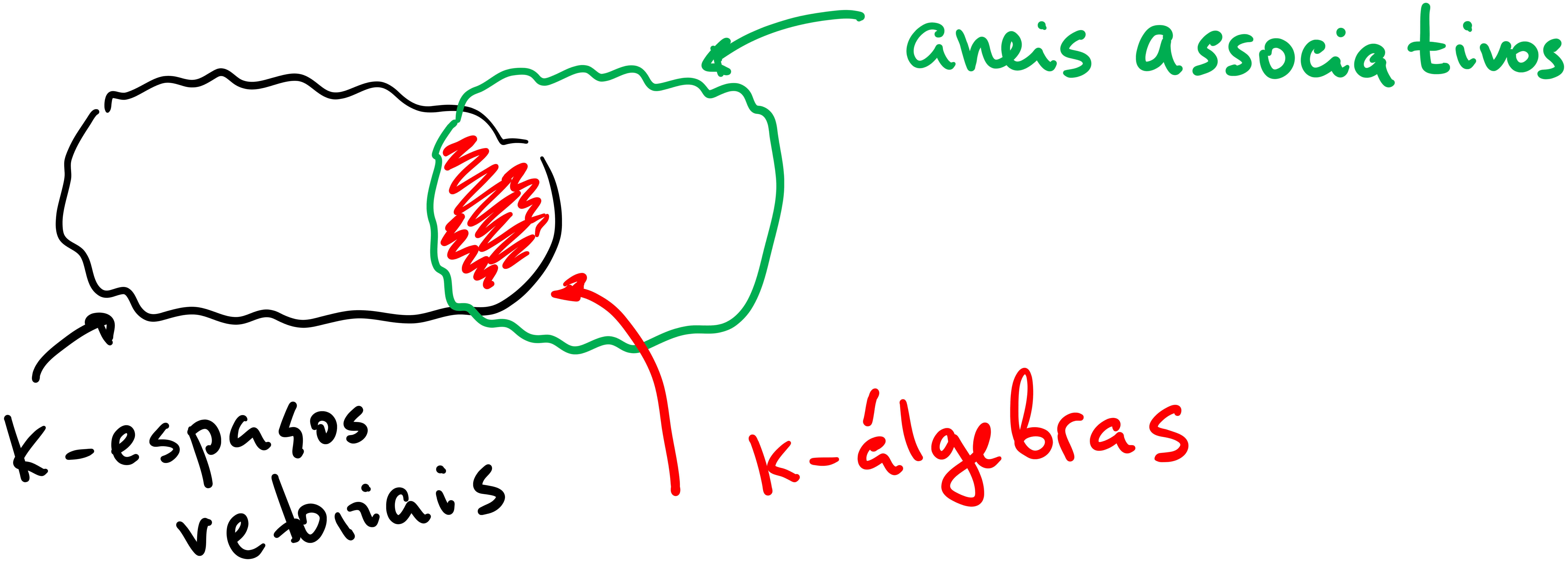
Homologia em álgebras de dimensão finita

Plano

1. Álgebras e seus módulos
2. Resolusões (pelos projetivos)
3. Dimensão global e homologia
4. Conjeturas abertas e avansos recent.

1. K - um corpo ($K = \bar{K}$).

Uma <u>k-álgebra</u> A é um K-espaço vetorial com um produto (assoc. e distrib.)



Existe $1_A \in A$, com $1_A \cdot x = x \cdot 1_A = x$, $x \in A$

Exemplos

a) $A = k$

b) $A = M_n(k)$

c) $A = \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix} \subset M_2(k).$ $\quad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix},\ a, b, c \in k$

d) Seja G - um grupo, a álgebra de grupo

$$kG = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \;\middle|\; a_g \in k \right\}$$

$\leftarrow$ quase todos 0.

$$\left(\sum a_g g\right)\left(\sum b_g g\right) = \sum_{h \in G} \left[\sum_{xy = h} a_x b_y h \right]$$

$\dim_k kG < \infty \iff G$ é finito.

