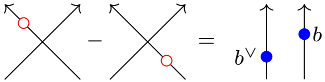


As vezes complicar vale a pena: uma motivação para categorificação

Eduardo Monteiro Mendonça

Institute of Mathematics and Statistics
University of São Paulo

FAPESP, processo nº 2020/14313-4

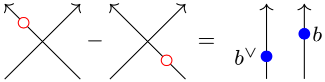
Dezembro 8, 2021

Visão Geral

Objetivo Apresentar um panorama geral sobre categorificação e ilustrar o sua principal característica que a deixa interessante.

Conteudo

1. O que é categorificação
2. Representações de S_n
3. Um pouco mais sobre Categorificação
4. Diagramas



O que é categorificação

Section 1

Revisão rápida de Categorias

Definição

Uma categoria (pequena) $\mathcal{C}$ consiste de:

- um conjunto de **objetos** $\operatorname{Obj}\mathcal{C}$;
- um conjunto de morfismos $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todo $X, Y \in \operatorname{Obj}\mathcal{C}$;
- regra de composição

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), \quad (f,g) \mapsto f \circ g,$$

  satisfazendo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- e identidade $1_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$, para todo $X \in \operatorname{Obj} X$, satisfazendo $1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$, para todo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Revisão rápida de Categorias

Definição

Uma categoria (pequena) $\mathcal{C}$ consiste de:

- um conjunto de **objetos** $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$;
- um conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$;
- regra de composição

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \quad (f, g) \mapsto f \circ g,$$

  satisfazendo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- e identidade $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, para todo $X \in \mathrm{Obj}\,X$, satisfazendo $1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$, para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Exemplos

- **Set** $=$ conjuntos $+$ funções;

Definição

Uma categoria (pequena) $\mathcal{C}$ consiste de:

- um conjunto de **objetos** $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$;
- um conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$;
- regra de composição

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), \quad (f,g) \mapsto f \circ g,$$

  satisfazendo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- e identidade $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$, para todo $X \in \mathrm{Obj}\,X$, satisfazendo $1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$, para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Exemplos

- **Set** $=$ conjuntos $+$ funções;
- **Vect** $=$ Espaços vetoriais $+$ Transformações lineares (**vect** $=$ espaçoes vetoriais dim. fin.);

Revisão rápida de Categorias

Definição

Uma categoria (pequena) $\mathcal{C}$ consiste de:

- um conjunto de **objetos** $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$;
- um conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$;
- regra de composição

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \quad (f, g) \mapsto f \circ g,$$

  satisfazendo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- e identidade $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, para todo $X \in \mathrm{Obj}\,X$, satisfazendo $1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$, para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Exemplos

- **Set** = conjuntos + funções;
- **Vect** = Espaços vetoriais + Transformações lineares (**vect** = espaçoes vetoriais dim. fin.);
- R-mod = R-módulos + homomorfismos de R-módulos

Definição

Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor $\mathsf{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de

- um mapa $\mathsf{F}\colon \operatorname{Obj}\mathcal{C} \to \operatorname{Obj}\mathcal{D}$;
- para todo $X, Y \in \operatorname{Obj}\mathcal{C}$, um mapa $\mathsf{F}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}X, \mathsf{F}Y)$, satisfazendo $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ e $\mathsf{F}(1_X) = 1_{\mathsf{F}Y}$.

Definição

Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor $\mathsf{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de

- um mapa $\mathsf{F}\colon \mathrm{Obj}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$;
- para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$, um mapa $\mathsf{F}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}X, \mathsf{F}Y)$, satisfazendo $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ e $\mathsf{F}(1_X) = 1_{\mathsf{F}Y}$.

Exemplos

- F: **Vect** $\to$ **Set** - funtor esquecedor

Definição

Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor $\mathsf{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de

- um mapa $\mathsf{F}\colon \mathrm{Obj}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$;
- para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$, um mapa $\mathsf{F}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}X, \mathsf{F}Y)$, satisfazendo $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ e $\mathsf{F}(1_X) = 1_{\mathsf{F}Y}$.

Exemplos

- F: **Vect** $\to$ **Set** - funtor esquecedor
- U: **Set** $\to$ **Vect** - funtor livre

Definição

Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor $\mathsf{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de

- um mapa $\mathsf{F}\colon \operatorname{Obj}\mathcal{C} \to \operatorname{Obj}\mathcal{D}$;
- para todo $X, Y \in \operatorname{Obj}\mathcal{C}$, um mapa $\mathsf{F}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}X, \mathsf{F}Y)$, satisfazendo $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ e $\mathsf{F}(1_X) = 1_{\mathsf{F}Y}$.

Exemplos

- $\mathsf{F}\colon$ **Vect** $\to$ **Set** - funtor esquecedor
- $U\colon$ **Set** $\to$ **Vect** - funtor livre
- ${}_R M_S \otimes_S -\colon S$-mod $\to R$-mod, para algum (R,S)-bimódulo M

Definição

Uma transformação natural $\alpha\colon \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$ entre funtores $\mathsf{F}, \mathsf{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de uma família de morfismos $\{\alpha_X\colon \mathsf{F}X \to \mathsf{G}X\}_{X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}}$ tal que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{F}X \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\mathsf{F}(g)"'] & \mathsf{G}X \arrow[d, "\mathsf{G}(g)"] \\
\mathsf{F}Y \arrow[r, "\alpha_Y"'] & \mathsf{G}Y
\end{tikzcd},$$

para qualquer $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Definição

Uma transformação natural $\alpha\colon \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$ entre funtores $\mathsf{F}, \mathsf{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de uma família de morfismos $\{\alpha_X : \mathsf{F}X \to \mathsf{G}X\}_{X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}}$ tal que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \mathsf{F}X \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\mathsf{F}(g)"'] & \mathsf{G}X \arrow[d, "\mathsf{G}(g)"] \\ \mathsf{F}Y \arrow[r, "\alpha_Y"'] & \mathsf{G}Y \end{tikzcd},$$

para qualquer $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Exemplo

Os isomorfismos "naturais" da forma $\alpha_V : V^{**} \to V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita, define transformação natural

$$\alpha\colon \ \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(-, \Bbbk), \Bbbk) \Rightarrow \mathsf{Id}_{\mathsf{vect}}.$$

Ideia da Categorificação

Categorificação: é o processo de trocar conceitos baseados em conjuntos por análogos baseados e teoria da categoria.

Ideia: revelar propriedades escondidas nos objetos de início.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Categorias} & \text{Funtores} \arrow[l, dotted] & \text{Transf. Nat.} \arrow[l, dotted] \\
\text{Conjuntos} \arrow[u] & \text{Funções} \arrow[l, dotted] \arrow[u] & \\
\text{Números/Pontos} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

Categorificação: é o processo de trocar conceitos baseados em conjuntos por análogos baseados e teoria da categoria.

