos P e Q nos lados do ângulo θ, e uma circunferência de mesmo raio, e centro em O', determinando P' em $\overline{O'B}$.

2. Com raio PQ, tracemos uma circunferência de centro P' para determinar Q' sobre a primeira circunferência.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.6.

Relembremos a definição de arco capaz. Consideremos dois pontos, A e B, sobre uma circunferência. Para todo ponto M sobre um dos arcos determinados por A, B, o ângulo $A\widehat{M}B$ tem sempre medida θ. Este arco chama-se arco capaz do ângulo θ sobre o segmento $\overline{AB}$. Assim, um observador, portanto, que mova-se sobre este arco, consegue ver o segmento $\overline{AB}$ sempre sob mesmo ângulo. Para qualquer ponto N pertencente ao outro arco, o ângulo $A\widehat{N}B$ é também constante e igual a $180° - \theta$.

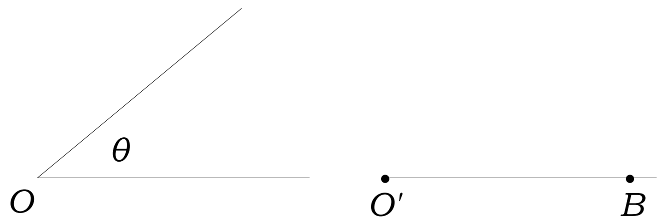


Figura 12.6: Problema 12.8.

É ainda interessante lembrar que se M é qualquer ponto da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, o ângulo $A\widehat{M}B$ é reto e, portanto, cada semi circunferência é também o arco capaz de 90° sobre AB.

12.9 Problema. *Dados o segmento $\overline{AB}$ e o ângulo $\theta = B\widehat{A}X$, construir o arco capaz do ângulo θ sobre $\overline{AB}$.*

Construção:

1. Tracemos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ e a perpendicular à $\overline{AX}$ no ponto A.

2. A perpendicular à AX, traçada por A, encontra a mediatriz de $\overline{AB}$ em O, centro do arco capaz.

3. O arco de centro O e extremidades A e B situado em semi plano oposto a X (semiplanos relativos a $\overline{AB}$) é o arco capaz do ângulo θ sobre $\overline{AB}$.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.7.

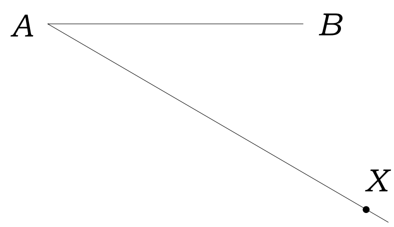


Figura 12.7: Problema 12.9.

12.10 Problema. *Obter o centro de uma circunferência dada.*

Construção:

1. Marquemos três pontos arbitrários A, B, C sobre a circunferência.

2. Tracemos as mediatrizes de $\overline{AB}$ e AC.

3. O ponto O de encontro das mediatrizes é o centro da circunferência.

Desenho*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.8.

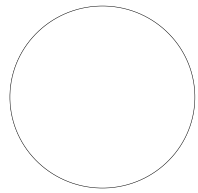


Figura 12.8: Problema 12.10.

12.11 Problema. *Traçar duas semi-retas que dividam um ângulo reto em três ângulos congruentes.*

Construção:

Seja $\widehat{O}$ o ângulo dado.

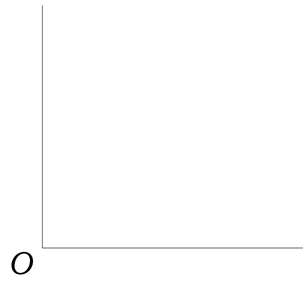


Figura 12.9: Exercício 12.11.

1. Centro em O e raio qualquer, tracemos um arco, que corta os lados do ângulo em dois pontos, os quais chamaremos de A, B.

2. Com o mesmo raio e centro em A e B, construamos duas circunferências, que cortam o arco construído no item 1, nos pontos C, D.

3. As semi-retas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ constituem a solução do problema.

<u>**Desenho**</u>*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.9.

12.12 Observação. É possível mostrar que o problema da trisseção de um ângulo arbitrário, não tem solução com régua não graduada e compasso. Por exemplo, o ângulo de 60° não pode ser trissectado somente com régua e compasso.

12.3 Expressões algébricas

12.13 Problema. *Dado um segmento $\overline{AB}$, construir um segmento que tenha medida igual à raiz quadrada da medida de $\overline{AB}$.*

<u>**Construção:**</u>

Figura 12.10: Problema 12.13.

1. Ao segmento AB, adicionemos o segmento de medida unitária $\overline{OX}$, para obter um segmento $\overline{AC}$ tal que $AC = AB + 1$.

2. Usemos a construção do problema 12.6 para traçar a perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ passando por B.

3. Construamos o ponto médio, M, de $\overline{AC}$.

4. Com centro em M e raio $\overline{MC}$, tracemos uma circunferência que cortará a perpendicular do item 2 num ponto E. O segmento $\overline{BE}$ é o segmento requerido, isto é, $BE = \sqrt{AB}$.

<u>**Desenho:**</u> Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.10.

12.14 Problema. *Construir um segmento cuja medida seja o produto das medidas de dois segmentos dados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.*

<u>**Construção:**</u>

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ segmentos dados (ou previamente construídos).

1. Com centros em C e D e raio $\overline{CD}$, construamos duas circunferências que interceptam-se nos pontos E e E'.

2. Com centro em C e raio $\overline{AB}$, cortemos $\overline{CE}$ (ou o prolongamento de $\overline{CE}$ no sentido de C para E) em F.

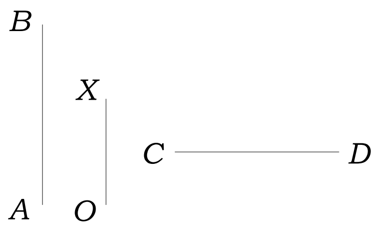


Figura 12.11: Problema 12.14.

3. Se O e X são pontos que definem um segmento unitário, $\overline{OX}$, então, com centro em C e raio $\overline{OX}$, cortemos $\overline{CD}$ (ou $\overline{CD}$ prolongado no sentido de C para D) em G.

4. Unamos F e G, obtendo o segmento $\overline{FG}$.

5. Usando o problema 12.3, trace, através de D, com segmento paralelo a $\overline{FG}$, que intercepta $\overline{CE}$ (ou seu prolongamento) em H. O segmento $\overline{CH}$ é o produto requerido.

<u>Desenho:</u> Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.11.

12.15 Problema. *Construir um segmento cuja medida é o inverso da medida de um segmento dado.*

<u>Construção:</u>

Seja $\overline{AB}$ um segmento previamente construído.

1. Com centro em A e B e raio $\overline{AB}$ construamos circunferências que interceptam-se nos pontos C e C'.

2. Com centro em A e raio $\overline{OX}$ (segmento unitário), cortemos $\overline{AC}$ (ou prolongamento de $\overline{AC}$ no sentido de A para C) em D.

3. Com centro em A e raio $\overline{OX}$, corte $\overline{AB}$ (ou prolongamento de $\overline{AB}$ no sentido de A para B) em E.

Figura 12.12: Problema 12.15.

4. Tracemos a reta, passando por E, que é paralela à $\overline{BD}$ interceptando $\overline{AC}$ em F. O segmento $\overline{AF}$ é a resposta do problema.

<u>Desenho:</u> Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.12.

12.16 Problema. *Dado um segmento $\overline{AB}$, obter sua seção áurea.*

<u>Construção</u>:

1. Passemos por B uma perpendicular a $\overline{AB}$.

2. Sobre esta perpendicular, marquemos um ponto D tal que $BD = \frac{1}{2}AB$.

3. Unamos os pontos A, D.

4. Tracemos um arco de centro D e raio BD, que corta $\overline{AD}$ em um ponto E.

5. Tracemos um arco de centro A e raio AE, que corta $\overline{AB}$ em um ponto C.

6. O ponto C é a seção áurea de AB.

<u>Desenho</u>*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.13.

12.17 Problema. *Dividir um segmento $\overline{AB}$, dado, em 5 partes iguais.*

Figura 12.13: Problemas 12.16 e 12.17.

<u>Construção</u>:

1. Tracemos uma semi-reta qualquer $\overline{AX}$.

2. Sobre ela, construamos, com o compasso, os segmentos congruentes $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$ e $\overline{A_4A_5}$.

3. Tracemos as paralelas a $\overline{A_5B}$ *pelos pontos* A_1, A_2, A_3 *e* A_4, *que determinam, assim, no segmento* $\overline{AB}$, *os pontos* P_1, P_2, P_3 *e* P_4, *que o dividirão em 5 partes iguais.*

Desenho*:* Execute os traçados indicados na construção acima.

12.18 Observação. Tendo como referência os problemas acima, temos que, partindo de um segmento unitário $\overline{OX}$, podem-se construir segmentos com qualquer medida racional positiva. Baseados nesta observação, costuma-se dizer que os números racionais positivos são **construtíveis.** Observa-se, também, que raiz quadrada de qualquer segmento construtível é também construtível. É um exercício, não difícil, mostrar que, se a, b e k são medidas de segmentos construtíveis, também é construtível o segmento de medida $a + b\sqrt{k}$. Também não é tarefa difícil mostrar que o número $5 + \sqrt{7\sqrt{3} + \frac{5}{\sqrt{10}+2}}$ pode ser medida de um segmento (tomando $\overline{OX}$ como segmento unitário). Pode-se mostrar que os números reais que podem ser medidas de segmentos construtíveis, são todos da forma $a + b\sqrt{k}$ (vide [11]).