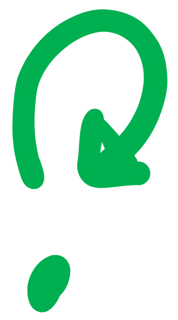
é fin.

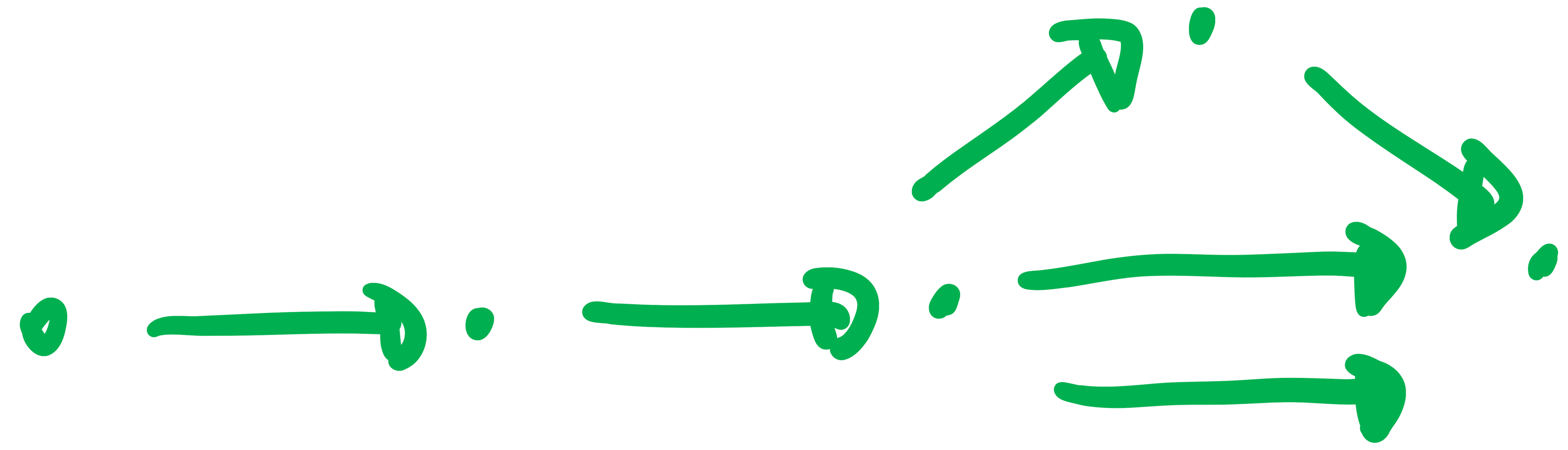
e) Seja Q - uma aljava finita

$$Q = (Q_0, Q_1)$$

vertices

arestas

Q: 

Q': 

kQ — álgebra de caminhos:

Base: caminhos orientados em Q

produto: concatenação dos caminhos (ou 0 se imposivel).

Obs. $\dim_k kQ < \infty \iff Q$ sem ciclos.

Q: $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x"] \end{tikzcd}$

<u>Base</u>: $1, x, x\cdot x, x\cdot x\cdot x, \dots$

<u>Produto</u>: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ $\Rightarrow KQ \simeq K[x]$

Q: $e_1 \xleftarrow{\alpha} e_2$

<u>Base</u>: e_1, e_2, α

<u>Produto</u>:

$\cdot$	e_1	e_2	α
e_1	e_1	0	α
e_2	0	e_2	0
α	0	α	0

$$\Rightarrow KQ \simeq \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

<u>Obs.</u> Hoje quase sempre supomos que $\dim_K A < \infty$.

"**Def**". Um A-**módulo** M é um espaço vetorial com "escalares" em A.

M é um grupo abeliano e operação $\cdot : A \times M \to M$, com

1) $a(x+y) = ax + ay$
2) $(a+b)x = ax + bx$
3) $(ab)x = a(bx)$
4) $1 \cdot x = x$

, $a, b \in A$ $x, y \in M$

A-mod é categoria (abeliana) dos A-modulos a esquerda de dimensão finita.