Ideia: revelar propriedades escondidas nos objetos de início.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Categorias} & \text{Funtores} \arrow[l, dotted] & \text{Transf. Nat.} \arrow[l, dotted] \\
\text{Conjuntos} \arrow[u] & \text{Funções} \arrow[l, dotted] \arrow[u] & \\
\text{Números/Pontos} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

vamos deixar a definição um pouco mais precisa...

Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, é o grupo abeliano gerado por $\{[X] \mid X \in \operatorname{Obj} \mathcal{A}\}$ quocientado pela relação $[Y] = [X] + [Z]$ para toda sequencia exata $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

Decategorificação

Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, é o grupo abeliano gerado por $\{[X] \mid X \in \operatorname{Obj} \mathcal{A}\}$ quocientado pela relação $[Y] = [X] + [Z]$ para toda sequencia exata $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

- Se $X \simeq Y$ então $[X] = [Y]$;

Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, é o grupo abeliano gerado por $\{[X] \mid X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}\}$ quocientado pela relação $[Y] = [X] + [Z]$ para toda sequencia exata $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

- Se $X \simeq Y$ então $[X] = [Y]$;
- Se $X \subseteq Y$ então $[Y] = [X] + [X/Y]$;

Decategorificação

Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, é o grupo abeliano gerado por $\{[X] \mid X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}\}$ quocientado pela relação $[Y] = [X] + [Z]$ para toda sequencia exata $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

- Se $X \simeq Y$ então $[X] = [Y]$;
- Se $X \subseteq Y$ então $[Y] = [X] + [X/Y]$;
- Se $[X \oplus Y] = [X \oplus Y]$
- Se X tem comprimento finito, então $[X]$ é a soma dos objetos irredutíveis que aparecem nos quocientes de suas séries de composição.

Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, é o grupo abeliano gerado por $\{[X] \mid X \in \operatorname{Obj} \mathcal{A}\}$ quocientado pela relação $[Y] = [X] + [Z]$ para toda sequencia exata $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

- Se $X \simeq Y$ então $[X] = [Y]$;
- Se $X \subseteq Y$ então $[Y] = [X] + [X/Y]$;
- Se $[X \oplus Y] = [X \oplus Y]$
- Se X tem comprimento finito, então $[X]$ é a soma dos objetos irredutíveis que aparecem nos quocientes de suas séries de composição.
- Os objetos simples formam uma base para $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$.

Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, é o grupo abeliano gerado por $\{[X] \mid X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}\}$ quocientado pela relação $[Y] = [X] + [Z]$ para toda sequencia exata $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

- Se $X \simeq Y$ então $[X] = [Y]$;
- Se $X \subseteq Y$ então $[Y] = [X] + [X/Y]$;
- Se $[X \oplus Y] = [X \oplus Y]$
- Se X tem comprimento finito, então $[X]$ é a soma dos objetos irredutíveis que aparecem nos quocientes de suas séries de composição.
- Os objetos simples formam uma base para $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$.

importante Se $\mathcal{A}$ é monoidal, então $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ é um anel ao definir $[X][Y] = [X \otimes Y]$.

Decategorificação

Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, é o grupo abeliano gerado por $\{[X] \mid X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}\}$ quocientado pela relação $[Y] = [X] + [Z]$ para toda sequencia exata $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

- Se $X \simeq Y$ então $[X] = [Y]$;
- Se $X \subseteq Y$ então $[Y] = [X] + [X/Y]$;
- Se $[X \oplus Y] = [X \oplus Y]$
- Se X tem comprimento finito, então $[X]$ é a soma dos objetos irredutíveis que aparecem nos quocientes de suas séries de composição.
- Os objetos simples formam uma base para $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$.

importante Se $\mathcal{A}$ é monoidal, então $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ é um anel ao definir $[X][Y] = [X \otimes Y]$.

O processo $\mathcal{A} \to \mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ é chamado de **decategorificação** de $\mathcal{A}$. **Categorificar** um objeto algébrico X é, a grosso modo, achar uma categoria $\mathcal{A}$ onde sua decategorificação é isomorfo a X.

Decategorificação

Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, é o grupo abeliano gerado por $\{[X] \mid X \in \operatorname{Obj} \mathcal{A}\}$ quocientado pela relação $[Y] = [X] + [Z]$ para toda sequencia exata $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

- Se $X \simeq Y$ então $[X] = [Y]$;
- Se $X \subseteq Y$ então $[Y] = [X] + [X/Y]$;
- Se $[X \oplus Y] = [X \oplus Y]$
- Se X tem comprimento finito, então $[X]$ é a soma dos objetos irredutíveis que aparecem nos quocientes de suas séries de composição.
- Os objetos simples formam uma base para $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$.

importante Se $\mathcal{A}$ é monoidal, então $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ é um anel ao definir $[X][Y] = [X \otimes Y]$.

O processo $\mathcal{A} \to \mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ é chamado de **decategorificação** de $\mathcal{A}$. **Categorificar** um objeto algébrico X é, a grosso modo, achar uma categoria $\mathcal{A}$ onde sua decategorificação é isomorfo a X.

Exemplo

$\mathcal{K}_0(\textbf{vect}) = \mathbb{Z}[\Bbbk] \simeq \mathbb{N}$ onde o isomorphismo é dado pela dimensão. Então **vect** categorifica $\mathbb{N}$.

Decategorificação

Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, é o grupo abeliano gerado por $\{[X] \mid X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}\}$ quocientado pela relação $[Y] = [X] + [Z]$ para toda sequencia exata $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

- Se $X \simeq Y$ então $[X] = [Y]$;
- Se $X \subseteq Y$ então $[Y] = [X] + [X/Y]$;
- Se $[X \oplus Y] = [X \oplus Y]$
- Se X tem comprimento finito, então $[X]$ é a soma dos objetos irredutíveis que aparecem nos quocientes de suas séries de composição.
- Os objetos simples formam uma base para $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$.

importante Se $\mathcal{A}$ é monoidal, então $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ é um anel ao definir $[X][Y] = [X \otimes Y]$.

O processo $\mathcal{A} \to \mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ é chamado de **decategorificação** de $\mathcal{A}$. **Categorificar** um objeto algébrico X é, a grosso modo, achar uma categoria $\mathcal{A}$ onde sua decategorificação é isomorfo a X.

Exemplo

$\mathcal{K}_0(\textbf{vect}) = \mathbb{Z}[\Bbbk] \simeq \mathbb{N}$ onde o isomorphismo é dado pela dimensão. Então **vect** categorifica $\mathbb{N}$.

