Categorias para o não-categórico

A5

Categorificação

- O que é? "Abstração"
- Por que estudar?

0. Linguagem natural

1. Já conhecemos

Ex 1: Demonstrações Combinatórias

Operações

Identidades binomiais

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Contagem dupla, etc.

Ex²: Argumentos de dimensão

Operações

Identidades binomiais

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. Nos dá novas formas de calcular invariantes

<u>Ex:</u> Característica de Euler

(Comb.) 1. Seja X uma superfície. Então podemos triangular X, e calculamos

$$\chi(X) = V - A + F$$

(Geom.) 2. Seja X uma variedade. Se $b_i(X) = \#$ de buracos i-dimensionais em X, então

$$\chi(X) = b_0(X) - b_1(X) + b_2(X) - b_3(X) + \cdots$$

$$b_i(X) = \dim H^i_{sing}(X, \mathbb{R})$$

(Top.) 3. Seja X um CW-complexo (finito) e $c_i := \#$ de i-células em X. Então

$$\chi(X) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots$$

3. Nos permite responder perguntas que fazemos.

<u>Ex:</u> É possível generalizar a dualidade de Pontrjagin para grupos não abelianos?

Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste dos seguintes dados:

- Uma coleção de objetos
- Para quaisquer objetos c e d, um conjunto de morfismo $\mathrm{Hom}(c,d)$
- Para quaisquer objetos c, d, e, uma função

$$\circ : \mathrm{Hom}(d,e) \times \mathrm{Hom}(c,d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(c,e)$$

tq:

(Associatividade)

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(Identidade)

$\forall c$ objeto $\exists\, id_c \in \mathrm{Hom}(c,c)$ tq

$$f \circ id_c = f = id_c \circ f.$$

Exemplos

- Set
  - objetos = conjuntos
  - morfismos = funções
- $\mathbb{k}$-Vect
  - objetos = esp. vetoriais
  - morfismos = transf. lineares
- Top
  - objetos = esp. topológicos
  - morfismos = funções contínuas
- Diff
  - objetos = var. suaves
  - morfismos = funções suaves
- $\mathrm{Rep}_{\mathbb{k}}(G)$
  - obj = repr. de G
  - morf = mapas equivariantes

⚠ Uma categoria não precisa representar conjuntos com estrutura e funções que preservam

Um funtor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste nos dados:

- Uma função $F: \mathrm{Obj}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$

- Para quaisquer objetos c, c' de $\mathcal{C}$, uma função

$$F: \mathrm{Hom}(c, c') \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(c), F(c'))$$

satisfazendo a "funtorialidade":

- $F(\mathrm{Id}_c) = \mathrm{Id}_{Fc}$
- $F(f \circ g) = Ff \circ Fg$

Exemplos

- (Co)homologia

$$H_n : \mathrm{Top} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathrm{Vect}$$
$$X \mapsto H_n(X, \mathbb{Q})$$

- Funtor esquecimento

$$U : \mathrm{Diff} \to \mathrm{Set}$$

- Funtor fibra

$$\omega : \mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G) \to \Bbbk\text{-}\mathrm{Vect}$$

"Aplicação": Teorema do Ponto fixo de Brouwer

Toda função contínua $f: B^n \to B^n$ admite um p^t fixo.

<u>Dem</u>: Se existe uma função f sem ponto fixo, podemos formar $p: B^n \to S^{n-1}$ cuja restrição a S^{n-1} é a identidade (ou seja $p \circ i = Id_{S^{n-1}}$).

Aplicando o funtor H_{n-1}, ficamos com

$Id_{\mathbb{Z}} = p_* \circ i_* = 0$. Absurdo! ■

Sejam $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dois funtores "paralelos"

Uma **transformação natural** $\alpha : F \Rightarrow G$ consiste em:

- Para cada $c \in \mathcal{C}$, uma função $\alpha_c : Fc \to Gc$ tq

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"'] \\
c'
\end{tikzcd}
\quad \mathcal{C}
\qquad \rightsquigarrow \qquad
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\
Fc' \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & Gc'
\end{tikzcd}
\quad \mathcal{D}
$$

Exemplos

- $ev : Id \longrightarrow (-)^{\vee\vee}$ em $Vect_{\mathbb{k}}$ definido por:

$$ev_V : V \longrightarrow (V^\vee)^\vee$$
$$v \longmapsto (f \longmapsto f(v))$$

- Sejam $\mathcal{M}, C^\vee : CHaus \longrightarrow Ban$ os funtores

$X \mapsto \mathcal{M}(X) =$ medidas Borelianas com sinal

$X \mapsto C(X)^\vee$ dual topológico das funções contínuas.

Então podemos definir $\phi : \mathcal{M} \Rightarrow C^\vee$ definida por

$$\phi_X(\mu) = \left(f \longmapsto \int_X f \, d\mu\right)$$ é iso. natural.