Exemplos

a) Se $A = K$, assim

espaços vetoriais

$$A\text{-mod} = \mathrm{vect}_K$$

b) Se $A = K[x] = K(\bullet\circlearrowleft)$, assim

$$A\text{-módulos} \longleftrightarrow \text{pares } (V, T : V \to V)$$

K-espaço vetorial

trans. lin.

c) $A = KQ$,

$$A\text{-módulos} \longleftrightarrow \text{tuplas}$$

transf. em flechas

$$\left((V_i)_{i \in Q_0}, \left(V_\alpha : V_i \to V_j \right)_{\alpha \in Q_1} \right)$$

espaços em vertices

Porque estudar os módulos?

"<u>Resposta</u>" Para entender melhor as álgebras.

"<u>Teorema</u>" As seguintes condições são equivalentes:

1) Álgebra A tem propriedade X.
2) Todo A-módulo tem propriedade Y.

[Krull-Shmidt] Q.q. modulo em A-mod é soma direita dos indecomponiveis.

Ex. Se $A = k \Rightarrow M$ é indecom $\Leftrightarrow M \simeq k$.

Se $A = k[x]$, assim

indecomponiveis $\longleftrightarrow$ formas de Jordan J_n

$T: V \to V$.

Problema "Entender" módulos indecomponiveis para A-geral.

Teorema [Gabriel]. Se $\dim_k A < \infty$, assim

$$A\text{-mod} \simeq \frac{kQ_A}{I}\text{-mod} \qquad I \triangleleft kQ_A$$

onde Q_A é aljava do Gabriel.

Assim "basta" endender as representações das aljavas.

Um A-módulo chama-se <u>simples</u> se não possui submódulos próprios.

A é <u>semissimples</u>, se simples = indecomponível em A-mod

A é s.s. $\Leftrightarrow$ $A \cong \bigoplus_{i=1}^{m} M_{n_i}(k)$

<u>Teorema</u> (Maschke) Se G é finito, assim:

KG é s.s. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{char} K \nmid |G|$

<u>Obs.</u>

KQ é s.s. $\Leftrightarrow$ $Q_1 = \emptyset$ não tem flechas

2 Se $M \simeq A \oplus \dots \oplus A = A^n$
assim M é chamado <u>livre</u>

<u>Obs.</u> Se $A = K \Rightarrow$ todo modulo é livre.

<u>Obs. 2</u> Todo modulo M em A-mod
tem forma $M \simeq A^n/I$.

Se M é sumando direito de A^n, assim
M é chamado <u>projetivo</u>.

Todo projetivo tem forma

$$P = \bigoplus_{i=1}^{m} Ae_i,$$

com e_i - idempotentes em A.

<u>Ex.</u> Se $A = k$ $\Rightarrow$ todo modulo é projetivo

Mais geral,

A é s.s. $\Leftrightarrow$ todo A-modulo é projetivo.

Def. Uma álgebra A é **hereditaria** se submódulos dos projetivos são projetivos. $M = P/Q$ projetivos.

Teorema [Gabriel]

A é hereditaria $\Longleftrightarrow$ A-mod $\simeq$ KQ-mod

Idea da **homologia** é "äproximar" q.q. modulo pelos projetivos.

Seja $M \in A$-mod, uma <u>resolusão</u> <u>projetiva</u> de M é uma sequencia exata:

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

com P_i – são modulos projetivos.

$$\operatorname{Im} d_i = \operatorname{Ker} d_{i-1}$$

A <u>dimensão</u> <u>projetiva</u> de M ($\operatorname{pd}_A M$) é tamanho minimal de tal resolução.

Ex. Se A é s.s. assim todo $M = P_0$ é projetivo. $0 \to P_0 \to M = P_0 \to 0$

Logo $pd_A M = 0$, para todo M.