Podemos deixar a definição um pouco mais precisa

Propriedade de $\mathcal{K}_0$: Seja $\chi\colon \operatorname{Obj}\mathcal{A} \to A$ um morfismo de grupos abelianos que satisfaz $\chi(Y) = \chi(X) + \chi(Z)$ sempre que $[Y] = [X] + [Z]$ em $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, então χ se fatora unicamente a um morfismo de grupo $\bar{\chi}\colon \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \to A$. Ou seja, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "{[-]}"] \arrow[dr, "\chi"'] & & \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \arrow[dl, "\bar{\chi}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Categorificação de ingênua

Propriedade de $\mathcal{K}_0$: Seja $\chi\colon \operatorname{Obj}\mathcal{A} \to A$ um morfismo de grupos abelianos que satisfaz $\chi(Y) = \chi(X) + \chi(Z)$ sempre que $[Y] = [X] + [Z]$ em $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, então χ se fatora unicamente a um morfismo de grupo $\bar{\chi}\colon \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \to A$. Ou seja, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "{[-]}"] \arrow[dr, "\chi"'] & & \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \arrow[dl, "\bar{\chi}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Assim funtores abelianos $\mathsf{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induzem únicos morfismos de grupos $[\mathsf{F}]\colon \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}_0(\mathcal{B})$.

Definição (Categorificação ingênua e fraca)

Sejam R uma $\Bbbk$-álgebra e $\{r_i \mid i \in I\}$ geradores de R e M um R-módulo. Uma **categorificação ingênua** é uma tripla $(\mathcal{A}, \varphi, \{\mathsf{F}_i \mid i \in I\})$ onde $\varphi\colon M \to \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \otimes \Bbbk$ é isomorfismo e $\mathsf{F}_i\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ são endofuntores exatos tais que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "r_i\cdot -"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \otimes \Bbbk \arrow[r, "{[\mathsf{F}_i]}"'] & \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \otimes \Bbbk \end{tikzcd}$$

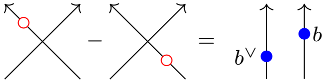
comuta para todo $i \in I$. Se os F_i's satisfazem as mesmas relações que os r_i's, então chamamos a categorificação de **fraca**.

Exemplo

- Seja $A = \mathbb{C}[a]/(a^2 - 2a)$;
- Sejam M e N dois A-módulos igual a $\mathbb{C}$ como espaços vetoriais, com a agindo como multiplicação por 0 e 2, respectivamente;
- Tome $\mathcal{A} = \mathbb{C}$-mod, e $\mathsf{F} = 0$ e $\mathsf{G} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \oplus \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$;
- Defina $\varphi\colon M \to \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \otimes \mathbb{C}$ e $\psi\colon N \to \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \otimes \mathbb{C}$ pondo $\varphi(1) = [\mathbb{C}] = \psi(1)$;
- $[\mathsf{F}] \circ \varphi = \varphi \circ a$ e $[\mathsf{G}] \circ \psi = \psi \circ a$;
- Vale $\mathsf{F} \circ \mathsf{F} = 0 = \mathsf{F} \oplus \mathsf{F}$ e $\mathsf{G} \circ \mathsf{G} = \mathsf{G} \oplus \mathsf{G}$;
- $(\mathcal{A}, \varphi, \mathsf{F})$ E $(\mathcal{A}, \psi, \mathsf{G})$ são categorificações fraca de M e N, respectivamente.

Exemplo

- Seja $A = \mathbb{C}[a]/(a^2 - 2a)$;
- Sejam M e N dois A-módulos igual a $\mathbb{C}$ como espaços vetoriais, com a agindo como multiplicação por 0 e 2, respectivamente;
- Tome $\mathcal{A} = \mathbb{C}$-mod, e $\mathsf{F} = 0$ e $\mathsf{G} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \oplus \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$;
- Defina $\varphi\colon M \to \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \otimes \mathbb{C}$ e $\psi\colon N \to \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \otimes \mathbb{C}$ pondo $\varphi(1) = [\mathbb{C}] = \psi(1)$;
- $[\mathsf{F}] \circ \varphi = \varphi \circ a$ e $[\mathsf{G}] \circ \psi = \psi \circ a$;
- Vale $\mathsf{F} \circ \mathsf{F} = 0 = \mathsf{F} \oplus \mathsf{F}$ e $\mathsf{G} \circ \mathsf{G} = \mathsf{G} \oplus \mathsf{G}$;
- $(\mathcal{A}, \varphi, \mathsf{F})$ E $(\mathcal{A}, \psi, \mathsf{G})$ são categorificações fraca de M e N, respectivamente.
- $A \simeq \mathbb{C}[S_2]$ via $a \mapsto 1 + s_1$.
- M é isomorfo ao módulo sinal e N ao módulo trivial.



Representações de S_n

Section 2

Anel de funções simétricas

- O anel de funções simétricas é $\mathrm{Sym} = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, \ldots]^{S_\infty}$, onde S_∞ é o grupo de permutação de $\mathbb{N}$.

Anel de funções simétricas

- O anel de funções simétricas é $\mathrm{Sym} = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, \ldots]^{S_\infty}$, onde S_∞ é o grupo de permutação de $\mathbb{N}$.
- Seja $\mathrm{Sym}_n^k = \{f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} \mid \deg f = k\}$ então um elemento de Sym^k é uma sequência $(f_n)_{n \geq 0}$, onde

$$f_n \in \mathrm{Sym}_n^k, \quad \text{e} \quad f_m(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = f_n(x_1, \ldots, x_n), \forall m > n.$$

- $\mathrm{Sym} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{Sym}^k$.

Anel de funções simétricas

- O anel de funções simétricas é $\mathrm{Sym} = \Bbbk[x_1, \dots, x_n, \dots]^{S_\infty}$, onde S_∞ é o grupo de permutação de $\mathbb{N}$.
- Seja $\mathrm{Sym}_n^k = \{f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]^{S_n} \mid \deg f = k\}$ então um elemento de Sym^k é uma sequência $(f_n)_{n \geq 0}$, onde

$$f_n \in \mathrm{Sym}_n^k, \quad \text{e} \quad f_m(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = f_n(x_1, \dots, x_n), \forall m > n.$$

- $\mathrm{Sym} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{Sym}^k$.

Exemplo

A soma formal $m_{(3\,2\,1)} = \sum_{\sigma \in S_\infty} x^{\sigma(3\,2\,1\,0\,0\,\cdots)}$ é um elemento de Sym.

Anel de funções simétricas

- O anel de funções simétricas é $\mathrm{Sym} = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, \ldots]^{S_\infty}$, onde S_∞ é o grupo de permutação de $\mathbb{N}$.
- Seja $\mathrm{Sym}_n^k = \{f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} \mid \deg f = k\}$ então um elemento de Sym^k é uma sequência $(f_n)_{n\geq 0}$, onde

$$f_n \in \mathrm{Sym}_n^k, \quad \text{e} \quad f_m(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = f_n(x_1, \ldots, x_n), \forall m > n.$$

- $\mathrm{Sym} = \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{Sym}^k$.

Exemplo

A soma formal $m_{(3\,2\,1)} = \sum_{\sigma\in S_\infty} x^{\sigma(3\,2\,1\,0\,0\,\cdots)}$ é um elemento de Sym.

- Denote por $\mathcal{P}_n$ o conjunto das partições de n e $\mathcal{P} = \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{P}_n$ (= conjunto de sequências quase-nulas decrescentes com entradas em $\mathbb{N}$).
- Para cada $\lambda \in P$ chamamos $m_\lambda = \sum_{\sigma\in S_\infty} x^{\sigma\lambda}$ de **função monomial simétrica**.
- $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ forma uma $\mathbb{Z}$-base para Sym.