12.4 Construção de triângulos

12.19 Observação. A partir de agora, adotaremos a nomenclatura sugerida pela figura 12.14.

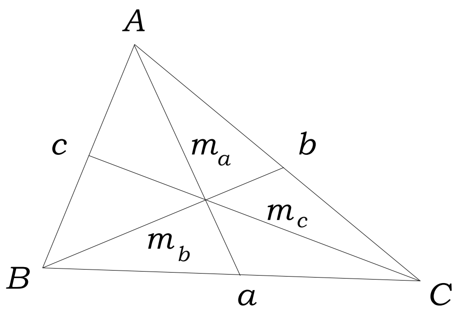


Figura 12.14: Triângulo ABC e suas medianas.

12.20 Problema. *Construir o triângulo* ABC, *sendo dados os seus lados* a, b, c.

Construção:

1. Marquemos o lado $\overline{AB}$ tal que $AB = c$.

2. Construamos as circunferências C_1, C_2 de raios a, b e centros B, A, respectivamente.

3. O ponto de encontro entre C_1 e C_2 é o vértice C.

Desenho*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.15.

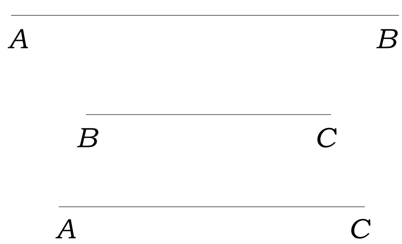


Figura 12.15: Problema 12.20.

12.21 Problema. *Construir o triângulo ABC, sendo dados os lados a, b e o ângulo $\widehat{C} = \theta$.*

Construção:

1. Marquemos o lado $\overline{BC}$ tal que $BC = a$.

2. Transportemos o ângulo $\widehat{C}$, de modo que seu vértice coincida com a extremidade C do segmento $\overline{BC}$ e um de seus lados seja o segmento BC.

3. Marquemos, sobre o outro lado do ângulo transportado, um ponto A tal que $AC = b$.

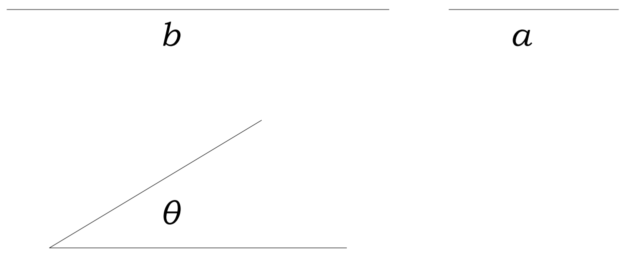


Figura 12.16: Problema 12.21.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.16.

12.22 Problema. *Construir o triângulo ABC, sendo dados os ângulos $\widehat{B}, \widehat{C}$ e o lado a.*

Construção:

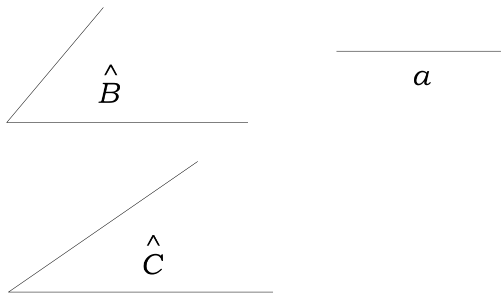


Figura 12.17: Problema 12.22.

1. Marquemos o lado $\overline{BC}$ tal que $BC = a$.

2. Transportemos o ângulo $\widehat{C}$, de modo que seu vértice coincida com a extremidade C do segmento $\overline{BC}$ e um de seus lados seja o segmento $\overline{BC}$.

3. Transportemos o ângulo $\widehat{B}$, de modo que seu vértice coincida com a extremidade B do segmento $\overline{BC}$ e um de seus lados seja o segmento $\overline{BC}$.

4. O ponto de interseção dos lados dos ângulos transportados, que não contêm $\overline{BC}$, é o ponto A.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.17.

12.23 Problema. *Contruir o triângulo ABC, sendo dados os lados c, a e o ângulo $\widehat{A} = \theta$.*

Construção:

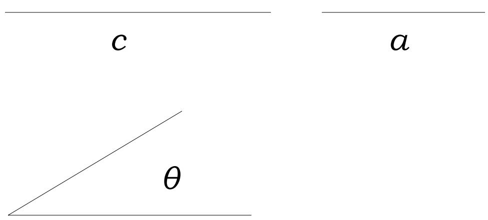


Figura 12.18: Problema 12.23.

1. Marquemos o lado $\overline{AB}$ no papel tal que $AB = c$.

2. Construamos a semi-reta $\overrightarrow{AX}$ tal que $B\widehat{A}X = \theta$. O vértice C será, então, um dos pontos de interseção da semi-reta $\overrightarrow{AX}$ com a circunferência de centro B e raio a.

Desenho*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.18.

12.24 Observação. Com os dados apresentados, o problema teve duas soluções. Podemos observar que esse problema nem sempre possui solução. Se o lado $\overline{BC}$, de medida a, for *pequeno* ($a < c \operatorname{sen} \theta$), a circunferência, de centro B e raio a, não cortará a semi-reta $S_{(AX)}$. A contrução mostra porque uma correspondência entre dois triângulos do tipo LLA não é necessariamente uma congruência.

12.25 Problema. *Construir o triângulo ABC, sendo dados o lado a, a altura h_a e o ângulo $\widehat{A}$.*

Construção:

1. Tracemos um segmento $\overline{BC}$ de medida a.
2. Construamos o arco capaz de $\widehat{A}$ relativo ao segmento $\overline{BC}$.
3. Construamos uma reta r, paralela a $\overline{BC}$ contida no mesmo semi plano determinado por $\overline{BC}$ que o arco capaz do ítem anterior, e cuja distância a $\overline{BC}$ seja igual a h_a.
4. A interseção de r com o arco capaz dá o ponto A.

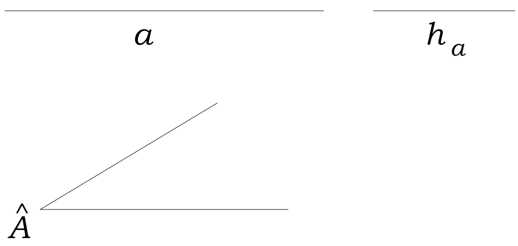


Figura 12.19: Problema 12.25.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.19.

12.26 Observação. Nem sempre existe a solução. Se h_a for grande, a paralela à r não cortará o arco capaz.

12.27 Problema. *Construir o triângulo ABC, sendo dadas as medianas m_a e m_b e a altura h_a.*

Construção:

1. Tracemos duas retas paralelas, r e s, distando h_a uma da outra. Sobre r, marque um ponto A.
2. Centro em A e raio m_a, construamos uma circunferência, que corta s num ponto M.
3. Seja G o ponto de $\overline{AM}$ tal que $AM = \frac{2}{3}m_a$.
4. Centro em G e raio $\frac{2}{3}m_b$, construamos uma circunferência, que corta s num ponto B. Marque, com raio BM, uma circunferência de centro M, obtendo assim o ponto C sobre s.

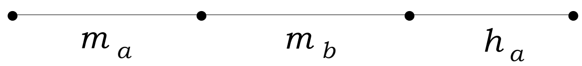


Figura 12.20: Problema 12.27.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.20.

12.28 Observação. Os dados apresentados não determinam um único triângulo. Note ainda que, dependendo das relações entre os dados, o problema pode não ter solução.

12.5 Problemas de tangência

12.29 Problema. *Traçar uma tangente a uma circunferência dada, que seja paralela a uma reta também dada.*

Construção:

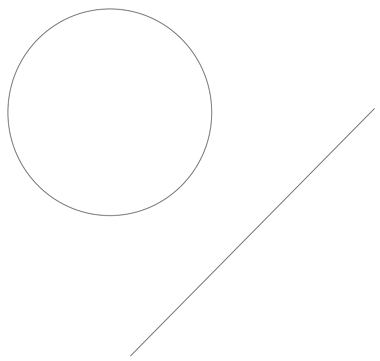


Figura 12.21: Problema 12.29.

Sejam $C(O,r)$ e s a circunferência e a reta dadas, respectivamente.

1. Passemos por O, uma perpendicular a s, que corta a circunferência $C(O,r)$ em dois pontos, A, B.

2. Passemos por A (ou por B), uma paralela a s.

Desenho: Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.21.

12.30 Problema. *Dada uma circunferência, traçar as tangentes a esta circunferência por um ponto P exterior a ela.*

Construção: Devemos, inicialmente, obter os pontos de tangência.

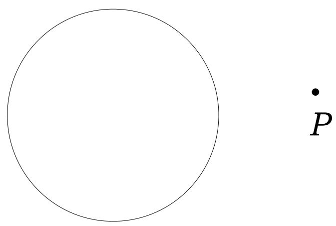


Figura 12.22: Problema 12.30.

1. Se O é o centro da circunferência e A é um dos pontos de tangência, então o ângulo $P\widehat{A}O$ é reto. Logo, A petence a um arco capaz de 90° sobre $\overline{PO}$.

2. Determinemos, então o ponto médio de $\overline{PO}$ e traçamos a circunferência de diâmetro $\overline{PO}$, que determina sobre a circunferência dada, os pontos de tangência procurados, A e A'.

Desenho*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.22.

12.31 Problema. *Traçar as tangentes comuns a duas circunferências dadas.*

Construção:

Sejam $C(O_1, r_1)$ e $C(O_2, r_2)$ as duas circunferências tais que $O_1O_2 > r_1 + r_2$. Se $r_1 = r_2$, a construção das quatro tangentes comuns fica como exercício. Façamos o caso $r_1 < r_2$.

1. Tracemos dois raios paralelos $\overline{O_1A}$ e $\overline{O_2B}$, de $C(O_1, r_1)$ e $C(O_2, r_2)$, respectivamente.

