# Feixes em Dinâmica de Opinião

Ana Luiza Tenório

IME - Adjoint School

2022

# Feixes em Dinâmica de Opinião

# O que é uma Categoria?

É uma estrutura que consiste de

- Uma coleção de objetos $A, B, C, \dots$
- Uma coleção de flechas $f, g, h, \dots$

De forma que

- as flechas possuem domínio e contradomínio;
- Existe flecha identidade para todo objeto;
- Existe (quando fizer sentido) flecha composta e vale a regra da associatividade.

# Exemplos

- Set;
- Top;
- Vect;
- ...

Poset
Todo poset (=conjunto com ordem parcial) pode ser visto como uma categoria em que

- Para todo $A, B$ existe única flecha $A \to B$;
- Se existe $A \to B$ e $B \to A$, então $A = B$.

# Funtor

Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de

- Objetos $F(A)$ em $\mathcal{D}$;
- Flechas $F(f) : F(A) \to F(B)$ em $\mathcal{D}$

de forma que

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] & & F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g) \circ F(f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\
& C \arrow[rr, Rightarrow, "F"] & & & F(C)
\end{tikzcd}
$$

$$
A \xrightarrow[id_A]{} A \qquad\qquad F(A) \xrightarrow[id_{F(A)}]{} F(A)
$$

# Exemplos

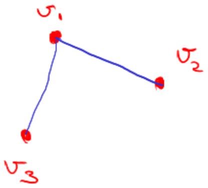
- Funtor Identidade $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$;
- Funtor $Hom(A, -) : \mathcal{C} \to Set$;
- Grupo Fundamental $\pi_0 : Top^* \to Gr$;
- Funtor esquecimento;
- Feixes celulares.

# Feixes em Dinâmica de Opinião

# Matriz de incidência

Seja $G = (V, E)$ um grafo não dirigido, onde $V = \{v_1, ..., v_n\}$ e $E = \{e_1, ..., e_m\}$.
Para cada vértice $v_i$ e aresta $e_j$ conectando $v_k$ e $v_l$ $(k > l)$, definimos

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i = v_k \\ -1, & \text{se } v_i = v_l \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$




$e_1: v_3 \to v_1$

$e_2: v_2 \to v_1$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# A matriz Laplaciana

Defina

$$L_{ij} = \begin{cases} deg(v_i), & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } i \neq j \text{ e } v_i \text{ é adjascente a } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz Laplaciana

1. satisfaz $L = BB^t$;
2. gera um sistema dinâmico

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha Lx; \alpha > 0$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e cada $x_{v_i} \in \mathbb{R}$ mostra a opinião de uma pessoa como um número real.

# A matriz Laplaciana

Defina

$$L_{ij} = \begin{cases} deg(v_i), & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } i \neq j \text{ e } v_i \text{ é adjascente a } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz Laplaciana

1. satisfaz $L = BB^t$;
2. gera um sistema dinâmico

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha Lx; \alpha > 0$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e cada $x_{v_i} \in \mathbb{R}$ mostra a opinião de uma pessoa como um número real.

# Dinâmica de Opinião

Evolução de $x$ ao longo do tempo = Evolução das opiniões.

## Teorema (M. Taylor 68)

Toda distribuição de opinião inicial leva ao consenso.

## Conclusão

Se todo mundo se comunicar, eventualmente, vamos todos condordar.

# Dinâmica de Opinião

Objetivo do artigo "Opinion Dynamics on Discourse Sheaves":

- um modelo mais flexível;
- utilização de alguma variação da matriz Laplaciana.

Proposta: usar feixes e cohomologia de feixe.

- Subtituimos a matriz Laplacina pelo feixe Laplaciano;

Algumas vantagens obtidas

- O feixe Laplaciano permite perceber que algumas pessoas mentem;
- A cohomologia de feixe identifica pessoas teimosas

# Dinâmica de Opinião

Objetivo do artigo ”Opinion Dynamics on Discourse Sheaves”:

- um modelo mais flexível;
- utilização de alguma variação da matriz Laplaciana.

Proposta: usar feixes e cohomologia de feixe.