Ex. 2 Se A é hereditária, logo

$$0 \to \underset{\overset{\|}{P_1}}{\ker \pi} \to \underset{\overset{\|}{P_0}}{P(M)} \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

projetivo — recobrimento projetivo

Logo $pd_A M \leq 1$, para todo M.

Ex. 3 Suponha $A = \frac{k[x]}{x^2} = \langle 1, x \rangle$

$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad x \cdot x = 0$

álgebra dos números duais.

Existe único módulo simples $S = \langle s \rangle$ com ação: $1 \cdot s = s, \quad x \cdot s = 0$.

Agora,

$$\cdots \longrightarrow A \longrightarrow A \longrightarrow A \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

logo $\operatorname{pd}_A S = \infty$.

3 a <u>Dimensão</u> glo<u>bal</u> da A é

$$\operatorname{gldim} A = \sup\{\operatorname{pd}_A M \mid M \in A\text{-mod}\}$$
$$= \sup\{\operatorname{pd}_A S \mid S\text{-simples}\}.$$

<u>Ex.</u>

a) $\operatorname{gldim} A = 0 \iff$ A é s.s.

b) $\operatorname{gldim} A \leq 1 \iff$ A é hereditaria

c) $\operatorname{gldim}\left(\frac{k[x]}{x^2}\right) = \infty$.

<u>Motivasão</u> (geometrica).

Teorema [Auslander - Buchsbaum - Serre].

Seja V - variedade algebrica,

$A = K[V]$ - anel das coordenadas de V.

Assim:

$$\operatorname{gldim} A < \infty \iff V \text{ é suave.}$$

Neste caso $\operatorname{gldim} A = \dim V$.

<u>Def.</u> A é <u>suave</u> se $\operatorname{gldim} A < \infty$.

(b) Dimensão finitística

$$\text{findim}\, A = \sup\left\{ \text{pd}_A M \;\middle|\; \begin{array}{l} M \in A\text{-mod} \\ \text{pd}_A M < \infty \end{array} \right\}$$

Ex. Se A é her. $\Rightarrow$ $\text{findim}\, A = \text{gldim}\, A \leq 1$

Se $A = kG$ $\Rightarrow$ $\text{findim}\, A = 0$.

Se $A = \dfrac{k[x]}{x^2}$ $\Rightarrow$ $\text{findim}\, A = 0$.

$\boxed{\text{Conjetura 1}}$ (Bass)

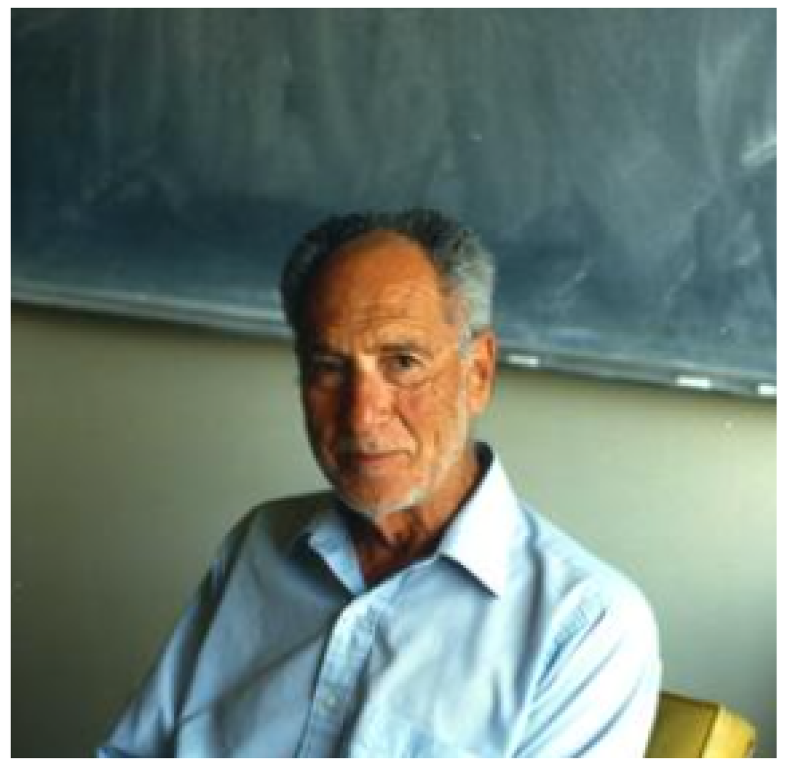
$\dim_k A < \infty \Rightarrow \text{findim}\, A < \infty$.