2. Liguemos A a B até cortar a reta dos centros, no ponto P.

3. Passemos por P uma tangente a $C(O_1, r_1)$. Analogamente construímos a outra tangente comum que passa por P. Passamos agora à construção das demais tangentes.

5. Tracemos uma circunferência de centro O_2 e raio $r_1 + r_2$.

6. Determinamos o ponto X de tangência de umas das tangentes a $C(O_2, r_1 + r_2)$ que passa por O_1.

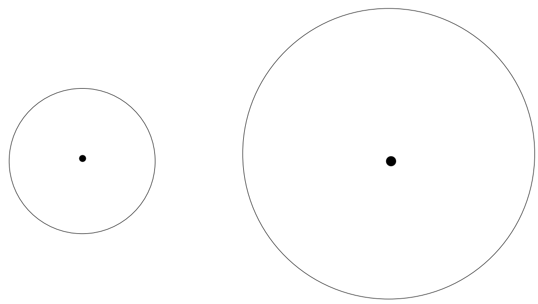


Figura 12.23: Problemas 12.31.

7. Construamos $\overline{O_2X}$ e chamamos de A, a interseção de $\overline{O_2X}$ com $C(O_2, r_2)$. Este é um dos pontos de tangência procurados.

8. Tracemos uma paralela a $\overline{O_2A}$ passando por O_1, que corta $C(O_1, r_1)$ no ponto B.

9. A reta $\overline{AB}$ é uma tangente comum às circunferências procuradas. A outra tangente é construída de modo análogo.

Desenho*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.23.

12.32 Problema. *Inscrever uma circunferência, de raio r dado, em um ângulo, também dado.*

Construção: 1. Construamos a bissetriz s do ângulo dado.

2. Construamos um paralela a um dos lados do ângulo, cuja distância até este lado seja igual ao raio da circunferência dado.

3. O ponto de encontro da bissetriz com a paralela é o centro da circunferência.

Figura 12.24: Problema 12.32.

Desenho*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.24.

12.33 Problema. *Traçar uma circunferência tangente a três retas dadas.*

Construção: Sejam AB, BC, CD as retas dadas.

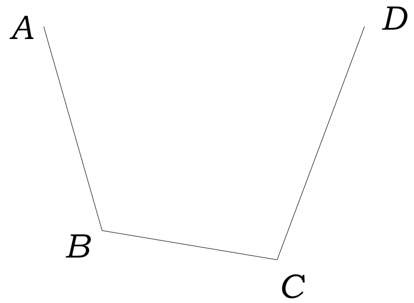


Figura 12.25: Problema 12.33.

1. Construamos as bissetrizes dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, e chamamos de O o ponto de interseção entre elas.

2. Passemos por O uma perpendicular a AB, e chamamos de P o pé desta perpendicular.

3. A circunferência de centro O e raio OP, é a circunferência procurada.

Desenho*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.25.

12.34 Problema. *Traçar três circunferências de mesmo raio, tangentes exteriormente entre si, e tangentes interiormente a uma outra dada.*

Construção:

Seja $C(O, r)$ a circunferência dada.

1. Marquemos em $C(O, r)$, três pontos A, B, C tais que $AB = BC = AC$, e construímos os raios OA, OB, OC.

2. Prolonguemos os raio $\overline{AO}$ na direção de A para O.

3. Tracemos por C uma tangente a $C(O, r)$, que corta o prolongamento de $\overline{AO}$ num ponto, o qual chamaremos de P.

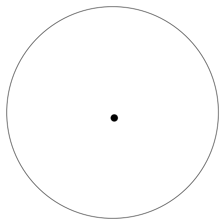


Figura 12.26: Problema 12.34.

4. Centro em P e raio PC, tracemos um arco que corta $\overline{OP}$ num ponto, que chamaremos de D.

5. Passemos por D uma perpendicular a AP. O ponto de encontro desta perpendicular com $\overline{OB}$ é o centro O_1 da primeira circunferência. Seu raio é $\overline{O_1B}$.

6. Construamos, com centros nos pontos A, C, e raio $\overline{O_1B}$, dois arcos que cortam $\overline{OA}$ e OC, respectivamente, nos pontos O_2 e O_3. Estes são os centros das demais circunferências.

<u>Desenho</u>*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.26.

12.35 Problema. *Descrever com raio dado, uma circunferência tangente a duas outras dadas.*

<u>Construção:</u>

Sejam $C\,(O_1, r_1)$ e $C\,(O_2, r_2)$ as duas circunferências e $\overline{AB}$ o raio, dados.

1. Centro em O_1, raios iguais a $AB + r_1$ e $AB - r_1$, tracemos duas circunferências.

2. Centro em O_2, raios iguais a $AB + r_2$ e $AB - r_2$, tracemos duas circunferências.

3. Estas quatro circunferências se cortam em oito pontos. Com centros nestes pontos e raio AB, construímos oito circunferências, sendo que cada uma delas resolve o problema.

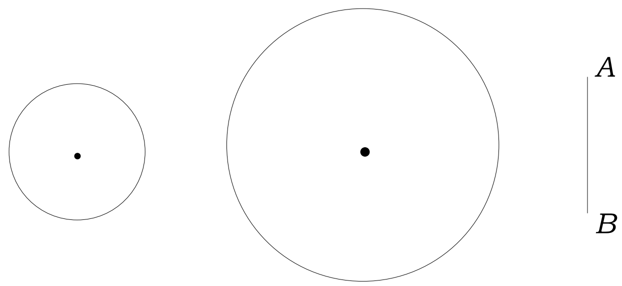


Figura 12.27: Problema 12.35.

<u>Desenho</u>*:* Execute os traçados indicados na construção acima usando os dados da figura 12.27.

12.6 Exercícios complementares

12.36 Exercício. Baseado na axiomática apresentada nos capítulos anteriores, justifique as construções propostas nos problemas das seções 12.2-12.5.

12.37 Exercício. Um aluno apresenta o seguinte problema de desenho geométrico ao seu professor: "construir um triângulo retângulo, dados o segmento soma dos catetos e a hipotenusa." O professor deu ao aluno os seguintes passos para a construção:

1. Trace o segmento $\overline{AB}$, que representa a soma dos catetos.

2. Pela extremidade A,construa um ângulo de $45°$.

3. Com centro em B e raio igual à hipotenusa, trace uma circunferência que corta o lado do ângulo construído em 2 no ponto C.

4. Por C, trace a reta perpendicular a $\overline{AB}$ obtendo o ponto D em $\overline{AB}$.

5. O triângulo CDB é o triângulo procurado.

Justificar, geometricamente, a construção apresentada pelo professor.

Sendo a, a medida da hipotenusa, b e c as medidas dos catetos, diga que relação deve existir entre esses valores, para que os dados do problema sejam compatíveis?

12.38 Exercício. Construir o simétrico de um ponto P em relação a uma reta dada.

12.39 Exercício. Construir uma circunferência que passa por três pontos não colineares dados.

12.40 Exercício. Dados os segmentos de medida a, b,construa um segmento de medida $\frac{a}{b}$.

12.41 Exercício. Dados os segmentos de medida a, b,construa um segmento de medida $\frac{a+b}{2}$ (construção da média aritmética).

12.42 Exercício. Dados os segmentos de medida a, b construa um segmento de medida $\sqrt{ab}$ (construção da média geométrica).

12.43 Exercício. Dados os segmentos de medida a, b, c, construa um segmento de medida x tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. O número x é dito a quarta proporcional dos números a, b, c.

12.44 Exercício. Inscrever, em um triângulo dado ABC, um quadrado (isso significa que, um lado contido do quadrado deve estar contido num dos lados do triângulo, e todos os vértices do quadrado devem pertencer ao triângulo).

12.45 Exercício. Dados os segmentos de medidas a, b, construa um segmento de medida $a - b$.

12.46 Exercício. Dados os segmentos de medidas a, b, construa um segmento de medida $\sqrt{a^2 + b^2}$.

12.47 Exercício. Dados os segmentos de medidas a, b, construa um segmento de medida $\sqrt{a^2 - b^2}$.

12.48 Exercício. Dados os segmentos de medidas a, b, construa um segmento de medida $\sqrt{a + b}$.

12.49 Exercício. Dados os segmentos de medidas a, b, c, construa um segmento de medida $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

12.50 Exercício. Dado o segmento de medida a, construa os segmentos de medidas $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, $a\sqrt{5}$, $a\sqrt{6}$...

12.51 Exercício. Dado o segmento de medida $a\sqrt{n}$, construa um segmento de medida a.

12.52 Exercício. Construir um segmento de medida $4,7$.

12.53 Exercício. Resolva o sistema, geometricamente, dados a, b

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b^2 \end{cases}.$$

12.54 Exercício. Resolva o sistema, geometricamente, dados a, b, sendo b um número positivo

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}.$$

12.55 Exercício. Resolva o sistema, geometricamente, dados a, b

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = b^2 \end{cases} .$$

12.56 Exercício. Resolva o sistema, geometricamente, dados a, b, sendo a positivo

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b^2 \end{cases} .$$

12.57 Exercício. Resolver, geometricamente, a equação $x^2 - ax - b^2 = 0$.

12.58 Exercício. Construir x tal que $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, dados a, b .

12.59 Exercício. Construir x tal que $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, dados a, b positivos.

12.60 Exercício. Dados a hipotenusa, a , e a diferença entre os catetos $b - c$, construa o triângulo retângulo que tem esses dados como lados (figura 12.28). Dê uma "receita" para a construção e justifique-a geometricamente. Que relação a, b e c devem satisfazer, para o problema estar bem posto?