- Subtituimos a matriz Laplacina pelo feixe Laplaciano;

Algumas vantagens obtidas

- O feixe Laplaciano permite perceber que algumas pessoas mentem;
- A cohomologia de feixe identifica pessoas teimosas

# Dinâmica de Opinião

Objetivo do artigo ”Opinion Dynamics on Discourse Sheaves”:

- um modelo mais flexível;
- utilização de alguma variação da matriz Laplaciana.

Proposta: usar feixes e cohomologia de feixe.

- Subtituimos a matriz Laplacina pelo feixe Laplaciano;

Algumas vantagens obtidas

- O feixe Laplaciano permite perceber que algumas pessoas mentem;
- A cohomologia de feixe identifica pessoas teimosas

# Feixes em Dinâmica de Opinião

Categorias

Dinâmica de Opinião

Feixes celulares

Feixes em Dinâmica de Opinião

# Feixes celulares em grafos

Seja $G$ um grafo não-dirigido. Um feixe celular $F$ em $G$ é definido da seguinte forma

$$\text{vértice } v \mapsto F(v) \text{ espaço vetorial}$$
$$\text{aresta } e \mapsto F(e) \text{ espaço vetorial}$$
$$\text{par incidente } v \trianglelefteq e \mapsto F_{v \trianglelefteq e} : F(v) \to F(e) \text{ mapa linear}$$

Isso é um funtor $F : G \to Vect$ onde $G$ é uma categoria poset com $v$ and $e$ como objetos e $x \trianglelefteq y$ se e só se, $x = y$ ou $y$ é uma aresta e $x$ é vértice de $y$.

Mais geralmente,

Um feixe celular em $D$ é um funtor $F : Cell(X) \to D$.

# Feixes celulares em grafos

Seja $G$ um grafo não-dirigido. Um feixe celular $F$ em $G$ é definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{vértice } v &\mapsto F(v) \text{ espaço vetorial} \\ \text{aresta } e &\mapsto F(e) \text{ espaço vetorial} \\ \text{par incidente } v \trianglelefteq e &\mapsto F_{v \trianglelefteq e} : F(v) \to F(e) \text{ mapa linear} \end{aligned}$$

Isso é um funtor $F : G \to \mathit{Vect}$ onde $G$ é uma categoria poset com $v$ and $e$ como objetos e $x \trianglelefteq y$ se e só se, $x = y$ ou $y$ é uma aresta e $x$ é vértice de $y$.

Mais geralmente,

Um feixe celular em $D$ é um funtor $F : \mathit{Cell}(X) \to D$.

# Feixes celulares em grafos

Seja $G$ um grafo não-dirigido. Um feixe celular $F$ em $G$ é definido da seguinte forma

$$\text{vértice } v \mapsto F(v) \text{ espaço vetorial}$$
$$\text{aresta } e \mapsto F(e) \text{ espaço vetorial}$$
$$\text{par incidente } v \trianglelefteq e \mapsto F_{v \trianglelefteq e} : F(v) \to F(e) \text{ mapa linear}$$

Isso é um funtor $F : G \to Vect$ onde $G$ é uma categoria poset com $v$ and $e$ como objetos e $x \trianglelefteq y$ se e só se, $x = y$ ou $y$ é uma aresta e $x$ é vértice de $y$.

Mais geralmente,

Um feixe celular em $D$ é um funtor $F : Cell(X) \to D$.

# Feixes celulares em grafos

Seja $G$ um grafo não-dirigido. Um feixe celular $F$ em $G$ é definido da seguinte forma

$$\text{vértice } v \mapsto F(v) \text{ espaço vetorial}$$
$$\text{aresta } e \mapsto F(e) \text{ espaço vetorial}$$
$$\text{par incidente } v \trianglelefteq e \mapsto F_{v \trianglelefteq e} : F(v) \to F(e) \text{ mapa linear}$$

Isso é um funtor $F : G \to \mathit{Vect}$ onde $G$ é uma categoria poset com $v$ and $e$ como objetos e $x \trianglelefteq y$ se e só se, $x = y$ ou $y$ é uma aresta e $x$ é vértice de $y$.

Mais geralmente,

Um feixe celular em $D$ é um funtor $F : \mathit{Cell}(X) \to D$.