Uma categoria é dita $\Bbbk$-linear se:

- $\mathrm{Hom}(c, c')$ está em $\Bbbk$-Vect
- A composição é $\Bbbk$-linear
- Podemos definir a soma direta de dois objetos

Ex: $\Bbbk$-Vect

Espaços de Banach/Hilbert

$\mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G)$

$\mathrm{Vect}(X)$ = fibrados vetoriais sobre X

Uma categoria $\Bbbk$-linear é dita abeliana se

- Para todo morfismo $f: c \to c'$ existe o kernel e o cokernel $(= c'/\mathrm{im} f)$.
- Vale a "fatoração canônica"

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \frac{c}{\ker f} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{im} f \arrow[r, hook, "i"] & c' \end{tikzcd}$$

Ex: $\Bbbk$-Vect

$\mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G)$

Uma **categoria monoidal simétrica** consiste em:

- Uma categoria $\mathcal{C}$
- Um funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- Um objeto $\mathbb{1}$ de $\mathcal{C}$

e de isomorfismos

$$c \otimes d \cong d \otimes c$$

$$(c \otimes d) \otimes e \cong c \otimes (d \otimes e) \qquad c \otimes \mathbb{1} \cong c \cong c \otimes \mathbb{1}$$

Ex.: $(\mathrm{Set}, \times, \{*\})$ $\qquad$ $(\mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G), \otimes, \Bbbk)$

$(\Bbbk\text{-Vect}, \otimes, \Bbbk)$ $\qquad$ $(\mathrm{Diff}, \sqcup, \emptyset)$ $\qquad$ $(\mathrm{Top}, \times, \{*\})$

Dualidade de Pontrjagin

Para um grupo abeliano localmente compacto G, definimos seu dual por $\hat{G} := \mathrm{Hom}(G, S^1)$.

Exemplos:

- $\hat{\mathbb{Z}} = S^1$
- $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$
- $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- $\widehat{S^1} = \mathbb{Z}$
- $\hat{\mathbb{Q}}_p = \mathbb{Q}_p$
- $\hat{\mathbb{A}}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

DUALIDADE DE PONTRJAGIN

Teorema: Para todo G, o mapa

$$\begin{aligned} \iota : G &\longrightarrow \hat{\hat{G}} \\ g &\longmapsto (f \longmapsto f(g)) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos topológicos. Além disso, G é compacto se e somente se $\hat{G}$ é discreto (e vice-versa).

__Problema:__ Da forma como é definida, a dualidade de Pontrjagin certamente não vale para grupos não abelianos.

Solução[1]: Olhar para as representações irredutíveis

$\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, S^1) = \{\text{representações irredutíveis de } G\}$

$\varphi \cdot \psi \longleftrightarrow V \otimes W$

multiplicação $\longleftrightarrow$ prod. tensorial

⚠ Para grupos não abelianos, é possível que o produto de duas representações irredutíveis não seja irredutível

<u>Solução</u>[2]: Olhar para toda categoria $Rep_{\Bbbk}(G)$!

Estrutura:

- $\Bbbk$-linear
- abeliana
- monoidal
- Simétrica
- dotada do funtor fibra

$\omega : Rep_{\Bbbk}(G) \longrightarrow \Bbbk\text{-}Vect$

(isomorfismo)

Todo $g \in G$ nos dá uma transformação natural $m_g : \omega \Rightarrow \omega$ definida por:

Para cada representação (V, π), $m_g = \pi(g)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "T"] \\ W \end{tikzcd} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi(g)"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\tau(g)"'] & W \end{tikzcd}$$

$Rep_R(G)$

V

$$T(g \cdot v) = g \cdot T(v)$$

DUALIDADE DE TANNAKA

Seja G um grupo compacto e $\mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(G)$ a categoria das rep. contínuas. Então o mapa anterior $m : G \to \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ é um isomorfismo de grupos topológicos!

Pontrjagin:

$$\begin{array}{ccc} \text{Grupo} & \rightleftarrows & \text{Grupo} \\ G & \longmapsto & \widehat{G} \end{array}$$

Tannaka:

$$\begin{tikzcd} \text{Grupo} \arrow[r, shift left] & \mathrm{Rep}_{k}(G) \arrow[l, shift left] \arrow[d, "\omega"] \\ & k\text{-Vect} \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega) \longleftarrow\!\!\sim\!\!\sim\!\!\dashv$$

Questão: Em quais categorias eu posso obter um grupo dessa maneira?

Resposta: Categorias Tannakianas!

Se $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ é uma categoria $\Bbbk$-linear abeliana monoidal simétrica rígida tq $\mathrm{End}(\mathbb{1}) = \Bbbk$ e dotado de um funtor fibra $\tilde{\omega} : \mathcal{C} \to \Bbbk\text{-Vect}$. Então existe um grupo algébrico sobre $\Bbbk$ tq

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\tilde{\omega}"'] & & \mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G) \arrow[dl, "\omega"] \\
& \Bbbk\text{-Vect} &
\end{tikzcd}$$

É possível simplicar?

A qualquer grupo finito G, podemos associar uma álgebra de Hopf $\Bbbk[G]$ (a álgebra de grupos). Nesse ambiente, a dualidade de Pontrjagin se torna a dualidade de espaços vetoriais

$$\Bbbk[\hat{G}] \cong \Bbbk[G]^{\vee} = \mathrm{Hom}(\Bbbk[G], \Bbbk)$$

Dualidade de Cartier