Anel de funções simétricas

- O anel de funções simétricas é $\mathrm{Sym} = \Bbbk[x_1, \dots, x_n, \dots]^{S_\infty}$, onde S_∞ é o grupo de permutação de $\mathbb{N}$.
- Seja $\mathrm{Sym}_n^k = \{f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]^{S_n} \mid \deg f = k\}$ então um elemento de Sym^k é uma sequência $(f_n)_{n \geq 0}$, onde

$$f_n \in \mathrm{Sym}_n^k, \quad \text{e} \quad f_m(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = f_n(x_1, \dots, x_n), \forall m > n.$$

- $\mathrm{Sym} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{Sym}^k$.

Exemplo

A soma formal $m_{(3\,2\,1)} = \sum_{\sigma \in S_\infty} x^{\sigma(3\,2\,1\,0\,0\,\cdots)}$ é um elemento de Sym.

- Denote por $\mathcal{P}_n$ o conjunto das partições de n e $\mathcal{P} = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$ (= conjunto de sequências quase-nulas decrescentes com entradas em $\mathbb{N}$).
- Para cada $\lambda \in P$ chamamos $m_\lambda = \sum_{\sigma \in S_\infty} x^{\sigma\lambda}$ de **função monomial simétrica**.
- $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ forma uma $\mathbb{Z}$-base para Sym.
- $h_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} m_\lambda$ é chamado de **função simétrica completa**.
- Vale $\mathrm{Sym} = \Bbbk[h_1, h_2, \dots]$ e $\{h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_n}\}_{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}}$ é base de Sym.
- Seja $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq n}$ for $\lambda \in \mathcal{P}$ e $n = \ell(\lambda)$. Tais funções são simétricas e são chamadas de **funções de Schur**.
- $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ forma uma $\mathbb{Z}$-base para Sym.

- Dado uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$, podemos associar a ela um **diagrama de Young**

$$T = \ydiagram{4,2,2,1} \quad ,$$

onde a linha i tem λ_i caixas. Dizemos que T tem forma λ.

- Dado uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$, podemos associar a ela um **diagrama de Young**

$$T = \ydiagram{4,2,2,1} \quad ,$$

  onde a linha i tem λ_i caixas. Dizemos que T tem forma λ.

- Um tableau é uma numeração de um diagrama de Young de forma λ:

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 \\ 6 & 7 \\ 7 \end{ytableau} \quad .$$

  Ele é chamado de **semistandart** se é crescente nas linhas e estritamente crescente nas colunas.

Diagramas de Young e Tableaux

- Dado uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$, podemos associar a ela um **diagrama de Young**

$$T = \ydiagram{4,2,2,1} \quad ,$$

onde a linha i tem λ_i caixas. Dizemos que T tem forma λ.

- Um tableau é uma numeração de um diagrama de Young de forma λ:

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 \\ 6 & 7 \\ 7 \end{ytableau} \quad .$$

Ele é chamado de **semistandart** se é crescente nas linhas e estritamente crescente nas colunas.

- $s_\lambda = \sum_T x^T$, onde a soma corre por tableaux semistandart de formato λ e $x^T = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots$ onde m_i é a quantidade de vezes que i aparece em T.

- Seja $\lambda \in \mathcal{P}_n$, vamos considerar um tableau T apenas com números de 1 a n.

- Seja $\lambda \in \mathcal{P}_n$, vamos considerar um tableau T apenas com números de 1 a n.
- S_n age naturalmente num tableau T de forma $\lambda \in \mathcal{P}_n$.

- Seja $\lambda \in \mathcal{P}_n$, vamos considerar um tableau T apenas com números de 1 a n.
- S_n age naturalmente num tableau T de forma $\lambda \in \mathcal{P}_n$.
- Seja um tableau T de forma λ. Definimos

$$R(T) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \cdot T \text{ permuta apenas as linhas}\}$$
$$C(T) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \cdot T \text{ permuta apenas as colunas}\},$$

e seja $\{T\}$ a órbida de T pela ação de $R(T)$.

- Seja $\lambda \in \mathcal{P}_n$, vamos considerar um tableau T apenas com números de 1 a n.
- S_n age naturalmente num tableau T de forma $\lambda \in \mathcal{P}_n$.
- Seja um tableau T de forma λ. Definimos

$$R(T) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \cdot T \text{ permuta apenas as linhas}\}$$
$$C(T) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \cdot T \text{ permuta apenas as colunas}\},$$

  e seja $\{T\}$ a órbida de T pela ação de $R(T)$.
- Definimos o $\mathbb{C}S_n$-módulo

$$M^\lambda = \operatorname{span}\{\{T\} \mid T \text{ tableau da forma } \lambda\}$$

Exemplo

Para $\lambda = (2,1)$, $M^\lambda = \operatorname{span}\left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}.$

- Para um tableau T de forma λ, defina

$$v_T = \sum_{\sigma \in C(T)} \operatorname{sgn}(\sigma)\{\sigma \cdot T\} \quad \text{e} \quad S^\lambda = \operatorname{span}\{v_T \mid T \text{ tableau da forma } \lambda\}.$$

- S^λ é chamado de **Specht módulo** e vale que $\{v_T \mid T \text{ semistandard}\}$ é base de S^λ.

- Para um tableau T de forma λ, defina

$$v_T = \sum_{\sigma \in C(T)} \mathrm{sgn}(\sigma)\{\sigma \cdot T\} \quad \text{e} \quad S^\lambda = \mathrm{span}\{v_T \mid T \text{ tableau da forma } \lambda\}.$$

- S^λ é chamado de **Specht módulo** e vale que $\{v_T \mid T \text{ semistandard}\}$ é base de S^λ.
- Para $S^{(n)}$ é isomorfo a representação trivial e $S^{(1^n)}$ é isomorfo a representação do sinal.

- Para um tableau T de forma λ, defina

$$v_T = \sum_{\sigma \in C(T)} \mathrm{sgn}(\sigma)\{\sigma \cdot T\} \quad \text{e} \quad S^\lambda = \mathrm{span}\{v_T \mid T \text{ tableau da forma } \lambda\}.$$

- S^λ é chamado de **Specht módulo** e vale que $\{v_T \mid T \text{ semistandard}\}$ é base de S^λ.
- Para $S^{(n)}$ é isomorfo a representação trivial e $S^{(1^n)}$ é isomorfo a representação do sinal.

Proposição

Os Specht módulos são irredutíveis e não isomorfos entre si. Além disso, todo S_n-módulo irredutivel é isomorfo a algum Specht módulo.