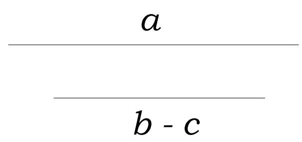


Figura 12.28: Exercícios 12.60.

12.61 Exercício. Construa um triângulo com lado a, um ângulo adjacente a esse lado, $\widehat{B}$ e a bissetriz b do outro ângulo. Os dados estão na figura 12.29.

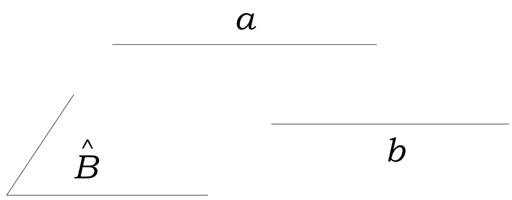


Figura 12.29: Exercícios 12.61.

Para os exercícios 12.62 a 12.66, utilize a figura 12.30.

12.62 Exercício. Construa um hexágono regular que está inscrito numa circunferência dada. Justifique, geometricamente, sua construção.

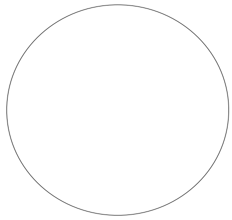


Figura 12.30: Exercícios 12.62 a 12.66.

12.63 Exercício. Construa um triângulo regular que está inscrito em uma circunferência dada. Justifique, geometricamente, sua construção.

12.64 Exercício. Construa um quadrado que está inscrito numa circunferência dada. Justifique, geometricamente, sua construção.

12.65 Exercício. Construa um decágono regular que está inscrito numa circunferência dada. Justifique geometricamente sua construção.

12.66 Exercício. Construa um pentágono regular que está inscrito numa circunferência dada. Justifique geometricamente sua construção.

12.67 Exercício. Construir um quadrado conhecendo sua diagonal.

12.68 Exercício. Construir um quadrado, dados em posição os pontos médios de dois lados adjacentes.

12.69 Exercício. Construir a circunferência circunscrita a um triângulo.

12.70 Exercício. Construir a circunferência inscrita em um triângulo.

12.71 Exercício. Construir um trapézio, conhecendo as bases a e b e os outros dois lados c e d.

12.72 Exercício. Construir um hexágono regular, dado, em posição, um lado.

12.73 Exercício. Construir uma perpendicular ao segmento AB, pelo ponto A , estando este ponto próximo ao bordo do papel.

12.74 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo os lados a e b e a altura h_a.

12.75 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo os lados b e c e a altura h_a.

12.76 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo os lados b e c e a mediana m_a.

12.77 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo o lado a , o ângulo $\widehat{A}$ e a mediana m_a.

12.78 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo os lados a e b e o ângulo $\widehat{A}$.

12.79 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo o lado a , o ângulo $\widehat{A}$ e a mediana m_b.

12.80 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo o lado a e as medianas m_b e m_c.

12.81 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo o lado a e as alturas h_b e h_c.

12.82 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo a mediana m_a e as alturas h_a e h_b.

12.83 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo a mediana m_a e as alturas h_b e h_c.

12.84 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo o lado a, o ângulo $\widehat{A}$ e a soma, $s = b + c$, dos outros dois lados.

12.85 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo o lado a, o ângulo $\widehat{A}$ e a diferença, $d = b - c$, dos outros dois lados.

12.86 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo o perímetro $2p$ e os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

12.87 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo o perímetro $2p$, o ângulo $\widehat{A}$ e a altura h_a.

12.88 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo o lado a, a altura h_a e o raio R da circunferência circunscrita.

12.89 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo a altura h_a, a mediana m_a e o raio R da circunferência circunscrita.

12.90 Exercício. Construir um triângulo ABC, conhecendo o ângulo $\widehat{A}$, o lado b e o raio r da circunferência inscrita.

12.91 Exercício. Construir um triângulo conhecendo os comprimentos da altura, mediana e bissetriz relativas a um mesmo vértice.

12.92 Exercício. Determinar o ponto de contato de uma circunferência dada, com uma tangente também dada.

12.93 Exercício. Traçar uma tangente a uma circunferência dada, por um ponto dado sobre a circunferência.

12.94 Exercício. Traçar uma tangente a uma circunferência cujo centro seja inacessível.

12.95 Exercício. Traçar uma circunferência de raio dado e que seja tangente exterior a uma circunferência dada.

12.96 Exercício. Traçar uma circunferência de raio dado e que seja tangente interior a uma circunferência dada.

12.97 Exercício. Dadas, em posição, uma circunferência C e uma reta r, construir uma circunferência de raio dado, tangente à r e tangente exteriormente à C .

12.98 Exercício. São dadas, em posição, as retas r e s e a circunferência C . Determinar os pontos de C que são eqüidistantes de r e s . Qual é o número máximo de soluções?

12.99 Exercício. São dadas, em posição, uma circunferência C e uma reta r . Determinar um ponto P sobre r, de forma que as tangentes traçadas de P à circunferência C formem um ângulo α, dado.

12.100 Exercício. Traçar uma circunferência que passe por dois pontos dados e que seja tangente à outra circunferência dada.

12.101 Exercício. Complete a resolução do problema 12.31, analisando os casos não considerados.

Capítulo 13

Área de Figuras Planas

Área de região poligonal é definida mediante axiomas que permitirão introduzir as fórmulas usuais para áreas de triângulos, retângulos, trapézios e outros polígonos particulares.

13.1 Definições e axiomas

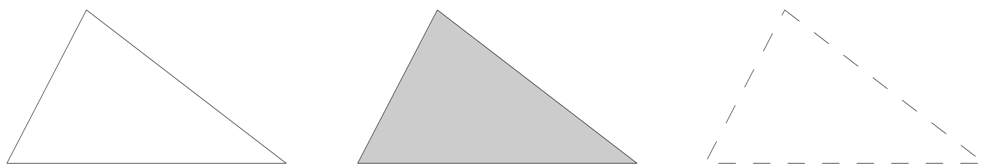


Figura 13.1: Triângulo ABC, região triangular R_{ABC} e interior de R_{ABC} .

1. Relembremos que, dados três pontos A, B e C, não colineares, o triângulo ABC é o conjunto $\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$, onde $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$ representam segmentos determinados pelos pontos A, B, C (figura 13.1 à esquerda).

2. Região triangular é um conjunto dado pela união de todos os segmentos, cujas extremidades pertencem a um triângulo.

Assim, se ABC é um triângulo, o conjunto $R_{ABC} = \bigcup_{X,Y \in ABC} \overline{XY}$ é a região triangular determinada por ABC (figura 13.1, no centro).

3. Fronteira de uma região triangular é o triângulo que a define.

Assim, $ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$ é a fronteira de R_{ABC}.

4. Interior de uma região triangular é o conjunto de pontos de uma região triangular que não pertencem a sua fronteira.

Assim, $R_{ABC} - ABC$ é o interior de R_{ABC} (figura 13.1, à direita) e será representado por $int(R_{ABC})$.

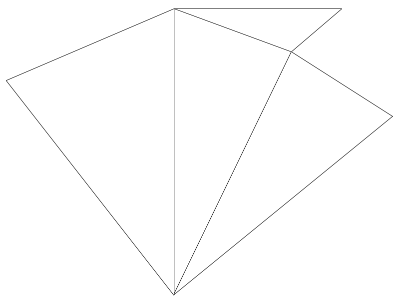


Figura 13.2: Região poligonal.

5. Região poligonal é o conjunto união de um número finito de regiões triangulares que, duas a duas, não têm pontos interiores em comum.

Assim, se R_i, $i = 1, 2, ..., n$, são regiões triangulares tais que $int(R_i) \cap int(R_j) = \phi, i \neq j; i, j = 1, 2, ..., n$, o conjunto $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ é uma região poligonal (figura 13.2).

6. Um ponto de uma região poligonal é dito ser **ponto interior** à região, se existe uma região triangular contida na região poligonal e que contém o ponto no seu interior (figura 13.5).

Interior de uma região poligonal é o conjunto de todos os seus pontos interiores.

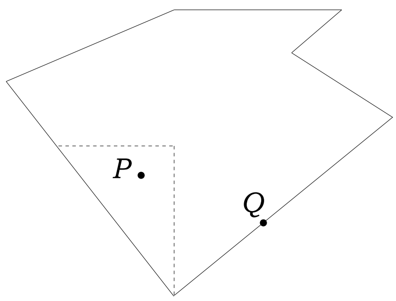


Figura 13.3: P é ponto interior e Q ponto de fronteira.

7. Fronteira de uma região poligonal é o conjunto dos pontos da região que não são pontos interiores.

Daremos, a seguir, os axiomas que definem o conceito de área de uma região poligonal; para isso, chamaremos de $\Re$ o conjunto de todas as regiões poligonais do plano.

Axioma 19 *Existe uma função* $a : \Re \to \mathbb{R}^+$ *que, a cada região poligonal* $R \in \Re$, *associa um número real positivo,* $a(R)$. *O número* $a(R)$ *será chamado de* ***área da região poligonal*** R.

Axioma 20 *Se* $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ $(n \geq 2)$, *onde* R_i, $i = 1, 2, ..., n$, *são regiões poligonais tais que* $int(R_i) \cap int(R_j) = \phi$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$, *então* $a(R) = \sum_{i=1}^{n} a(R_i)$.

Axioma 21 *Se um triângulo ABC é congruente ao triângulo A'B'C', então* $a(R_{ABC}) = a(R_{A'B'C'})$.

Axioma 22 *Se ABCD é um quadrado, cujo lado mede 1, então* $a(R_{ABCD}) = 1$.

