

Categorias para

o não-católico

A5

Categorificação

- O que é? "Abstração"

- Por que estudar?

0. Linguagem natural

1. Já conhecemos

Ex^t: Demonstrações Combinatórias

Operações

Identidades binomiais

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Contagem dupla, etc.

Ex²: Argumentos de dimensão
Operações

Identidades binomiais

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. Nos dá novas formas de calcular invariantes

Ex: Característica de Euler

(Comb.) 1. Seja X uma superfície. Então podemos triangular X , e calculamos

$$\chi(X) = V - A + F$$

(Geom.) 2. Seja X uma variedade. Se

$b_i(X)$ = # de buracos i -dimensionais em X ,
então

$$\chi(X) = b_0(X) - b_1(X) + b_2(X) - b_3(X) + \dots$$

$$b_i(X) = \dim H_{\text{sing}}^i(X, \mathbb{R})$$

(Top.) 3. Seja X um CW-complexo (finito) e
 $C_i := \#$ de i -células em X . Então

$$\chi(X) = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots$$

3. Nos permite responder perguntas que fazemos.

Ex: É possível generalizar a dualidade de Pontrjagin para grupos não abelianos?

Uma categoria \mathcal{C} consiste dos seguintes dados:

- Uma coleção de objetos
- Para quaisquer objetos c e d , um conjunto de morfismo $\text{Hom}(c, d)$
- Para quaisquer objetos c, d, e , uma função

$$\circ: \text{Hom}(d, e) \times \text{Hom}(c, d) \longrightarrow \text{Hom}(c, e)$$

tg:

(Associatividade)

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(Identidade)

$\forall c$ objeto $\exists \text{id}_c \in \text{Hom}(c, c)$ tg

$$f \circ \text{id}_c = f = \text{id}_e \circ f.$$

Exemplos

- Set \rightarrow objetos = conjuntos
 \hookrightarrow morfismos = funções
- $\mathbb{R}\text{-Vect}$ \rightarrow objetos = esp. vetoriais
 \hookrightarrow morfismos = transf. lineares
- Top \rightarrow objetos = esp. topológicos
 \hookrightarrow morfismos = funções contínuas
- Diff \rightarrow objetos = var. suaves
 \hookrightarrow morfismos = funções suaves

- $\text{Rep}_{\mathbb{R}}(G)$ \rightarrow obj = repr. de G
 \hookrightarrow morf = mapas equivariantes

\triangleleft Uma categoria
não precisa representar
conjuntos com estrutura
e funções que preservam

Um funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste nos dados:

- Uma função $F: \text{Obj } \mathcal{C} \rightarrow \text{Obj } \mathcal{D}$

- Para quaisquer objetos c, c' de \mathcal{C} , uma função

$$F: \text{Hom}(c, c') \rightarrow \text{Hom}(F(c), F(c'))$$

Satisfazendo a "functorialidade":

- $F(\text{Id}_c) = \text{Id}_{F(c)}$

- $F(f \circ g) = Ff \circ Fg$

Exemplos

- (Co)homologia

$$H_n: \text{Top} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Vect}$$

$$X \mapsto H_n(X, \mathbb{Q})$$

- Funtor esquecimento

$$U: \text{Diff} \rightarrow \text{Set}$$

- Funtor fibra

$$\omega: \text{Rep}_k(G) \rightarrow k\text{-Vect}$$

"Aplicação": Teorema do Ponto fixo de Brouwer

Toda função contínua $f: B^n \rightarrow B^n$ admite um pt fixo.

Dem. Se existe uma função f sem ponto fixo, podemos formar $p: B^n \rightarrow S^{n-1}$ cuja restrição a S^{n-1} é a identidade (ou seja $p \circ i = \text{Id}_{S^{n-1}}$).