- Para um tableau T de forma λ, defina

$$v_T = \sum_{\sigma \in C(T)} \mathrm{sgn}(\sigma)\{\sigma \cdot T\} \quad \text{e} \quad S^\lambda = \mathrm{span}\{v_T \mid T \text{ tableau da forma } \lambda\}.$$

- S^λ é chamado de **Specht módulo** e vale que $\{v_T \mid T \text{ semistandard}\}$ é base de S^λ.
- Para $S^{(n)}$ é isomorfo a representação trivial e $S^{(1^n)}$ é isomorfo a representação do sinal.

Proposição

Os Specht módulos são irredutíveis e não isomorfos entre si. Além disso, todo S_n-módulo irredutivel é isomorfo a algum Specht módulo.

- $\mathcal{K}_0(\mathbb{C}S_n\text{-mod}) = \mathbb{Z}\langle S^\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n \rangle$.

- Para um tableau T de forma λ, defina

$$v_T = \sum_{\sigma \in C(T)} \mathrm{sgn}(\sigma)\{\sigma \cdot T\} \quad \text{e} \quad S^\lambda = \mathrm{span}\{v_T \mid T \text{ tableau da forma } \lambda\}.$$

- S^λ é chamado de **Specht módulo** e vale que $\{v_T \mid T \text{ semistandard}\}$ é base de S^λ.
- Para $S^{(n)}$ é isomorfo a representação trivial e $S^{(1^n)}$ é isomorfo a representação do sinal.

Proposição

Os Specht módulos são irredutíveis e não isomorfos entre si. Além disso, todo S_n-módulo irredutivel é isomorfo a algum Specht módulo.

- $\mathcal{K}_0(\mathbb{C}S_n\text{-mod}) = \mathbb{Z}\langle S^\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\rangle$.
- Dado $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$, definimos uma ordem parcial $\mu \prec \lambda \Leftrightarrow \mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$, para todo i.
- Existem inteiros não negativos $k_{\lambda,\mu}$ tais que

$$M^\lambda \simeq S^\lambda \bigoplus_{\mu \prec \lambda} (S^\mu)^{\oplus k_{\lambda,\mu}}.$$

- Para um tableau T de forma λ, defina

$$v_T = \sum_{\sigma \in C(T)} \mathrm{sgn}(\sigma)\{\sigma \cdot T\} \quad \text{e} \quad S^\lambda = \mathrm{span}\{v_T \mid T \text{ tableau da forma } \lambda\}.$$

- S^λ é chamado de **Specht módulo** e vale que $\{v_T \mid T \text{ semistandard}\}$ é base de S^λ.
- Para $S^{(n)}$ é isomorfo a representação trivial e $S^{(1^n)}$ é isomorfo a representação do sinal.

Proposição

Os Specht módulos são irredutíveis e não isomorfos entre si. Além disso, todo S_n-módulo irredutivel é isomorfo a algum Specht módulo.

- $\mathcal{K}_0(\mathbb{C}S_n\text{-mod}) = \mathbb{Z}\langle S^\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n \rangle$.
- Dado $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$, definimos uma ordem parcial $\mu \prec \lambda \Leftrightarrow \mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$, para todo i.
- Existem inteiros não negativos $k_{\lambda,\mu}$ tais que

$$M^\lambda \simeq S^\lambda \bigoplus_{\mu \prec \lambda} (S^\mu)^{\oplus k_{\lambda,\mu}}.$$

- Consequência: $\{[M^\lambda] \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ é base de $\mathcal{K}_0(\mathbb{C}S_n\text{-mod})$.

Produto em "$\mathcal{K}_0(S_\infty\text{-mod})$"

- Seja $A_n = \mathbb{C}S_n$, $A_0 = A_1 = \mathbb{C}$.

Produto em "$\mathcal{K}_0(S_\infty\text{-mod})$"

- Seja $A_n = \mathbb{C}S_n$, $A_0 = A_1 = \mathbb{C}$.
- Podemos identificar $S_n \times S_m$ como um subgrupo de S_{n+m}. Ou seja, $A_n \otimes A_m$ como um subgrupo de A_{n+m}.

Produto em "$\mathcal{K}_0(S_\infty\text{-mod})$"

- Seja $A_n = \mathbb{C}S_n$, $A_0 = A_1 = \mathbb{C}$.
- Podemos identificar $S_n \times S_m$ como um subgrupo de S_{n+m}. Ou seja, $A_n \otimes A_m$ como um subgrupo de A_{n+m}.
- Obtmos dois funtores:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{n,m}^{n+m} = A_{n+m} \otimes_{A_n \otimes A_m} - &: A_n\text{-mod} \times A_m\text{-mod} \to A_{n+m}\text{-mod}, \\ \mathrm{Res}_{n,m}^{n+m} &: \Bbbk A_{n+m}\text{-mod} \to A_n\text{-mod} \times A_m\text{-mod}, \end{aligned}$$

Produto em "$\mathcal{K}_0(S_\infty\text{-mod})$"

- Seja $A_n = \mathbb{C}S_n$, $A_0 = A_1 = \mathbb{C}$.
- Podemos identificar $S_n \times S_m$ como um subgrupo de S_{n+m}. Ou seja, $A_n \otimes A_m$ como um subgrupo de A_{n+m}.
- Obtmos dois funtores:

$$\mathrm{Ind}_{n,m}^{n+m} = A_{n+m} \otimes_{A_n \otimes A_m} - : A_n\text{-mod} \times A_m\text{-mod} \to A_{n+m}\text{-mod},$$
$$\mathrm{Res}_{n,m}^{n+m} : \Bbbk A_{n+m}\text{-mod} \to A_n\text{-mod} \times A_m\text{-mod},$$

- Tais funtores são exatos e define produto e co-produto em $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n\text{-mod}$.

Produto em "$\mathcal{K}_0(S_\infty\text{-mod})$"

- Seja $A_n = \mathbb{C}S_n$, $A_0 = A_1 = \mathbb{C}$.
- Podemos identificar $S_n \times S_m$ como um subgrupo de S_{n+m}. Ou seja, $A_n \otimes A_m$ como um subgrupo de A_{n+m}.
- Obtmos dois funtores:

$$\mathrm{Ind}_{n,m}^{n+m} = A_{n+m} \otimes_{A_n \otimes A_m} - \colon A_n\text{-mod} \times A_m\text{-mod} \to A_{n+m}\text{-mod},$$
$$\mathrm{Res}_{n,m}^{n+m} \colon \Bbbk A_{n+m}\text{-mod} \to A_n\text{-mod} \times A_m\text{-mod},$$

- Tais funtores são exatos e define produto e co-produto em $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$-mod.
- Para $M \in A_n$-mod e $N \in A_m$-mod, temos

$$[M][N] = \mathrm{Ind}_{n,m}^{n+m} M \otimes N.$$

Theorem (Geissinger, 1977 -)

Existe um isomorpfismo de (bi)álgebras

$$\varphi\colon \mathrm{Sym} \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_0(\Bbbk S_n\text{-}\mathsf{mod}), \quad s_\lambda \mapsto [S^\lambda],$$

onde s_λ *and* S^λ*, para toda partição* λ *de* n*.*

Theorem (Geissinger, 1977 -)

Existe um isomorpfismo de (bi)álgebras

$$\varphi\colon \mathrm{Sym} \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_0(\Bbbk S_n\text{-mod}), \quad s_\lambda \mapsto [S^\lambda],$$

onde s_λ and S^λ, para toda partição λ de n.