13.1 Observação. Se R_1 e R_2 são regiões poligonais tais que $R_1 \subset R_2$, então $a(R_1) \leq a(R_2)$.

13.2 Observação. Não é difícil ver que todo polígono convexo determina uma região poligonal.

13.3 Observação. No lugar de dizer "área da região poligonal cuja fronteira é um dado polígono", diremos somente "área de um dado polígono".

13.4 Exercício. Prove as declarações das observações 13.1 e 13.2.

13.5 Exercício. Prove que dois retângulos congruentes têm a mesma área.

13.2 Área de um quadrado

Quadrado é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

13.6 Problema. *Calcular a área de um quadrado Q, cujo lado mede p, sendo p um número inteiro positivo.*

Solução: Sabemos que Q é uma região poligonal, pois todo quadrado é um polígono convexo. Dividamos cada lado do quadrado Q em p partes congruentes, através de paralelas aos lados (figura 13.4).

Ficam, assim, determinadas p^2 regiões quadradas $Q_i, i = 1, 2, ..., p^2$, cada uma com lado de medida unitária e tais que $Q = \bigcup_{i=1}^{p^2} Q_i$, $int(Q_i) \cap int(Q_j) = \phi$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., p^2$.

Pelo axioma 19, existe $a(Q) > 0$, sendo $a(Q)$ a área do quadrado. Pelo axioma 20, segue que $a(Q) = \sum_{i=1}^{n} a(Q_i)$ e, pelo axioma **??**, sabemos que $a(Q_i) = 1$, $i = 1, 2, ..., p^2$. Assim, $a(Q) = p^2$.

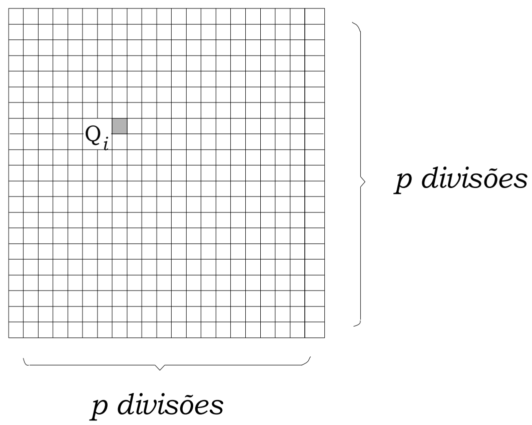


Figura 13.4: As regiões Q_i.

13.7 Problema. *Calcular a área de um quadrado Q, cujo lado mede r, sendo r um número racional positivo.*

Consideremos, inicialmente, um caso particular deste problema em que o quadrado Q tem lado medindo $\frac{1}{q}$, onde q é um número inteiro positivo.

Um quadrado de lado unitário pode ser olhado como a união de q^2 quadrados justapostos Q_i, $i = 1, 2, ..., q^2$, com $int(Q_i) \cap int(Q_j) = \phi$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., q^2$, tais que todos os Q_i são congruentes entre si e têm lados medindo $\frac{1}{q}$. Tomemos, então, Q_i congruente a $Q, i = 1, 2, ..., q^2$. Assim, $\sum_{i=1}^{q^2} a(Q_i) = 1$, ou seja, $a(Q) \cdot q^2 = 1$; assim, $a(Q) = \frac{1}{q^2}$.

Solução: Seja Q um quadrado, cujo lado mede r, r racional positivo. Assim, existem p e q, inteiros positivos, tais que $r = \frac{p}{q}$. Cada lado de Q pode ser dividido em p partes congruentes, através de paralelas aos lados, tendo, cada uma, medida $\frac{1}{q}$. Ficam, assim, determinadas p^2 regiões quadradas, cada uma com lado medindo $\frac{1}{q}$. A área de cada um desses quadrados, como vimos acima, é $\frac{1}{q^2}$. Como Q é a união desse p^2 quadrados congruentes, segue que $a(Q) = p^2 \cdot \left(\frac{1}{q^2}\right)$; logo, $a(Q) = \left(\frac{p}{q}\right)^2$. Assim, $a(Q) = r^2$.

13.8 Problema. *Calcular a área de um quadrado Q, cujo lado mede l, sendo l um número irracional.*

<u>**Solução:**</u> Inicialmente, conjecturamos que $a(Q) = l^2$. Mostremos que essa fórmula é verdadeira utilizando um raciocínio indireto como segue: se k_1 é qualquer número tal que $k_1 < l^2$, mostraremos que $k_1 < a(Q)$. Por outro lado, se k_2 é qualquer número tal que $l^2 < k_2$, mostraremos que $a(Q) < k_2$. Isto implicará que $a(Q)$ não poderá ser um número k_1 menor do que l^2 e nem um número k_2 maior que l^2, daí, deverá ser igual a l^2 (tricotomia!).

(i) Tomemos então $0 < k_1 < l^2$. Seja r_1 um número racional tal que $k_1 < r_1^2 < l^2$. No interior de Q tomemos um quadrado Q_{r_1}, com lado medindo r_1. Como r_1 é racional, segue, do problema 13.7 que $a(Q_{r_1}) = r_1^2$. Como Q_{r_1} está contido no interior de Q, devemos ter (observação 13.1) $a(Q_{r_1}) \leq a(Q)$, isto é, $r_1^2 \leq a(Q)$. Como $k_1 < r_1^2$, conlcuímos que $k_1 < a(Q)$. Assim, todo número real k_1, menor do que l^2, é tal que $k_1 < a(Q)$.

(ii) Tomemos agora um número real k_2 tal que $l^2 < k_2$. Seja r_2 um número racional tal que $l^2 < r_2^2 < k_2$.

Tomemos um quadrado Q_{r_2}, com lado medindo r_2, de modo que Q esteja contido no interior de Q_{r_2}. Como r_2 é racional, segue, do problema 13.7 que $a(Q_{r_2}) = r_2^2$. Como Q está contido no interior de Q_{r_2}, devemos ter (observação 13.1) $a(Q) \leq a(Q_{r_2})$, isto é, $a(Q) \leq r_2^2$. Como $r_2^2 < k_2$, concluímos que $a(Q) < k_2$. Assim, todo número real k_2, maior do que l^2, é tal que $a(Q) < k_2$.

Se $a(Q) < l^2$, então o número $k_1 = \frac{a(Q)+l^2}{2}$ seria tal que $a(Q) < k_1 < l^2$, contradizendo (i). Se $a(Q) > l^2$, então o número $k_2 = \frac{a(Q)+l^2}{2}$ seria tal que $l^2 < k_1 < a(Q)$, contradizendo (ii). Da tricotomia dos números reais, segue que $a(Q) = l^2$.

Desde que qualquer número real positivo, l, pode ser medida do lado de um quadrado e todo número real é racional ou irracional, dos problemas 13.7 e 13.8, segue que a área de qualquer quadrado, Q, de lado com medida l é expressa pela fórmula

$$a(Q) = l^2$$

isto é, a área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado.

13.3 Área de um retângulo

Retângulo é um quadrilátero que tem os quatro ângulos retos.

13.9 Problema. *Calcular a área de um retângulo R, cujos lados medem b e h.*

<u>**Solução:**</u> Seja $R = ABCD$ uma região retangular cujos lados medem b e h, isto é, $AB = CD = b$ e $BC = AC = h$. Sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ construímos quadrados $ABEF$ e $BCGH$, respectivamente, de modo a não conterem o ponto D. Os prolongamentos dos lados $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ se interceptam no ponto I, determinando o quadrado $DGIF$ (e daí o retângulo $BHIE$, conforme a figura 13.5).

Introduzindo as notações $Q = DGIF$ (quadrado de lado medindo $b + h$), $R_1 = ABEF, R_2 = BHIE, R_3 = ABCD$ e $R_4 = BCGH$ para indicar as regiões poligonais obtidas, observamos que $int(R_i) \cap int(R_j) = \phi$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ e que $Q = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$.

Assim,

$$a(Q) = a(R_1) + a(R_2) + a(R_3) + a(R_4) \qquad (13.1)$$

Como R_2 e R_3 são retângulos congruentes ao retângulo $R = ABCD$, segue que

$$a(R) = a(R_2) = a(R_3). \qquad (13.2)$$

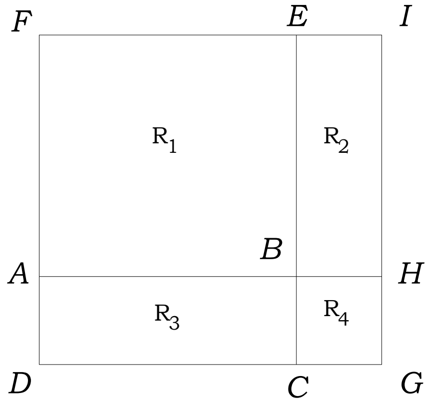


Figura 13.5: Problema 13.9.

Por outro lado, $a(Q) = (b + h)^2, a(R_1) = b^2$

$$a(R_4) = h^2. \qquad (13.3)$$

Substituíndo (13.2) e (13.3) em (13.1), obtemos

$$(b + h)^2 = b^2 + 2a(R) + h^2$$

e, daí,

$$a(R) = bh.$$

Isto é, a área de um retângulo é igual ao produto dos comprimentos, b e h, de seus lados.

13.4 Área de paralelogramos e triângulos

Paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos. A um dos lados de um paralelogramo chamaremos de **base** e ao segmento de perpendicular comum à base e ao lado oposto (ou ao seu prolongamento), cujas extremidades repousam sobre estes, chamaremos **altura** (figura 13.6).