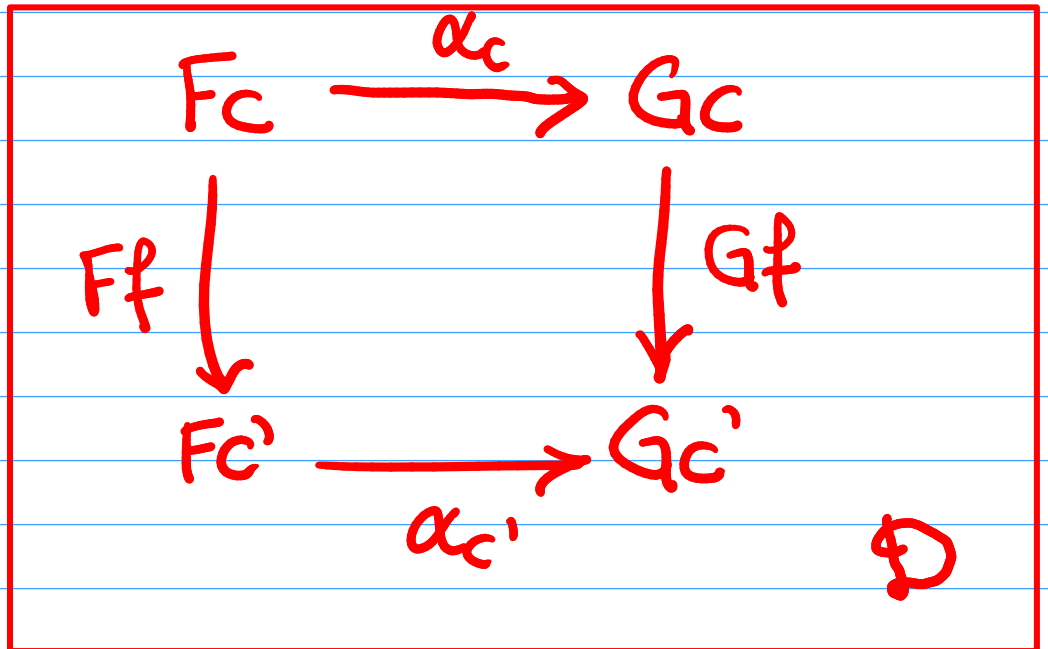
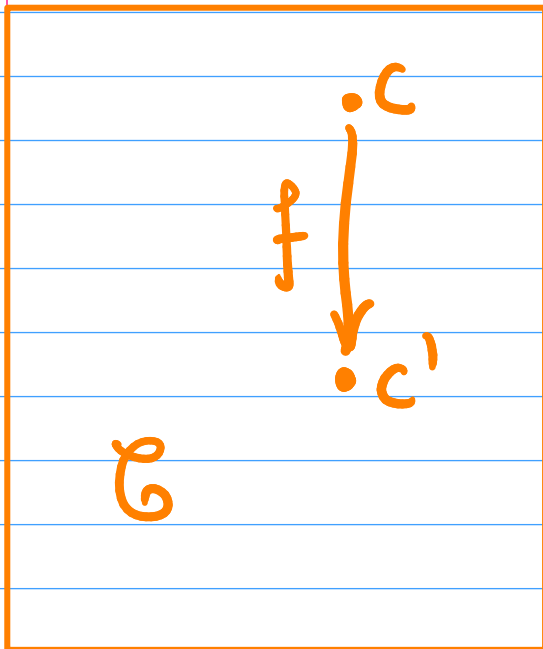
Aplicando o funtor H_{n-1} , ficamos com

$$\text{Id}_Z = p_* \circ i_* = 0. \quad \text{Absurdo!} \quad \blacksquare$$

Sejam $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dois funtores "paralelos"

Uma transformação natural $\alpha: F \Rightarrow G$ consiste em:

- Para cada $c \in \mathcal{C}$, uma função $\alpha_c: Fc \rightarrow Gc$ tq



Exemplos

• $ev: Id \rightarrow (-)^{vv}$ em $\text{Vect}_{\mathbb{R}}$ definido por:

$$ev_V: V \rightarrow (V^v)^v$$

$$v \mapsto (f \mapsto f(v))$$

• Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{C}^v: CHaus \rightarrow Ban$ os funtores

$X \mapsto \mathcal{M}(X) =$ medidas Borelianas com sinal

$X \mapsto \mathcal{C}(X)^v$ dual topológico das funções contínuas.