c) **Homologia**: nasceu na topologia como feramenta p/ analisar e clasificar variedades. Dado X - variedade $\Rightarrow$ complexo: $\cdots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots$

$$d_i \circ d_{i+1} = 0, \quad d_{i-1} \circ d_i = 0 \ \ldots$$

$$H_i(X) = \frac{\ker d_i}{\operatorname{Im} d_{i+1}}$$ – mede "buracos" em X.

G. Hochschild em 1945, definiu homologia de Hochschild $HH_*(A)$ para $* \geq 0$



Hochschild.

$HH_0(A) = A/[A,A]$, onde $[A,A] = \langle xy - yx \mid x,y \in A \rangle$

<u>Obs.</u> • $HH_0(A)$ não é álgebra em geral

• $HH_0(A) = A \iff A$ é comutativo

• HH_0 é funtor em k-álgebras.

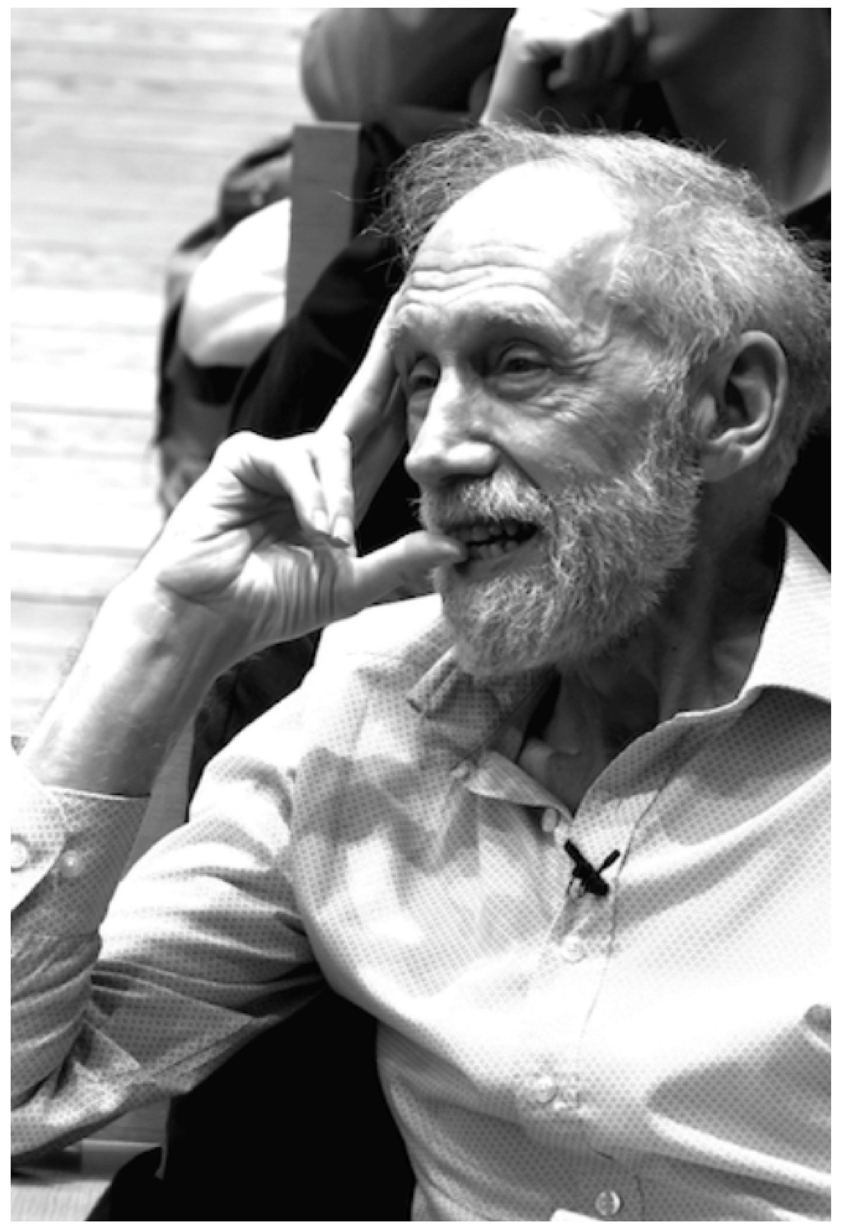
Assim: $HH_1(A), HH_2(A), \ldots$

como homologia de certo complexo

<u>MacLane</u>: $$HH_*(A) = \mathrm{Tor}_*^{A^e}(A,A)$$

onde $A^e = A \otimes_k A^{op}$ — alg. envelopant.

Alain Connes: HH_* como "homologia" dos espaços não-comutativos.



$X \longrightarrow C(X)$ álgebra comut. das funções

"Geometria não-comutativa", analisar as àlgebras não-comut.

Exemplos:

a) $HH_*(k) = \begin{cases} 0, & \text{se } * > 0 \\ k, & \text{se } * = 0. \end{cases}$

mesma coisa p/ $A = M_n(k)$

b) $HH_*\left(\begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 0, & * > 0 \\ k^2, & * = 0 \end{cases}$

c) $HH_*(kQ) = \begin{cases} 0, & * > 0 \\ k^{Q_0}, & * = 0 \end{cases}$

d) $HH_*(k[x]) = \begin{cases} 0, & * > 0 \\ k[x], & * = 0 \end{cases}$