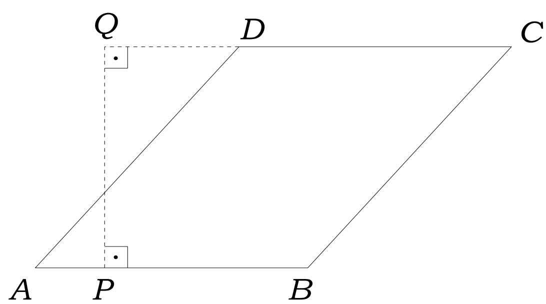


Figura 13.6: Paralelogramo $ABCD$ com base $\overline{AB}$ e altura PQ.

13.10 Problema. *Dado um paralelogramo $ABCD$, onde $\overline{AB}$ é sua base, com comprimento b, e $\overline{PQ}$ sua altura, com comprimento h, calcular sua área.*

Solução: O paralelogramo $ABCD$ está contido num retângulo $AECF$, como indicado na figura 13.7 (certifique-se da veracidade de tal afirmação). É fácil provar que os triângulos ADF e CBE são congruentes; logo, pelo axioma 22, eles têm a mesma área, isto é, $a(R_{ADF}) = a(R_{CBE})$.

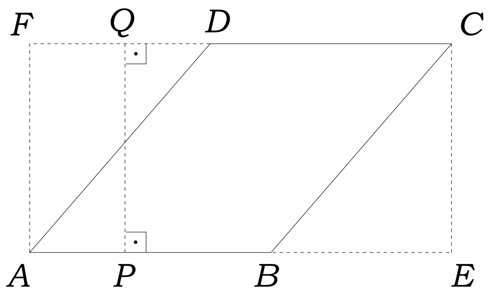


Figura 13.7: Problema 13.10.

Por outro lado, $R_{AECF} = R_{ABCD} \cup R_{ADF} \cup R_{CBE}$ e, do axioma 20, segue que

$$a(R_{AECF}) = a(R_{ABCD})+a(R_{ADF})+a(R_{CBE}) \tag{13.4}$$

Consideremos um retângulo $BECG$ com base igual a $\overline{BE}$ e altura EC. A diagonal BC, divide-o em dois triângulos CBE e BCG, onde BCG é congruente a ADF, e, daí, $a(BCG) = a(ADF)$.

Pelo axioma 20,

$$\begin{aligned} a(R_{BECG}) &= a(R_{CBE}) + a(R_{CBG}) \\ &= a(R_{CBE}) + a(R_{ADF}). \end{aligned}$$

Como $a(R_{BECG}) = BE \cdot CE$, temos

$$a(R_{CBE}) + a(R_{ADF}) = BE \cdot CE. \tag{13.5}$$

Como $AECF$ é um retângulo, do problema 13.9, segue que

$$a(R_{AECF}) = AE \cdot CE. \tag{13.6}$$

De (13.4), (13.5) e (13.6), temos que

$$AE \cdot CE = a(R_{ABCD}) + BE \cdot CE$$

e, como $AB = AE - BE$, temos que

$$a(R_{ABCD}) = AB \cdot CE.$$

Uma vez que $PQ = CE$ (!), temos que

$$\begin{aligned} a(R_{ABCD}) &= AE \cdot PQ \\ &= b \cdot h \end{aligned}$$

Assim, a área do paralelogramo $ABCE$, cuja base mede b e altura mede h, é dada pela fórmula

$$a(R_{ABCD}) = b \cdot h$$

isto é, a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases pelo comprimento da correspondente altura.

13.11 Observação. A área de um paralelogramo é independente da base escolhida.

13.12 Exercício. Dadas duas retas r e s, paralelas, e um segmento AB, contido em r; todos os paralelogramos $ABCD$, com C e D pertencentes à s, têm a mesma área (figura 13.11).

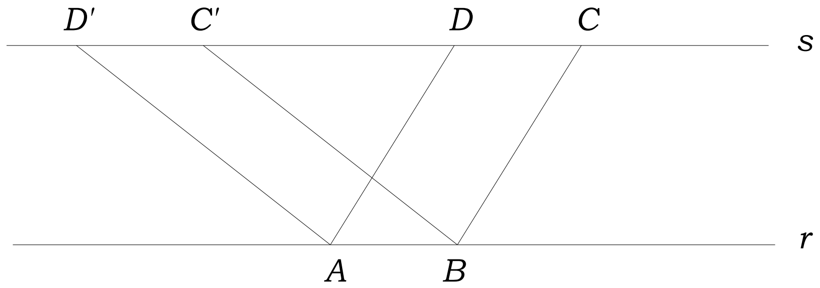


Figura 13.8: Paralelogramos de mesma base e mesma altura.

Dado um triângulo ABC, à um de seus lados chamaremos de **base**.

13.13 Problema. *Dado um triângulo ABC, onde $\overline{AB}$ é sua base com comprimento b e CH sua altura, relativa ao lado $\overline{AB}$, com comprimento h, calcular sua área.*

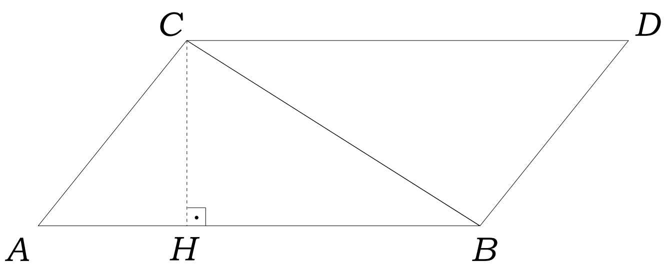


Figura 13.9: Paralelogramo $ABCD$.

Solução: Seja ABC o triângulo dado (figura 13.9); pelos vértices B e C tracemos paralelas a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Essas retas interceptam-se num ponto D e dão origem a um paralelogramo $ABCD$. Consideremos a altura $\overline{CH}$ desse paralelogramo; observemos que $CH = h$ e $AB = b$. Pelo axioma 20, uma vez que $R_{ABCD} = R_{ABC} \cup R_{DCB}$, temos que

$$a(R_{ABCD}) = a(R_{ABC}) + a(R_{DCB}).$$

Como $ABCD$ é um paralelogramo com base $AB = b$ e altura $CH = h$, do problema 13.10, temos que $a(R_{ABCD}) = b \cdot h$, e daí,

$$a(R_{ABC}) = \frac{1}{2} b \cdot h$$

isto é, a área de um triângulo é igual à metade do produto do comprimento da base pelo comprimento da altura correspondente.

13.14 Observação. A área de um triângulo é independente do par (base, altura correspondente) escolhido.

13.15 Exercício. Dadas duas retas r e s, paralelas, e um segmento $\overline{AB}$ contido em r; todos os triângulos com base $\overline{AB}$ e um vértice C pertencente a s, têm a mesma área (figura 13.10).

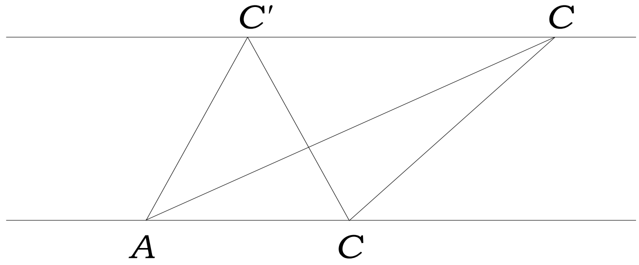


Figura 13.10: Triângulos de mesma base e mesma altura.

13.16 Observação. Uma vez que qualquer região poligonal pode ser subdividida em triângulos, sua área pode ser obtida como a soma das áreas dos triângulos que a compõe.

13.17 Exercício. Se $ABCD$ é um trapézio (figura 13.11) com base maior $AB = b_1$, base menor $CD = b_2$ e altura $CH = h$, mostre que sua área é dada pela fórmula

$$\frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h.$$

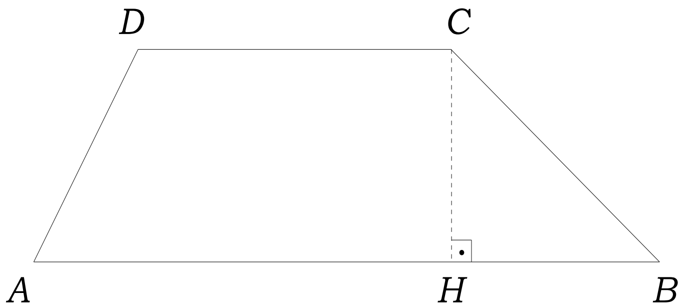


Figura 13.11: Trapézio $ABCD$.

13.5 Área de um círculo e de um setor circular

13.18 Definição. Dada uma circunferência $C\,(O, R)$, chamaremos de **círculo** de centro O e raio R ao conjunto de todos os pontos X do plano, tais que $OX \leq R$.

Considere um círculo qualquer de centro O e raio R. Pelo exercício 10.55, para cada natural n, existe um polígono regular de n lados inscrito na circunferência $C\,(O, R)$. Denotaremos o lado e a área deste polígono por l_n e A_n, respectivamente.

A cada lado do polígono está associado um triângulo isósceles com um vértice em O, laterais de medida R e alturas relativas às laterais de medida R sen θ_n, sendo θ_n o ângulo de vértice O de cada um destes triângulos.

Desde que $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$, de

$$A_n = n \cdot \frac{R^2 \text{sen}\theta_n}{2}$$

temos que

$$A_n = \pi R^2 \frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = 1$$

e, à medida que n cresce a área dos polígonos inscritos se aproxima cada vez mais da área do círculo, adotamos a seguinte definição:

13.19 Definição. A **área de um círculo** de raio R é πR^2.

13.20 Definição. Dada uma circunferência $C(O, R)$, tome dois pontos A, B sobre ela. A interseção de $\gamma_{OA,B} \cap \gamma_{OB,A}$ com o círculo de centro O e raio R é chamada de **setor circular** $\overline{AB}$ (figura (13.12).