Então podemos definir $\phi: \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{C}^v$ definida por

$$\phi_X(\mu) = (f \mapsto \int_X f d\mu) \text{ é iso. natural.}$$

Uma categoria é dita k -linear se:

- $\text{Hom}(c, c')$ está em $k\text{-Vect}$
- A composição é k -linear
- Podemos definir a soma direta de dois objetos

Ex: $k\text{-Vect}$

Espaços de Banach / Hilbert

$\text{Rep}_k(G)$

$\text{Vect}(X) =$ fibrados vetoriais sobre X

Uma categoria \mathbb{k} -linear é dita **abeliana** se

- Para todo morfismo $f: C \rightarrow C'$ existe o kernel e o cokernel ($= C' / \text{im} f$).
- Vale a "fatoração canônica"

$$C \xrightarrow{\pi} \frac{C}{\ker f} \xrightarrow{\sim} \text{im} f \xrightarrow{i} C'$$

Ex: $\mathbb{k}\text{-Vect}$
 $\text{Rep}_{\mathbb{k}}(G)$

Uma categoria monoidal simétrica consiste em:

- Uma categoria \mathcal{C}
- Um funtor $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$
- Um objeto $\mathbb{1}$ de \mathcal{C}

e de isomorfismos

$$c \otimes d \cong d \otimes c$$

$$(c \otimes d) \otimes e \cong c \otimes (d \otimes e)$$

$$c \otimes \mathbb{1} \cong c \cong c \otimes \mathbb{1}$$

Ex.: (Set, \times , $\{*\}$)

(Rep $_k$ (G), \otimes , k)

(k -Vect, \otimes , k)

(Diff, \sqcup , \emptyset)

(Top, \times , $\{*\}$)

Dualidade de Pontrjagin

Para um grupo abeliano localmente compacto G ,
definimos seu dual por $\widehat{G} := \text{Hom}(G, S^1)$.

Exemplos:

- $\widehat{\mathbb{Z}} = S^1$
- $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$
- $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- $\widehat{S^1} = \mathbb{Z}$
- $\widehat{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Q}_p$
- $\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

DUALIDADE DE PONTRJAGIN

Teorema: Para todo G , o mapa

$$\iota: G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$$

$$g \mapsto (f \mapsto f(g))$$

é um isomorfismo de grupos topológicos.

Além disso, G é compacto se e somente se \widehat{G} é discreto (e vice-versa).

Problema: Da forma como é definida, a dualidade de Pontrjagin certamente não vale para grupos não abelianos.

Solução: Olhar para as representações irredutíveis

$$\hat{G} = \text{Hom}(G, S^+) = \{\text{representações irredutíveis de } G\}$$

$$\varphi \cdot \psi \longleftrightarrow V \otimes W$$

$$\text{multiplicação} \longleftrightarrow \text{prod. tensorial}$$

⚠ Para grupos não abelianos, é possível que o produto de duas representações irredutíveis não seja irredutível

Solução²: Olhar para toda categoria $\text{Rep}_k(G)$!

Estrutura:

- k -linear

- abeliana

- monoidal

- simétrica

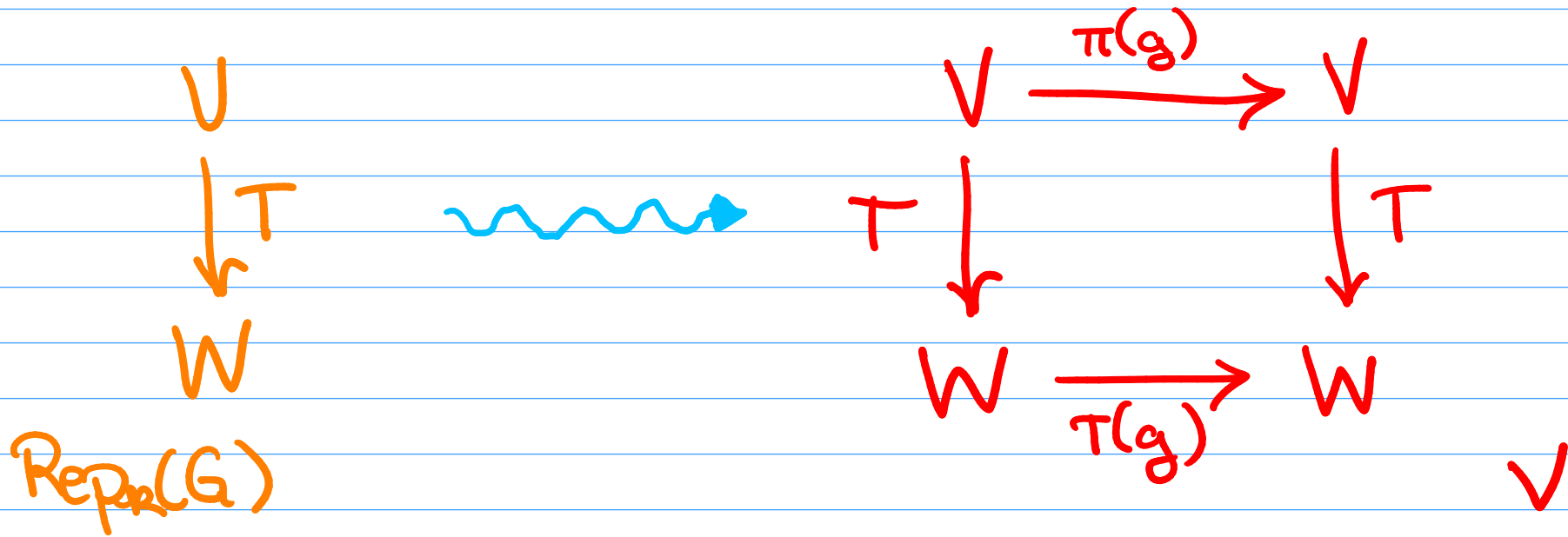
- dotada do funtor fibra

$\omega: \text{Rep}_k(G) \rightarrow k\text{-Vect}$

(isomorfismo)

Todo $g \in G$ nos dá uma transformação natural
 $m_g: \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{W}$ definida por:

Para cada representação (V, π) , $m_g = \pi(g)$



$$T(g \cdot v) = g \cdot T(v)$$

DUALIDADE DE TANNAKA

Seja G um grupo compacto e $\text{Rep}_*(G)$ a categoria das rep. contínuas. Então o mapa anterior $m: G \rightarrow \text{Aut}^{\otimes}(\omega)$ é um isomorfismo de grupos topológicos!

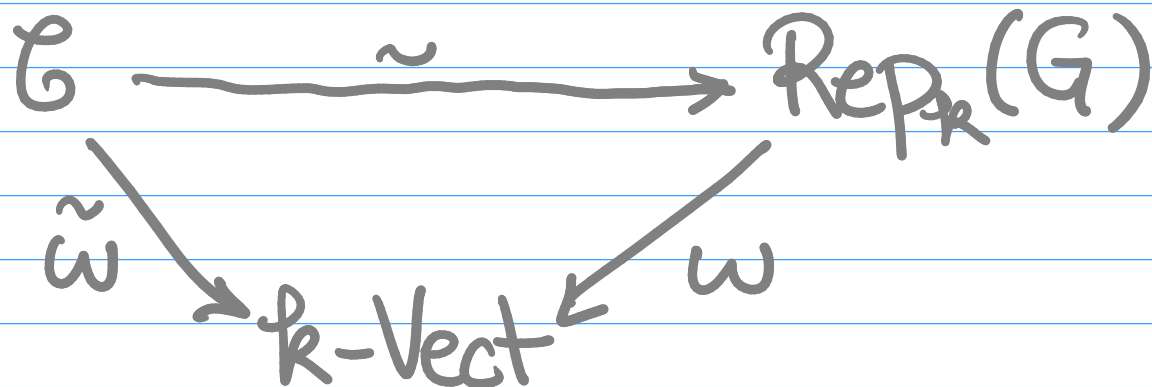
Pontrjagin: $\text{Grupo} \rightleftarrows \text{Grupo}$
 $G \rightleftarrows \hat{G}$

Tannaka: $\text{Grupo} \rightleftarrows \text{Rep}_k(G)$
 $\downarrow \omega$
 $k\text{-Vect}$
 $\text{Aut}^\otimes(\omega) \rightsquigarrow$

Questão: Em quais categorias eu posso obter um grupo dessa maneira?

Resposta: **Categorias Tannakianas!**

Se $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ é uma categoria \mathbb{k} -linear abeliana monoidal simétrica **rígida** tq $\text{End}(\mathbb{1}) = \mathbb{k}$ e dotado de um funtor fibra $\tilde{\omega}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Vect}$. Então existe um grupo algébrico sobre \mathbb{k} tq



É possível simplicar?

A qualquer grupo **finito** G , podemos associar uma **álgebra de Hopf** $\mathbb{k}[G]$ (a álgebra de grupos). Nesse ambiente, a dualidade de Pontrjagin se torna a dualidade de espaços vetoriais

$$\mathbb{k}[\hat{G}] \cong \mathbb{k}[G]^{\vee} = \text{Hom}(\mathbb{k}[G], \mathbb{k})$$

Dualidade de Cartier