e) $HH_*\left(\dfrac{k[x]}{x^2}\right) = \begin{cases} k, & * > 0 \\ k[x]/x^2, & * = 0. \end{cases}$

④ Conjeturas abertas.

$\boxed{\text{Conjetura 1}}$ (Bass)

$$\dim_k A < \infty \overset{?}{\Longrightarrow} \text{findim } A < \infty.$$

Teorema (Keller, 98)

A é suave $\Longrightarrow$ $HH_*(A) = \begin{cases} 0, & * > 0 \\ k^n, & * = 0 \end{cases}$

gldim A < ∞

com $n = \#$ dos simples em A-mod.

$\boxed{\text{Conjetura 2}}$ (Han, 2006)

$$HH_*(A)=0, \text{ para } * \gg 0 \overset{?}{\Rightarrow} A \text{ é } \underline{\text{suave}}.$$

Em outras palavras tem 2 posibilidades:

$HH_*(A)$ — concentrado em gran 0 ($\mathrm{gl\,dim}\, A < \infty$). suave.

ou $HH_*(A)$ é infinito, não é suave ($\mathrm{gl\,dim}\, A = \infty$).

Seja $B \subset A$ extensão das álgebras.

<u>Teorema</u> [Cibils, Marcos, Lanzillota, Solotar, 2020]

Se $B \subset A$ é "limitada", assim

A/B

Conjetura 2 vale p/ B $\Leftrightarrow$ Conjetura 2 vale p/ A.

Idea da prova é certas sequencias exatas longas (Jacobi-Zarisski) que relacionam $HH_*(B)$ e $HH_*(A)$.

Teorema [K. I , J. MacQuarrie, 2021]

Se $B \subset A$ é "proj-limitada", assim:

Conjeturas 1,2 valem p/ B $\Longleftrightarrow$ Conjeturas 1,2 valem p/ A.

Obrigado!!!

$A^e = A \otimes_k A^{op}$ — Happel, $\mathrm{pd}_{A^e} A = \mathrm{gldim}\, A$

Conjectura 3 [Happel, 89]

$\Downarrow$ A é suave $\Leftrightarrow$ $HH^*(A)$ tem suporte finito!

Falso ~2001