# Feixes Celulares vs Feixes

**Sheaves, Cosheaves and Applications** - Justin Curry:

$$G \rightsquigarrow \mathcal{O}(G)$$

$$Func(G, Vect) \cong Sh(\mathcal{O}(G), Vect)$$

Alternativamente,

**Sheaves on Graphs, Their Homological Invariants, and a Proof of the Hanna Neumann Conjecture** - Joel Friedman

# Feixes Celulares vs Feixes

**Sheaves, Cosheaves and Applications** - Justin Curry:

$$G \rightsquigarrow \mathcal{O}(G)$$

$$Func(G, Vect) \cong Sh(\mathcal{O}(G), Vect)$$

Alternativamente,

**Sheaves on Graphs, Their Homological Invariants, and a Proof of the Hanna Neumann Conjecture** - Joel Friedman

# Complexo de cocadeia

Um **complexo de cocadeia** é uma sequência de espaços vetoriais $C^i$ e mapas lineares $\delta^i : C^i \to C^{i+1}$ tais que $\delta^i \delta^{i-1} = 0$

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

A **cohomologia** de um complexo de cocadeia é

$$H^i = \frac{Ker\delta^i}{Im\delta^{i-1}}$$

O complexo de cocadeia de um feixe celular é da forma

$$0 \longrightarrow \bigoplus F(0-cell) \xrightarrow{\delta^0} \bigoplus F(1-cell) \xrightarrow{\delta^1} \dots$$

# Complexo de cocadeia

Um **complexo de cocadeia** é uma sequência de espaços vetoriais $C^i$ e mapas lineares $\delta^i : C^i \to C^{i+1}$ tais que $\delta^i \delta^{i-1} = 0$

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

A **cohomologia** de um complexo de cocadeia é

$$H^i = \frac{Ker\delta^i}{Im\delta^{i-1}}$$

O complexo de cocadeia de um feixe celular é da forma

$$0 \longrightarrow \bigoplus F(0-cell) \xrightarrow{\delta^0} \bigoplus F(1-cell) \xrightarrow{\delta^1} \dots$$

# Complexo de cocadeia

Um **complexo de cocadeia** é uma sequência de espaços vetoriais $C^i$ e mapas lineares $\delta^i : C^i \to C^{i+1}$ tais que $\delta^i \delta^{i-1} = 0$

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

A **cohomologia** de um complexo de cocadeia é

$$H^i = \frac{Ker\delta^i}{Im\delta^{i-1}}$$

O complexo de cocadeia de um feixe celular é da forma

$$0 \longrightarrow \bigoplus F(0 - cell) \xrightarrow{\delta^0} \bigoplus F(1 - cell) \xrightarrow{\delta^1} \dots$$

# Complexo de cadeia do Feixe Celular

No caso dos grafos temos

$$0 \longrightarrow C^0(G,F) \xrightarrow{\delta^0} C^1(G,F) \longrightarrow 0$$

com

$$C^0(G,F) = \bigoplus_{v \in V_G} F(v) \qquad C^i(G,F) = 0\,\forall i \geq 2$$

$$C^1(G,F) = \bigoplus_{e \in E_G} F(e) \qquad \delta^i = 0\,\forall i \geq 1$$

e, escolhendo uma orientação $e = u \to v$,

$$(\delta^0 x)e = F_{v \trianglelefteq e} x_v - F_{u \trianglelefteq e} x_u$$

dessa forma

$$H^0(G,F) = Ker\delta^0$$

# Complexo de cadeia do Feixe Celular

No caso dos grafos temos

$$0 \longrightarrow C^0(G,F) \xrightarrow{\delta^0} C^1(G,F) \longrightarrow 0$$

com

$$C^0(G,F) = \bigoplus_{v \in V_G} F(v) \qquad C^i(G,F) = 0 \, \forall i \geq 2$$

$$C^1(G,F) = \bigoplus_{e \in E_G} F(e) \qquad \delta^i = 0 \, \forall i \geq 1$$

e, escolhendo uma orientação $e = u \to v$,

$$(\delta^0 x)e = F_{v \trianglelefteq e} x_v - F_{u \trianglelefteq e} x_u$$

dessa forma

$$H^0(G,F) = Ker \delta^0$$

# Cohomologia Relativa

Seja $A$ um subgrafo de $G$. Então

$$C^0(A, F) = \bigoplus_{v \in V_A} F(v) \qquad C^1(A, F) = \bigoplus_{e \in E_A} F(e)$$

$\delta_A$ é a restrição de $\delta$.