Proof.

Defina $\varphi(h_\lambda) \mapsto [M^\lambda]$ e extenda linearmente. Como $\{h_\lambda\}$ e $\{[M^\lambda]\}$ são bases, o morfismo é automaticamente bijetor.
Para mostrar que é basta verificar que

$$[M^{\lambda_1}][M^{\lambda_2}]\cdots[M^{\lambda_n}] = [M^\lambda], \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Mas isso segue do fato de $M^\lambda \simeq A_n \otimes_{\mathbb{C}R(T)} \mathbb{C}$, para qualquer tableau T de forma λ. $\square$

Consequências

Resultados de **funções simétricas** para **representações de** S_n:

Consequências

Resultados de **funções simétricas** para **representações de** S_n:

(regra de Littlewood-Richardson) $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Ind}^{n+m}_{n,m} S^\lambda \otimes S^\mu \simeq \bigoplus_\nu (S^\nu)^{\oplus c^\nu_{\lambda,\mu}}$.

Consequências

Resultados de **funções simétricas** para **representações de S_n**:

(regra de Littlewood-Richardson) $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Ind}^{n+m}_{n,m} S^\lambda \otimes S^\mu \simeq \bigoplus_\nu (S^\nu)^{\oplus c^\nu_{\lambda,\mu}}$.

Resultados de **representações de S_n** para **funções simétricas**:

Resultados de **funções simétricas** para **representações de S_n**:

(regra de Littlewood-Richardson) $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Ind}^{n+m}_{n,m} S^\lambda \otimes S^\mu \simeq \bigoplus_\nu (S^\nu)^{\oplus c^\nu_{\lambda,\mu}}$.

Resultados de **representações de S_n** para **funções simétricas**:

$$\{[S^\lambda] | \lambda \text{ partição}\} \text{ é uma base canônica para } \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_0(\Bbbk S_n\text{-mod})$$

$$\Rightarrow \{s_\lambda\}_\lambda \text{ é base para } \mathrm{Sym}\,.$$

Consequências

Resultados de **funções simétricas** para **representações de S_n**:

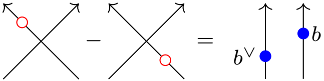
(regra de Littlewood-Richardson) $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Ind}^{n+m}_{n,m} S^\lambda \otimes S^\mu \simeq \bigoplus_\nu (S^\nu)^{\oplus c^\nu_{\lambda,\mu}}$.

Resultados de **representações de S_n** para **funções simétricas**:

$$\{[S^\lambda] | \lambda \text{ partição}\} \text{ é uma base canônica para } \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_0(\Bbbk S_n\text{-mod})$$

$$\Rightarrow \{s_\lambda\}_\lambda \text{ é base para } \mathrm{Sym}\,.$$

Veja mais em [Ful96], [Mac15].



Um pouco mais sobre Categorificação

Section 3

- Podemos ver uma álgebra associativa A como categoria:

$$\mathcal{C}_A: \quad \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = \{\bullet\}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\bullet, \bullet) = A.$$

2-categorias

- Podemos ver uma álgebra associativa A como categoria:

$$\mathcal{C}_A : \quad \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = \{\bullet\}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\bullet, \bullet) = A.$$

- Se álgebra “é uma categoria”, então sua categorificação deveria ser uma 2-categoria

2-categorias

- Podemos ver uma álgebra associativa A como categoria:

$$\mathcal{C}_A: \quad \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = \{\bullet\}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\bullet, \bullet) = A.$$

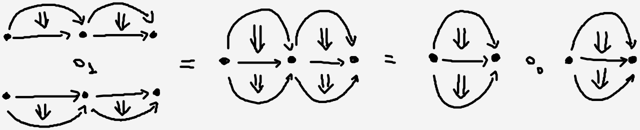
- Se álgebra "é uma categoria", então sua categorificação deveria ser uma 2-categoria

Definição

Uma 2-categoria é uma categoria $\mathbf{C}$ onde para cada $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ existe uma estrutura de categorias em $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ com composição $\circ_1$, e, além disso existe uma composição

$$\circ_0 : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z)}(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)}(\mathsf{F}', \mathsf{G}') \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z)}(\mathsf{F} \circ \mathsf{F}', \mathsf{G} \circ \mathsf{G}')$$

tal que



Chamamos os elementos de $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)}(\alpha, \beta)$ de **0-morfimos**, **1-morfimos** e **2-morfisos**, respectivamente

Exemplo: Categoria das categorias, onde $\circ_1$ é o produto Godement de transformações naturais.

Exemplo 2: Categoria monoidal $\mathcal{C}$, onde 0-morfismos $= \{\bullet\}$, 1-morfismos $= \mathcal{C}$, 2-morfismos $= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\circ_0 = \otimes$.

Exemplo: Categoria das categorias, onde $\circ_1$ é o produto Godement de transformações naturais.

Exemplo 2: Categoria monoidal $\mathcal{C}$, onde 0-morfismos $= \{\bullet\}$, 1-morfismos $= \mathcal{C}$, 2-morfismos $= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\circ_0 = \otimes$.

- Uma 2-categoria é abeliana se $\{$0-morfismos $+$ 1-morfismos$\}$ e $\{$1-morfismos $+$ 2-morfismos$\}$ o forem.

Exemplo: Categoria das categorias, onde $\circ_1$ é o produto Godement de transformações naturais.

Exemplo 2: Categoria monoidal $\mathcal{C}$, onde 0-morfismos $= \{\bullet\}$, 1-morfismos $= \mathcal{C}$, 2-morfismos $= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\circ_0 = \otimes$.

- Uma 2-categoria é abeliana se $\{$0-morfismos $+$ 1-morfismos$\}$ e $\{$1-morfismos $+$ 2-morfismos$\}$ o forem.
- A categoria de Grothendieck $\mathcal{K}_0(\mathbf{C})$ de uma 2-categoria $\mathbf{C}$ é a categoria obtida ao esquecer os 2-morfismos e definir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_0(\mathbf{C})}(X, Y) = \mathcal{K}_0(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y))$.

Exemplo: Categoria das categorias, onde $\circ_1$ é o produto Godement de transformações naturais.

Exemplo 2: Categoria monoidal $\mathcal{C}$, onde 0-morfismos $= \{\bullet\}$, 1-morfismos $= \mathcal{C}$, 2-morfismos $= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\circ_0 = \otimes$.

- Uma 2-categoria é abeliana se {0-morfismos + 1-morfismos} e {1-morfismos + 2-morfismos} o forem.
- A categoria de Grothendieck $\mathcal{K}_0(\mathbf{C})$ de uma 2-categoria $\mathbf{C}$ é a categoria obtida ao esquecer os 2-morfismos e definir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_0(\mathbf{C})}(X, Y) = \mathcal{K}_0(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y))$.