13.21 Definição. Um setor circular no qual $\overline{AB}$ é um diâmetro de $C(O, R)$, recebe o nome de **semicírculo**.

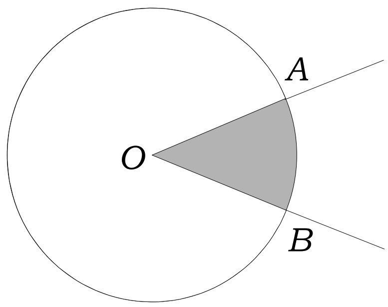


Figura 13.12: Setor circular.

Observe que ao multiplicarmos o ângulo central por qualquer natural n, a área do setor circular deverá ficar multiplicada por n. Além disso, a área do setor circular aumenta à medida que o ângulo central cresce, isto é, a área é uma função crescente do ângulo central. Pelo teorema fundamental da proporcionalidade (vide [14]), temos que a área a de um setor circular é diretamente proporcional à medida θ do ângulo central, isto é, $a = k \cdot \theta$, sendo k a constante de proporcionalidade. Ela pode ser determinada observando que para $\theta = \pi$ temos $a = \frac{\pi R^2}{2}$; logo, $k = \frac{R^2}{2}$. Por isso, adotamos a seguinte definição:

13.22 Definição. A **área de um setor circular** de um círculo de raio R e cujo ângulo central mede θ radianos é $\frac{R^2}{2}\theta$.

13.6 Equivalência plana

13.23 Definição. Dizemos que dois polígonos são equivalentes, quando as regiões poligonais por eles determinadas possuem a mesma área.

13.24 Problema. *Dividir um triângulo em quatro triângulos equivalentes.*

13.25 Problema. *Construir um triângulo cuja área seja o quádruplo da de um triângulo dado.*

13.26 Problema. *Construir um triângulo retângulo equivalente a um triângulo dado.*

13.27 Problema. *Construir um quadrado equivalente a um triângulo dado.*

13.7 Exercícios complementares

13.28 Exercício. Mostre que a área de um losango é igual à metade da medida do produto das diagonais.

13.29 Exercício. Mostre que se dois triângulos são semelhantes então a razão entre as suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

13.30 Exercício. Mostre que se dois polígonos são semelhantes então a razão entre as suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

13.31 Exercício. Prolongando os lados não paralelos de um trapézio, considere a sua altura como a diferença entre as alturas de dois triângulos. Obtenha, assim, uma fórmula para a área do trapézio.

13.32 Exercício. Demonstre que as medidas das três alturas de um triângulo são inversamente proporcionais as medidas dos lados correspondentes.

13.33 Exercício. Por um ponto arbitrário da diagonal de um paralelogramo trace uma paralela a cada um dos lados não paralelos, decompondo-o, assim, em quatro paralelogramos "menores". Dois deles têm áreas iguais. Identifique-os e prove a afirmação.

13.34 Exercício. Sejam E, F pontos médios dos lados não paralelos do trapézio $ABCD$. Prove que $a\left(R_{ABF}\right) + a\left(R_{CDF}\right) = a\left(R_{AEF}\right) + a\left(R_{CEF}\right).$

13.35 Exercício. Prove que a área do quadrado inscrito numa circunferência é igual à metade da área do quadrado circunscrito na mesma circunferência.

13.36 Exercício. Prove que as três medianas de um triângulo o decompõem em seis triângulos de mesma área.

13.37 Exercício. Os pontos médios de um quadrilátero convexo qualquer são vértices de um paralelogramo cuja área é a metade da área do quadrilátero dado. Mostre isso.

13.38 Exercício. Calcule a área de um hexágono regular de lado l.

13.39 Exercício. Utilize o exercício 7.71, para dar uma outra demonstração para o Teorema de Pitágoras. A figura 13.13 dá a sugestão.

13.40 Exercício. Dê uma outra prova para o Teorema de Pitágoras, utilizando o desenho à esquerda, na figura 13.14.

13.41 Exercício. Dê uma outra prova para o Teorema de Pitágoras utilizando o desenho à direita na figura 13.14. Esta foi a prova feita por Bháskara.

13.42 Exercício. Dê uma outra prova para o Teorema de Pitágoras utilizando o desenho da figura 13.15 à esquerda .

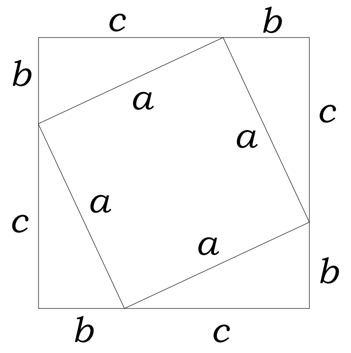


Figura 13.13: Exercício 13.39.

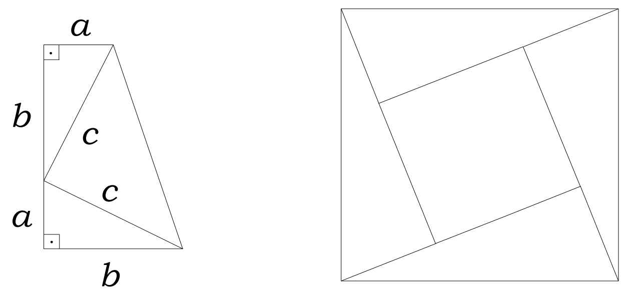


Figura 13.14: Exercícios 13.40 e 13.41.

13.43 Exercício. Dê uma outra prova para o Teorema de Pitágoras utilizando a figura 13.15 à direita. Esta prova foi feita por Leonardo da Vinci.

13.44 Exercício. Dê uma outra prova para o Teorema de Pitágoras utilizando a figura da capa deste texto. Esta prova foi feita por Euclides.

13.45 Exercício. Num triângulo ABC, se o ângulo $\widehat{A}$ é obtuso (agudo) então a área do quadrado construído sobre o lado $\overline{BC}$ é maior (menor) do que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados $\overline{AB}$ e AC. Conclua, daí, a recíproca do Teorema de Pitágoras.

13.46 Exercício. (Generalização do Teorema de Pitágoras) Prove que se três polígonos semelhantes estão dispostos sobre os lados de um triângulo retângulo, de tal modo que os lados desse triângulo sejam homólogos uns aos outros, então a soma das áreas dos polígonos situados sobre os catetos é igual à área do polígono situado sobre a hipotenusa. Observe que se os polígonos forem quadrados temos o Teorema de Pitágoras.

13.47 Exercício. (Lúnulas de Hipócrates) Sobre cada cateto de um triângulo retângulo constrói-se um semi círculo justaposto ao triângulo e, sobre a hipotenusa um semicírculo contendo o triângulo. Prove que a soma das áreas dos semicírculos, situados sobre os catetos, é igual à

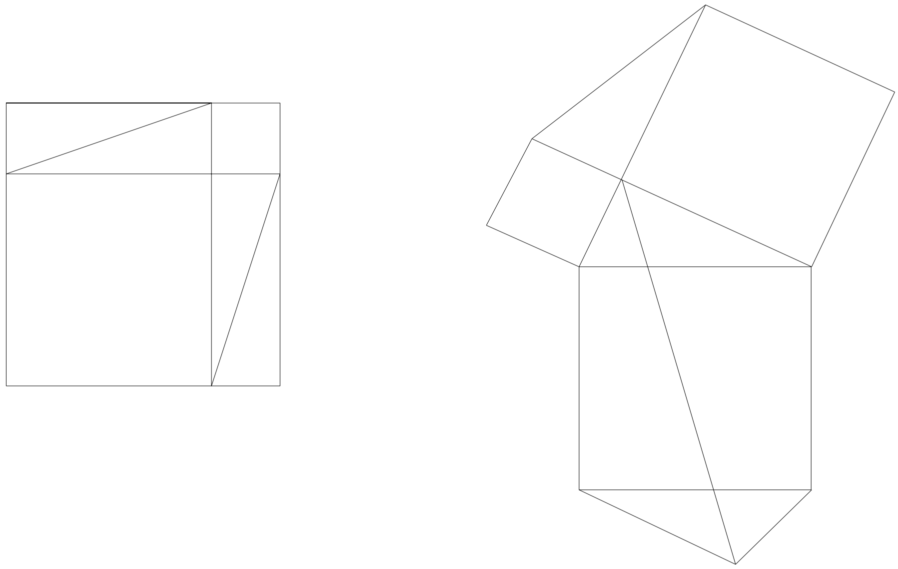


Figura 13.15: Exercícios 13.42 e 13.43.

área do semicírculo que contém o triângulo (os dois últimos exercícios podem ser generalizados para figuras semelhantes quaisquer desenhadas sobre os lados de um triângulo retângulo).

13.48 Exercício. Mostre que a área de um triângulo de semiperímetro p e lados de medida a, b, c é igual à $\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$. Esta é chamada a fórmula de Heron para a área de um triângulo.

13.49 Exercício. Mostre que a área de um triângulo é igual a pr, sendo p o semiperímetro e r o raio da circunferência inscrita.

13.50 Exercício. Mostre que a área de um triângulo é igual a $\frac{abc}{4R}$, sendo a, b, c as medidas dos lados do triângulo e R o raio da circunferência circunscrita.

13.51 Exercício. Mostre que a área de um triângulo ABC é igual a $\frac{1}{2}bcsen\widehat{A}$, sendo b, c as medidas dos lados opostos aos vértices B, C, respectivamente.