$H^0(A, F)$ é o espaço das seções locais sobre $A$.

Dualmente,

$$C^0(G, A, F) = \bigoplus_{v \notin V_A} F(v) \qquad C^1(A, F) = \bigoplus_{e \notin E_A} F(e)$$

$H^0(G, A, F)$ é a cohomologia relativa.

# Cohomologia Relativa

Seja $A$ um subgrafo de $G$. Então

$$C^0(A,F) = \bigoplus_{v \in V_A} F(v) \qquad C^1(A,F) = \bigoplus_{e \in E_A} F(e)$$

$\delta_A$ é a restrição de $\delta$.

$H^0(A,F)$ é o espaço das seções locais sobre $A$.

Dualmente,

$$C^0(G,A,F) = \bigoplus_{v \notin V_A} F(v) \qquad C^1(A,F) = \bigoplus_{e \notin E_A} F(e)$$

$H^0(G,A,F)$ é a cohomologia relativa.

# Cohomologia Relativa

Seja $A$ um subgrafo de $G$. Então

$$C^0(A,F) = \bigoplus_{v \in V_A} F(v) \qquad C^1(A,F) = \bigoplus_{e \in E_A} F(e)$$

$\delta_A$ é a restrição de $\delta$.

$H^0(A,F)$ é o espaço das seções locais sobre $A$.

Dualmente,

$$C^0(G,A,F) = \bigoplus_{v \notin V_A} F(v) \qquad C^1(A,F) = \bigoplus_{e \notin E_A} F(e)$$

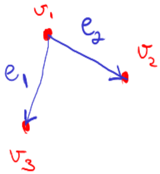
$H^0(G,A,F)$ é a cohomologia relativa.

# O Feixe Laplaciano

$$L_F = \delta^T \delta : C^0(G, F) \to C^0(G, F)$$

O feixe Laplaciano Generaliza a matriz Laplaciana:

Se $F = \underline{\mathbb{R}}$ (feixe constante), então $\delta = B^T$




$$(\delta x)_{e_1} = F_{v_3 \trianglelefteq e_1}(x_{v_3}) - F_{v_1 \trianglelefteq e_1}(x_{v_1})$$

$$(\delta x)_{e_2} = F_{v_2 \trianglelefteq e_2}(x_{v_2}) - F_{v_1 \trianglelefteq e_1}(x_{v_1})$$

$$\Rightarrow \delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Feixes em Dinâmica de Opinião

# Feixe de Discurso

Seja $G = (V, E)$ grafo não-dirigido

$$v = \text{pessoas} \rightsquigarrow F(v) = \text{espaço de opinião}$$
$$e = \text{conexões} \rightsquigarrow F(e) = \text{espaço de discurso}$$

- Cada $v$ pessoa pode falar sobre tópicos/assuntos (o clima, política, qualquer coisa).
- Os tópicos formam uma base $B_v$ de $F(v)$ e a escolha de um vetor $x_v \in F(v)$ mostra a intensidade das opiniões através dos escalares presentes na combinação linear de elementos da base.
- Para cada $e$ existe uma base $B_e$ de $F(e)$ formada pelos tópicos em comum entre duas pessoas.

# Feixe de Discurso

Seja $G = (V, E)$ grafo não-dirigido

$$v = \text{pessoas} \rightsquigarrow F(v) = \text{espaço de opinião}$$
$$e = \text{conexões} \rightsquigarrow F(e) = \text{espaço de discurso}$$

- Cada $v$ pessoa pode falar sobre tópicos/assuntos (o clima, política, qualquer coisa).
- Os tópicos formam uma base $B_v$ de $F(v)$ e a escolha de um vetor $x_v \in F(v)$ mostra a intensidade das opiniões através dos escalares presentes na combinação linear de elementos da base.
- Para cada $e$ existe uma base $B_e$ de $F(e)$ formada pelos tópicos em comum entre duas pessoas.