Definição

Uma Categorificação (genuina) de uma álgebra associativa A é uma 2-categoria com categoria de Grotendieck isomorfa a $\mathcal{C}_A$.

Exemplo: Categoria das categorias, onde $\circ_1$ é o produto Godement de transformações naturais.

Exemplo 2: Categoria monoidal $\mathcal{C}$, onde 0-morfismos $= \{\bullet\}$, 1-morfismos $= \mathcal{C}$, 2-morfismos $= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\circ_0 = \otimes$.

- Uma 2-categoria é abeliana se $\{$0-morfismos $+$ 1-morfismos$\}$ e $\{$1-morfismos $+$ 2-morfismos$\}$ o forem.
- A categoria de Grothendieck $\mathcal{K}_0(\mathbf{C})$ de uma 2-categoria $\mathbf{C}$ é a categoria obtida ao esquecer os 2-morfismos e definir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_0(\mathbf{C})}(X, Y) = \mathcal{K}_0(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y))$.

Definição

Uma Categorificação (genuina) de uma álgebra associativa A é uma 2-categoria com categoria de Grotendieck isomorfa a $\mathcal{C}_A$.

- E para módulos?

Exemplo: Categoria das categorias, onde $\circ_1$ é o produto Godement de transformações naturais.

Exemplo 2: Categoria monoidal $\mathcal{C}$, onde 0-morfismos $= \{\bullet\}$, 1-morfismos $= \mathcal{C}$, 2-morfismos $= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\circ_0 = \otimes$.

- Uma 2-categoria é abeliana se {0-morfismos + 1-morfismos} e {1-morfismos + 2-morfismos} o forem.
- A categoria de Grothendieck $\mathcal{K}_0(\mathbf{C})$ de uma 2-categoria $\mathbf{C}$ é a categoria obtida ao esquecer os 2-morfismos e definir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_0(\mathbf{C})}(X, Y) = \mathcal{K}_0(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y))$.

Definição

Uma Categorificação (genuina) de uma álgebra associativa A é uma 2-categoria com categoria de Grotendieck isomorfa a $\mathcal{C}_A$.

- E para módulos? Nos dará a noção de **2-representação**. Veja [Maz17].

Diagramas

Section 4

Álgebra de Heisenberg $\mathrm{Heis}_{\Bbbk}$: $\Bbbk$-álgebra associativa unital gerada por p_n, p_n^*, $n \in \mathbb{N}$ sob relações:

$$p_n p_m^* = p_m^* p_n + \delta_{n,m} 1, \quad p_n p_m = p_m p_n, \quad p_n^* p_m^* = p_m^* p_n^*, \; m, n \in \mathbb{N}.$$

Álgebra de Heisenberg $\mathrm{Heis}_{\Bbbk}$: $\Bbbk$-álgebra associativa unital gerada por p_n, p_n^*, $n \in \mathbb{N}$ sob relações:

$$p_n p_m^* = p_m^* p_n + \delta_{n,m} 1, \quad p_n p_m = p_m p_n, \quad p_n^* p_m^* = p_m^* p_n^*, \; m, n \in \mathbb{N}.$$

- Existe realização de Heis via Sym
- Ind e Res em "S_∞-mod" satisfazem

$$\mathrm{Res}^n_{n+1} \circ \mathrm{Ind}^{n+1}_n \simeq \mathrm{Ind}^n_{n-1} \circ \mathrm{Res}^{n-1}_n \oplus \mathrm{Id}$$

Álgebra de Heisenberg $\mathrm{Heis}_{\Bbbk}$: $\Bbbk$-álgebra associativa unital gerada por p_n, p_n^*, $n \in \mathbb{N}$ sob relações:

$$p_n p_m^* = p_m^* p_n + \delta_{n,m} 1, \quad p_n p_m = p_m p_n, \quad p_n^* p_m^* = p_m^* p_n^*, \; m, n \in \mathbb{N}.$$

- Existe realização de Heis via Sym
- Ind e Res em "S_∞-mod" satisfazem

$$\mathrm{Res}^n_{n+1} \circ \mathrm{Ind}^{n+1}_n \simeq \mathrm{Ind}^n_{n-1} \circ \mathrm{Res}^{n-1}_n \oplus \mathrm{Id}$$

Natural que os três objetos estejam relacionados.

Álgebra de Heisenberg $\mathrm{Heis}_{\Bbbk}$: $\Bbbk$-álgebra associativa unital gerada por p_n, p_n^*, $n \in \mathbb{N}$ sob relações:

$$p_n p_m^* = p_m^* p_n + \delta_{n,m} 1, \quad p_n p_m = p_m p_n, \quad p_n^* p_m^* = p_m^* p_n^*, \ m, n \in \mathbb{N}.$$

- Existe realização de Heis via Sym
- Ind e Res em "S_∞-mod" satisfazem

$$\mathrm{Res}^n_{n+1} \circ \mathrm{Ind}^{n+1}_n \simeq \mathrm{Ind}^n_{n-1} \circ \mathrm{Res}^{n-1}_n \oplus \mathrm{Id}$$

Natural que os três objetos estejam relacionados.

De fato: Khovanov ([Kho14]) construiu uma categoria monoidal $\mathcal{H}eis$ (gerada por 2 objetos Q_+ e Q_-) tal que

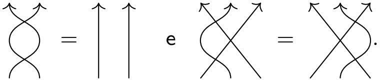
- $\mathrm{Heis} \hookrightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{H}eis)$ (provado o isomorfismo por [BSW18]).
- $\Bbbk S_n \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{H}eis}(Q_+^{\otimes n})$,

Ideia de Khovanov

- É natural denotar uma transposição simples de S_n por 

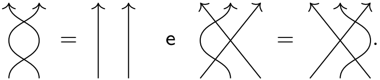
Ideia de Khovanov

- É natural denotar uma transposição simples de S_n por 
- As relações $s_i s_i = 1$ e $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ se traduzem em:



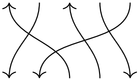
Ideia de Khovanov

- É natural denotar uma transposição simples de S_n por 
- As relações $s_i s_i = 1$ e $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ se traduzem em:



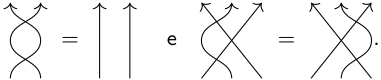
- Khovanov definiu diagramas para $\mathcal{H}eis$ que se comportava de maneira igual:

$$Q_+ = \uparrow, \quad Q_- = \downarrow,$$



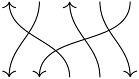
Ideia de Khovanov

- É natural denotar uma transposição simples de S_n por 
- As relações $s_i s_i = 1$ e $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ se traduzem em:

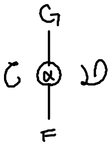


- Khovanov definiu diagramas para $\mathcal{H}eis$ que se comportava de maneira igual:

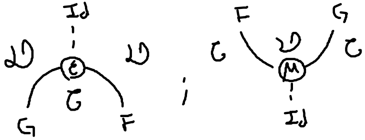
$$Q_+ = \uparrow, \quad Q_- = \downarrow,$$