13.52 Exercício. Calcule a área hachurada na figura 13.16 conhecendo o raio R do círculo exterior.

13.53 Exercício. Calcule a área hachurada na figura 13.17 conhecendo o lado l do quadrado.

13.54 Exercício. Calcule a área hachurada na figura 13.18 conhecendo o raio R do círculo exterior.

13.55 Exercício. Calcule a área hachurada na figura 13.19 dados $AB = R$ e sabendo que $AB = 3\ BC$.

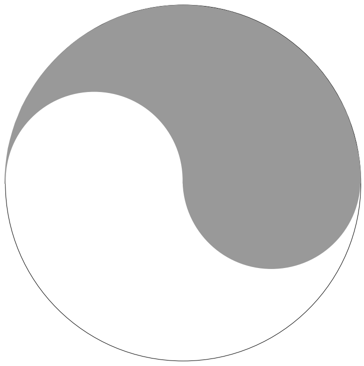


Figura 13.16: Exercício 13.52.

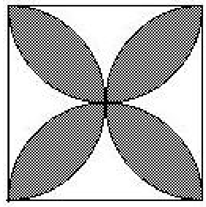


Figura 13.17: Exercício 13.53.

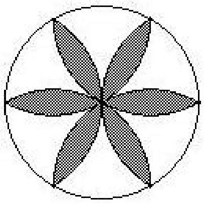


Figura 13.18: Exercício 13.54.

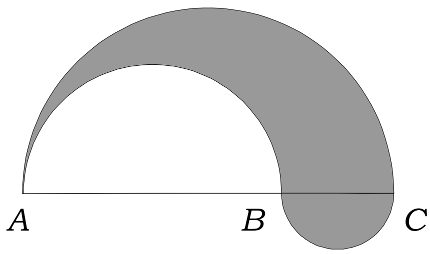


Figura 13.19: Exercício 13.55.

13.56 Exercício. Calcule a área hachurada na figura 13.20 dados $AG = R$ e sabendo que todos os pontos consecutivos são eqüidistantes.

13.57 Exercício. Dada uma circunferência $C(O, r)$, considere uma de suas tangentes a qual chamaremos de t. Pelo exercício 10.12, $C(O, r)$ está contida em um dos semi planos determinados por t. Mostre que a interseção de todos os semi planos γ_{Ot}, sendo t tangente a $C(O, r)$, é o círculo de centro O e raio r (isto implica que o círculo é um conjunto convexo, conforme o exercício 2.44).

13.58 Exercício. Mostre que a união de todas as cordas da circunferência $C(O, R)$ é o círculo de centro O e raio R.

13.59 Exercício. Construir um triângulo isósceles equivalente a um triângulo dado.

13.60 Exercício. Construir um triângulo retângulo equivalente a um quadrado dado.

13.61 Exercício. Construir um triângulo equivalente a um retângulo dado.

13.62 Exercício. Construir um triângulo equivalente a um losango dado.

13.63 Exercício. Construir um triângulo equivalente a um paralelogramo dado.

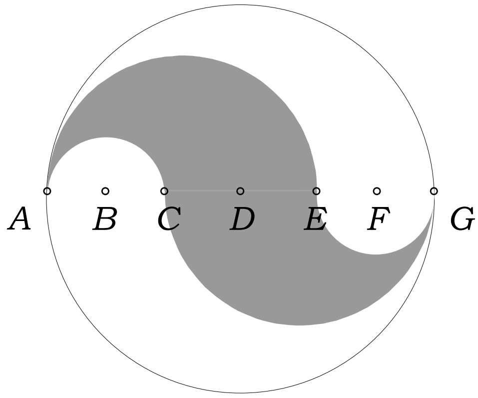


Figura 13.20: Exercício 13.56.

13.64 Exercício. Construir um triângulo equivalente a um trapézio dado.

13.65 Exercício. Sejam A, B, C, D vértices consecutivos de um polígono com n lados. Pelo ponto B trace uma paralela à diagonal AC. Seja E a interseção dessa paralela com o prolongamento do lado $\overline{DC}$. Substitua os lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CD}$ por $\overline{AE}$ e ED. a Mostre que o polígono, com $n-1$ lados assim obtido tem a mesma área que o anterior. b Mostre que pode-se construir um triângulo com a mesma área que um polígono dado.

13.66 Exercício. Dado um polígono convexo qualquer com cinco lados, construa um triângulo equivalente.

13.67 Exercício. Trace por um ponto P arbitrário de um triângulo ABC uma reta que divida-o em dois polígonos equivalentes.

13.68 Exercício. Faça a quadratura de um triângulo (fazer a quadratura de um polígono significa construir um quadrado equivalente).

13.69 Exercício. Trace por um ponto P de um triângulo ABC duas retas que o divida em três polígonos equivalentes.

13.70 Exercício. Trace por um ponto P de um quadrilátero, uma reta que divida o quadrilátero em dois polígonos equivalentes.

13.71 Exercício. Por um dos vértices de um quadrilátero, trace duas retas que o divida em três polígonos equivalentes.

13.72 Exercício. Descreva um método para efetuar a quadratura de um polígono de n lados (sugestão: use os exercícios 13.65 e 13.68).

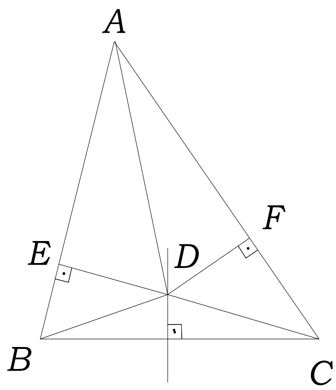
Apêndice A

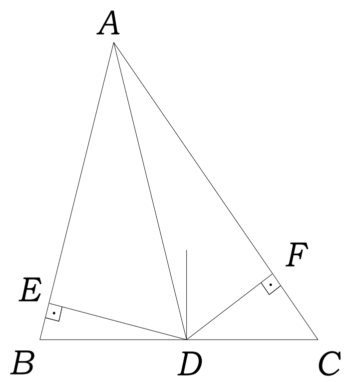
Conforme dissemos na apresentação deste texto, toda demonstração em geometria deve estar baseada nos axiomas ou nos teoremas já demonstrados a partir dos axiomas. As ilustrações apenas aguçam a intuição.

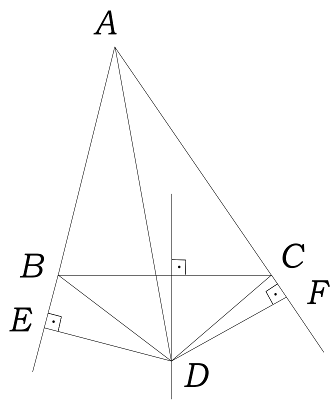
A não observação disso pode nos conduzir a situações inusitadas, como o

"Teorema" Todo triângulo é isósceles.

<u>**"Prova":**</u> Sejam ABC um triângulo qualquer, b a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ e m a mediatriz do lado $\overline{BC}$. Do teorema 2.9 segue que as retas b, m podem ser coincidentes, paralelas ou concorrentes.







1º caso: Se b, m são paralelas então, pelo teorema 6.11, b é bissetriz e altura relativa a um mesmo vértice, logo, pelo exercício 4.30, ABC é um triângulo isósceles e, do exercício 4.19 resulta que b e m são coincidentes, contradizendo o fato de b e m serem paralelas.

2º caso: Se b, m são concorrentes, chamemos de D o ponto comum a ambas. Sejam E, F os pés das perpendiculares baixadas por D a $\overline{AC}$, respectivamente.

Existem três possibilidades para o ponto D: ele pode estar no interior, no exterior ou sobre o triângulo ABC. Em qualquer um dos casos, vale a argumentação que segue. Como b é bissetriz do ângulo $\widehat{A}$, do exercício 5.28 segue que

$$\overline{DE} \equiv \overline{DF}. \tag{1}$$

Pelo caso LAA de congruência de triângulos, $ADE \equiv ADF$, logo,

$$\overline{AE} \equiv \overline{AF}. \tag{2}$$

Como D está sobre a mediatriz de $\overline{BC}$, do exercício 5.27 resulta que

$$\overline{BD} \equiv \overline{CD}. \tag{3}$$

De (1) e (3) segue que $BDE \equiv CDF$ (pelo caso hipotenusa-cateto de congruência de triângulos retângulos), logo,

$$\overline{BE} \equiv \overline{CF}. \tag{4}$$

As congruências (2) e (4) implicam que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. Como ABC é um triângulo isósceles, do exercício 4.19 resulta que b e m são coincidentes, contradizendo o fato de b e m serem concorrentes.

Portanto, só pode ocorrer de b e m serem coincidentes, o que implica que o triângulo ABC é isósceles, conforme o exerício 4.30. ■

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1997.

[2] Serrão, A. N. *Geometria no Plano - Parte A.* Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1968.

[3] Serrão, A. N. *Geometria no Plano - Parte B.* Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1968.

[4] Pogorelov, A.*Geometry.* Mir, Moscou, 1987.

[5] Prasolov, V. V. *Essays on numbers and figures.* American Mathematical Society, 2000.

[6] Greenberg, M. J.*Euclidean and Non-Euclidean Geometry.* W.H. Freeman, San Francisco, 1974.

[7] Lima, E. L. *Medida e Forma em Geometria.* Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

[8] Wagner, E. *Construções Geométricas.* Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1998.

[9] Eves, H. *Estudio de las Geometrias.* Centro Regional de Ayuda Tecnica, México, 1963.

[10] Boyer, C. B. *História da Matemática,* Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

[11] Courant, R; Robbins, Herbert. *O que é a matemática?*, Ciência Moderna, São Paulo, 2000.

[12] Heath, T. L. *The Thirteen Books of the Elements*, Dover, New York, 1956.

[13] Cendberg, J. N. *A Course in Modern Geometries. 1989.*

[14] Lima, E. L; Carvalho, P. C. C; Wagner, E; Morgado, A. C; *A Matemática do Ensino Médio - Vol. 1*; SBM, Rio de Janeiro, 2001.

[15] Carvalho, B.A. *Desenho Geométrico*, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1959.