# Feixe de Discurso

Seja $G = (V, E)$ grafo não-dirigido

$$v = \text{pessoas} \rightsquigarrow F(v) = \text{espaço de opinião}$$
$$e = \text{conexões} \rightsquigarrow F(e) = \text{espaço de discurso}$$

- Cada $v$ pessoa pode falar sobre tópicos/assuntos (o clima, política, qualquer coisa).
- Os tópicos formam uma base $B_v$ de $F(v)$ e a escolha de um vetor $x_v \in F(v)$ mostra a intensidade das opiniões através dos escalares presentes na combinação linear de elementos da base.
- Para cada $e$ existe uma base $B_e$ de $F(e)$ formada pelos tópicos em comum entre duas pessoas.

# Feixe de Discurso

Seja $G = (V, E)$ grafo não-dirigido

$$v = \text{pessoas} \rightsquigarrow F(v) = \text{espaço de opinião}$$
$$e = \text{conexões} \rightsquigarrow F(e) = \text{espaço de discurso}$$

- Cada $v$ pessoa pode falar sobre tópicos/assuntos (o clima, política, qualquer coisa).
- Os tópicos formam uma base $B_v$ de $F(v)$ e a escolha de um vetor $x_v \in F(v)$ mostra a intensidade das opiniões através dos escalares presentes na combinação linear de elementos da base.
- Para cada $e$ existe uma base $B_e$ de $F(e)$ formada pelos tópicos em comum entre duas pessoas.

# Feixe de Discurso

Espaço de opinião $\neq$ Expressão

$$\text{Existe comunicação} = v \trianglelefteq e$$
$$\downarrow$$
$$\text{Forma de expressão} = F_{v \trianglelefteq e} : F(v) \to F(e)$$

**Consenso:**

$$F_{v \trianglelefteq e}(x_v) = F_{u \trianglelefteq e}(x_u)$$

# Consequências

- Se $F = \underline{\mathbb{R}^n}$, então a base de $n$ tópicos é a mesma para cada pessoa $v$, e a opinião expressada é a verdadeira opinião.
- $C^0(G, F) = \bigoplus_v F(v)$ registra as opiniões pessoais das pessoas.
- $C^1(G, F) = \bigoplus_e F(e)$ registra as opiniões públicas das pessoas.
- $\delta : C^0 \to C^1$ calcula a "diferença de expressão" entre pessoas, isto é, o quanto elas discordam publicamente.

# Consequências

- Se $F = \underline{\mathbb{R}^n}$, então a base de $n$ tópicos é a mesma para cada pessoa $v$, e a opinião expressada é a verdadeira opinião.
- $C^0(G, F) = \bigoplus_v F(v)$ registra as opiniões pessoais das pessoas.
- $C^1(G, F) = \bigoplus_e F(e)$ registra as opiniões públicas das pessoas.
- $\delta : C^0 \to C^1$ calcula a “diferença de expressão” entre pessoas, isto é, o quanto elas discordam publicamente.

# Consequências

- Se $F = \underline{\mathbb{R}^n}$, então a base de $n$ tópicos é a mesma para cada pessoa $v$, e a opinião expressada é a verdadeira opinião.
- $C^0(G, F) = \bigoplus_v F(v)$ registra as opiniões pessoais das pessoas.
- $C^1(G, F) = \bigoplus_e F(e)$ registra as opiniões públicas das pessoas.
- $\delta : C^0 \to C^1$ calcula a "diferença de expressão" entre pessoas, isto é, o quanto elas discordam publicamente.

# Consequências

- Se $F = \underline{\mathbb{R}^n}$, então a base de $n$ tópicos é a mesma para cada pessoa $v$, e a opinião expressada é a verdadeira opinião.
- $C^0(G, F) = \bigoplus_v F(v)$ registra as opiniões pessoais das pessoas.
- $C^1(G, F) = \bigoplus_e F(e)$ registra as opiniões públicas das pessoas.
- $\delta : C^0 \to C^1$ calcula a "diferença de expressão" entre pessoas, isto é, o quanto elas discordam publicamente.

# Mais consequências

- $L_F : C^0 \to C^0$ calcula o quão longe uma opinião está de trazer harmonia dentro da vizinhança.
- $H^0(G, F)$ é o espaço em que todas as opiniões chegaram ao concenso (aparente).
- $H^0(G, A, F)$ computa opiniões harmônicas que se anulam em $A$, isto é, pessoas em $A$ que possuem fortes opiniões contrárias ao resto da comunidade.