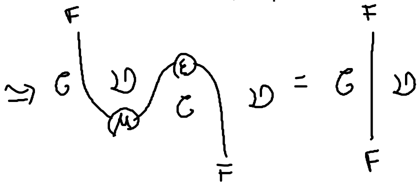


- Khovanov construiu também diagramas para 2-categorias

- 2-morfismos $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ é representado por 

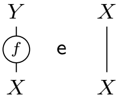
Dualidade: Seja F $\dashv$ G e μ: $\mathrm{Id} \to$ GF e ϵ: FG $\to \mathrm{Id}$ a unidade e co-unidade, respectivamente.
Então representamos por:



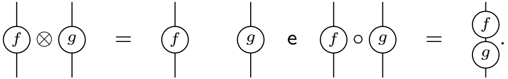


$F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$

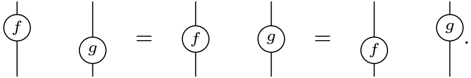
- Um morfismo $f \colon X \to Y$ e a identidade Id_X serão denotados por



- Composição horizontal e vertical são literais, ou seja:



- Vale

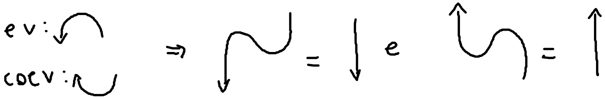


- Mais sobre em [Sav]

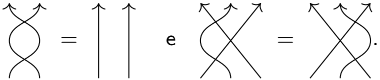
Cup e Cap: Em **vect**, considere ev: $V^* \otimes V \to \Bbbk$ e coev: $\Bbbk \to V \otimes V^*$, e denote por:

- temos:

  $V \doteq \uparrow ; V^* = \downarrow$

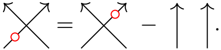


S_∞ Defina $\mathcal{S}$ como a categoria $\Bbbk$-linear monoidal (estrita) tal que $\mathrm{Obj}\,\mathcal{S}$ é gegrada por $\uparrow$, e os morfismos são gerados por  satisfazendo



Temos $\Bbbk S_n = \mathrm{End}_{\mathcal{S}}(\uparrow^{\otimes n})$.

- Adicione em $\mathcal{S}$ um morfismo : $\uparrow \to \uparrow$ e imponha



  Obtemos uma nova categoria $\mathcal{AH}^{\mathbf{deg}}$ tal que $\mathrm{End}_{\mathcal{AH}^{\mathbf{deg}}}(\uparrow^{\otimes n})$ é isomorfa a álgebra de Hecke afim degenerada dAHA$_n$.
- Vale dAHA$_n \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{H}eis}(\uparrow^{\otimes n})$.

Nova abordagem à categorificação

- Ao usar diagramas de cordas, podemos definir **sob ecomenda** uma (2-)categoria que categorifica nosso objeto desejado (via $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_0(\mathrm{Kar}(\mathrm{Add}(-)))$, Tr, etc).

Nova abordagem à categorificação

- Ao usar diagramas de cordas, podemos definir **sob ecomenda** uma (2-)categoria que categorifica nosso objeto desejado (via $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_0(\text{Kar}(\text{Add}(-)))$, Tr, etc).

- Facilita cálculos: pois basta "brincar" de distorcer diagramas e deslizar pontos, etc...

Nova abordagem à categorificação

- Ao usar diagramas de cordas, podemos definir **sob ecomenda** uma (2-)categoria que categorifica nosso objeto desejado (via $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_0(\mathsf{Kar}(\mathsf{Add}(-)))$, Tr, etc).

- Facilita cálculos: pois basta "brincar" de distorcer diagramas e deslizar pontos, etc...

Desvantagem: Utiliza-se de categorias não conhecidas. Então os resultados seguem apenas para um lado...

Nova abordagem à categorificação

- Ao usar diagramas de cordas, podemos definir **sob ecomenda** uma (2-)categoria que categorifica nosso objeto desejado (via $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_0(\mathsf{Kar}(\mathsf{Add}(-)))$, Tr, etc).

- Facilita cálculos: pois basta "brincar" de distorcer diagramas e deslizar pontos, etc...

Desvantagem: Utiliza-se de categorias não conhecidas. Então os resultados seguem apenas para um lado...

Onde aparece

- **KLR-algebras:** categorifica $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ [Rou12] e [KL11].
  - Existem outras categorificações de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ usando variedades quivers, feixes perversos (Lustig).

Resultado: base canônicas e base cristais (para $q \to 0$).

Onde aparece

- **KLR-algebras:** categorifica $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ [Rou12] e [KL11].
    - Existem outras categorificações de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ usando variedades quivers, feixes perversos (Lustig).

  Resultado: base canônicas e base cristais (para $q \to 0$).

- **Invariantes de Nós:** Homologia de Khovanov, Homologia HOMFLY-PT, etc...

Onde aparece

- **KLR-algebras:** categorifica $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ [Rou12] e [KL11].
    - Existem outras categorificações de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ usando variedades quivers, feixes perversos (Lustig).

  Resultado: base canônicas e base cristais (para $q \to 0$).

- **Invariantes de Nós:** Homologia de Khovanov, Homologia HOMFLY-PT, etc...

- **Categorificação Heisenberg:**
    - Distorções da categorificação de Khovanov [Sav19].
    - Relações com KLR-álgebras [BSW20].

Muito Obrigado!

Referências:

Jonathan Brundan, Alistair Savage, and Ben Webster.
The degenerate Heisenberg category and its Grothendieck ring, 2018.

Jonathan Brundan, Alistair Savage, and Ben Webster.
Heisenberg and Kac-Moody categorification.
Selecta Math. (N.S.), 26(5):Paper No. 74, 62, 2020.

William Fulton.
Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry.
London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1996.

Mikhail Khovanov.
Heisenberg algebra and a graphical calculus.
Fund. Math., 225(1):169–210, 2014.

Mikhail Khovanov and Aaron D. Lauda.
Erratum to: "A categorification of quantum $\mathrm{sl}(n)$" [mr2628852].
Quantum Topol., 2(1):97–99, 2011.

I. G. Macdonald.
Symmetric functions and Hall polynomials.
Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 2015.
With contribution by A. V. Zelevinsky and a foreword by Richard Stanley, Reprint of the 2008 paperback edition [MR1354144].

Volodymyr Mazorchuk.
Classification problems in 2-representation theory.
São Paulo J. Math. Sci., 11(1):1–22, 2017.

Raphaël Rouquier.
Quiver Hecke algebras and 2-Lie algebras.
Algebra Colloq., 19(2):359–410, 2012.

Alistair Savage.
String diagrams and categorification.
In *Interactions of Quantum Affine Algebras with Cluster Algebras, Current Algebras and Categorification*, Progr. Math. To appear. `arXiv:1806.06873`.

Alistair Savage.
Frobenius Heisenberg categorification.
Algebr. Comb., 2(5):937–967, 2019.