# Mais consequências

- $L_F : C^0 \to C^0$ calcula o quão longe uma opinião está de trazer harmonia dentro da vizinhança.
- $H^0(G, F)$ é o espaço em que todas as opiniões chegaram ao concenso (aparente).
- $H^0(G, A, F)$ computa opiniões harmônicas que se anulam em $A$, isto é, pessoas em $A$ que possuem fortes opiniões contrárias ao resto da comunidade.

# Mais consequências

- $L_F : C^0 \to C^0$ calcula o quão longe uma opinião está de trazer harmonia dentro da vizinhança.
- $H^0(G, F)$ é o espaço em que todas as opiniões chegaram ao concenso (aparente).
- $H^0(G, A, F)$ computa opiniões harmônicas que se anulam em $A$, isto é, pessoas em $A$ que possuem fortes opiniões contrárias ao resto da comunidade.

# Difusão de Feixe

O feixe Laplaciano

1. satisfaz $L_F = \delta^T \delta$;
2. gera um sistema dinâmico por

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha L_F x; \alpha > 0$$

onde $x \in C^0(G, F)$ representa a distribuição das opiniões.

Supondo tal dinâmica, estudamos a evolução das opiniões em redes sociais.

# Teorema

Soluções $x(t)$ de $\frac{dx}{dt} = -\alpha L_F x$ convergem para a projeção ortogonal de $x(0)$ em $H^0(G; F)$, com $t \to \infty$.

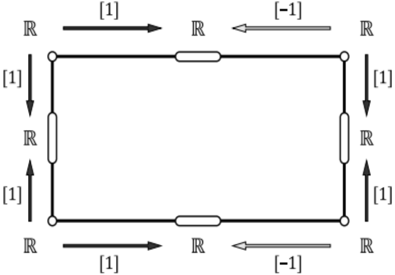
## Demonstração

Utiliza argumentos de álgebra linear, além do cálculo de um limite até encontrar que as soluções convergem para a projeção ortonal de $x(0)$ em $ker L_F = H^0(G; F)$.

# Consequência

Chegamos ao concenso aparente: não é consenso entre as opiniões das pessoas, mas entre opiniões que as pessoas expressam.

# Exemplo




- 4 pessoas e um único assunto;
- O sinal negativo na transformação linear indica divergência entre a opinião pessoal e a pública.

# Agentes teimosos

Seja $U$ um subconjunto de vértices de $G$ que representa pessoas que não mudam de opinião. Vamos considerar:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} -\alpha L_F x, & \text{se } x \notin C^0(U, F); \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } x \in C^0(U, F) \end{cases}$$

Teorema

Toda condição inicial $x_0$ converge exponencialmente para a extensão harmônica de $u = (x_0)|_U$ mais próxima de $x_0$

Observação

$x \in C^0(G, F)$ é uma extensão harmônica de $u \in C^0(U, F)$ se $x|_U = u$ e $(L_F x)_v = 0$ para todo $v \in V \setminus U$.

# Agentes teimosos

A presença de algumas pessoas que não mudam de opinião influencia a dinâmica de opinião do todo.

Então podemos controlar a evolução da distribuição de opinião ao intencionalmente adicionar agentes teimosos no sistema.

# Controlando opiniões

Seja $U \subseteq V_G$ o grupo que irá influenciar um outro grupo representado por $Y \subseteq V_G$. Suponha
$B : C^0(U, F) \to C^0(G, F)$ mede a influência de $U$.
$C : C^0(G, F) \to C^0(Y, F)$ mostra a distribuição de opinião de $Y$.
Para $u \in C^0(U, F)$ e $y \in C^0(Y, F)$ considere

$$\frac{dx}{dt} = \alpha L_F x + Bu \ : \ y = Cx$$

Se $H^0(X, Y, F) = 0 = H^0(X, U, F)$, $B$ é a identidade em $C^0(U, F)$ e $C$ é a identidade em $C^0(Y, F)$ e é zero no complementar, então o sistema pode apresentar uma dinâmica estável induzida por um controlador.

# Controlando opiniões

Seja $U \subseteq V_G$ o grupo que irá influenciar um outro grupo representado por $Y \subseteq V_G$. Suponha $B : C^0(U, F) \to C^0(G, F)$ mede a influência de $U$. $C : C^0(G, F) \to C^0(Y, F)$ mostra a distribuição de opinião de $Y$. Para $u \in C^0(U, F)$ e $y \in C^0(Y, F)$ considere

$$\frac{dx}{dt} = \alpha L_F x + Bu \ : \ y = Cx$$

Se $H^0(X, Y, F) = 0 = H^0(X, U, F)$, $B$ é a identidade em $C^0(U, F)$ e $C$ é a identidade em $C^0(Y, F)$ e é zero no complementar, então o sistema pode apresentar uma dinâmica estável induzida por um controlador.

# Controlando opiniões

Seja $U \subseteq V_G$ o grupo que irá influenciar um outro grupo representado por $Y \subseteq V_G$. Suponha
$B : C^0(U, F) \to C^0(G, F)$ mede a influência de $U$.
$C : C^0(G, F) \to C^0(Y, F)$ mostra a distribuição de opinião de $Y$.
Para $u \in C^0(U, F)$ e $y \in C^0(Y, F)$ considere

$$\frac{dx}{dt} = \alpha L_F x + Bu \ : \ y = Cx$$

Se $H^0(X, Y, F) = 0 = H^0(X, U, F)$, $B$ é a identidade em $C^0(U, F)$ e $C$ é a identidade em $C^0(Y, F)$ e é zero no complementar, então o sistema pode apresentar uma dinâmica estável induzida por um controlador.

## Controlando opiniões

Seja $U \subseteq V_G$ o grupo que irá influenciar um outro grupo representado por $Y \subseteq V_G$. Suponha
$B : C^0(U, F) \to C^0(G, F)$ mede a influência de $U$.
$C : C^0(G, F) \to C^0(Y, F)$ mostra a distribuição de opinião de $Y$.
Para $u \in C^0(U, F)$ e $y \in C^0(Y, F)$ considere

$$\frac{dx}{dt} = \alpha L_F x + Bu \ : \ y = Cx$$

Se $H^0(X, Y, F) = 0 = H^0(X, U, F)$, $B$ é a identidade em $C^0(U, F)$ e $C$ é a identidade em $C^0(Y, F)$ e é zero no complementar, então o sistema pode apresentar uma dinâmica estável induzida por um controlador.

# Controlando opiniões

Seja $U \subseteq V_G$ o grupo que irá influenciar um outro grupo representado por $Y \subseteq V_G$. Suponha
$B : C^0(U, F) \to C^0(G, F)$ mede a influência de $U$.
$C : C^0(G, F) \to C^0(Y, F)$ mostra a distribuição de opinião de $Y$.
Para $u \in C^0(U, F)$ e $y \in C^0(Y, F)$ considere

$$\frac{dx}{dt} = \alpha L_F x + Bu \ : \ y = Cx$$

Se $H^0(X, Y, F) = 0 = H^0(X, U, F)$, $B$ é a identidade em $C^0(U, F)$ e $C$ é a identidade em $C^0(Y, F)$ e é zero no complementar, então o sistema pode apresentar uma dinâmica estável induzida por um controlador.

# Aprendendo a mentir

Recorde que $F_{v \trianglelefteq e} : F(v) \to F(e)$ é a expressão de opinião. Suponha que $v$ possa observar a opinião pública de seus vizinhos $F_{u \trianglelefteq e} x_u$ e modificar seus próprios mapas de restrição $F_{v \trianglelefteq e}$, isto é, modificar como expressa a própria opinião. Ao longo do tempo, $v$ pode mudar a opinião pública com o objetivo de alcançar um consenso:

$$\frac{d}{dt} F_{v \trianglelefteq e} = -\beta (F_{v \trianglelefteq e} x_v - F_{u \trianglelefteq e} x_u) x_v^T, \text{ para algum } \beta > 0$$

Teorema

Para uma solução $F(t)$, o feixe $F = F(0)$ converge para o feixe mais próximo tal que $x$ seja uma seção global.

# Aprendendo a mentir

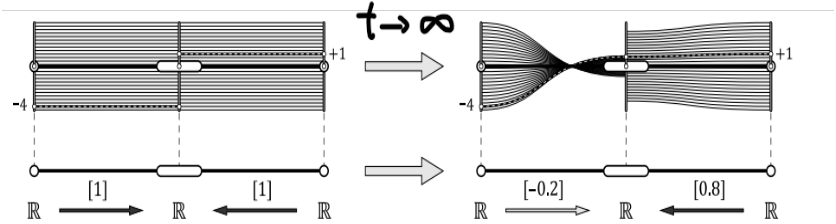
Recorde que $F_{v \trianglelefteq e} : F(v) \to F(e)$ é a expressão de opinião. Suponha que $v$ possa observar a opinião pública de seus vizinhos $F_{u \trianglelefteq e} x_u$ e modificar seus próprios mapas de restrição $F_{v \trianglelefteq e}$, isto é, modificar como expressa a própria opinião. Ao longo do tempo, $v$ pode mudar a opinião pública com o objetivo de alcançar um consenso:

$$\frac{d}{dt} F_{v \trianglelefteq e} = -\beta (F_{v \trianglelefteq e} x_v - F_{u \trianglelefteq e} x_u) x_v^T, \text{ para algum } \beta > 0$$

Teorema

Para uma solução $F(t)$, o feixe $F = F(0)$ converge para o feixe mais próximo tal que $x$ seja uma seção global.

# Exemplo




- Começamos com um feixe em que cada uma das duas pessoas expressa sua verdadeira opinião;
- Chegamos em uma situação de consenso pois a pessoa da esquerda aprendeu a mentir.

# Unindo os sistemas

Se quisermos supor que algumas pessoas são mentirosas, mas as outras não então consideramos um sistema do tipo

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha\delta^T\delta x \qquad \frac{d\delta_e}{dt} = -\beta\delta_e^T x_e x_e^T$$

Teorema

Os pontos críticos desse sistema são Lyapunov estáveis.

# Dinâmica não-linear

Dado um mapa contínuo mas não necessariamente linear $\phi_e : F(e) \to F(e)$ para cada $e$ de $G$, combinando todos esses mapas podemos definir

$$\Phi : C^1(G; F) \to C^1(G; F)$$

E então formar um feixe Laplacinano não linear $L_F^\Phi = \delta_F^T \Phi \delta_F$ e considerar a equação

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha L_F^\Phi x$$

Essa ideia permite modelar a presença de antagonistas e situações em que apenas pessoas com opiniões suficientemente próximas se comunicam.

# Dinâmica não-linear

Dado um mapa contínuo mas não necessariamente linear $\phi_e : F(e) \to F(e)$ para cada $e$ de $G$, combinando todos esses mapas podemos definir

$$\Phi : C^1(G; F) \to C^1(G; F)$$

E então formar um feixe Laplacinano não linear $L_F^\Phi = \delta_F^T \Phi \delta_F$ e considerar a equação

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha L_F^\Phi x$$

Essa ideia permite modelar a presença de antagonistas e situações em que apenas pessoas com opiniões suficientemente próximas se comunicam.

# Dinâmica não-linear

Dado um mapa contínuo mas não necessariamente linear $\phi_e : F(e) \to F(e)$ para cada $e$ de $G$, combinando todos esses mapas podemos definir

$$\Phi : C^1(G; F) \to C^1(G; F)$$

E então formar um feixe Laplacinano não linear $L_F^\Phi = \delta_F^T \Phi \delta_F$ e considerar a equação

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha L_F^\Phi x$$

Essa ideia permite modelar a presença de antagonistas e situações em que apenas pessoas com opiniões suficientemente próximas se comunicam.

# Trabalhos futuros

- Conectar a teoria com dados reais.
- Explorar ambientes fortemente não-lineares.
- Usar o mesmo princípio para modelar outros problemas.
- Trocar *Vect* por outra categoria.

# Bibliografia I


Curry, J.
Sheaves, cosheaves and applications, 2013.

Friedman, J.
Sheaves on graphs, their homological invariants, and a proof of the hanna neumann conjecture, 2011.

Hansen, J., and Ghrist, R.
Opinion dynamics on discourse sheaves.
*SIAM Journal on Applied Mathematics 81*, 5 (2021), 2033–2060.

Taylor, M.
Towards a mathematical theory of influence and attitude change.
*Human Relations 21*, 2 (1968), 121–139.

Obrigada!