MAE 5835 - Estatística Avançada II
1o semestre de 2014 - Lista de Exercícios 5

1. Prove o lema de Glivenko-Cantelli para o caso em que $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ é uma amostra aleatória obtida de uma distribuição contínua trivariada.

2. Nem sempre a distribuição assintótica de estatísticas é Normal. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com função de distribuição contínua F e denote por $X_{n:1} < \cdots < X_{n:n}$ o conjunto de estatísticas de ordem associadas. Seja $V_n = n[1 - F(X_{n:n})]$. Mostre que $V_n \xrightarrow{\mathcal{D}} V$, em que $V \sim \exp(1)$.

3. Se $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com densidade $f(\cdot, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ e se desejamos testar
$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0,$$
mostre, com detalhes, que a estatística de Rao tem distribuição assintótica qui-quadrado com p graus de liberdade.

4. No mesmo contexto do exercício anterior, considere agora as estatísticas de Wald, Razão de Verossimilhanças e Rao para verificar a hipótese
$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$$
em contraposição com a chamada hipótese *alternativa local de Pitman*, que consiste em uma sequência de hipóteses $\{H_{1,n},\ n \geq 1\}$, tal que
$$H_{1,n} : \boldsymbol{\theta}_n = \boldsymbol{\theta}_0 + n^{-1/2}\boldsymbol{\delta},$$
em que $\boldsymbol{\delta}$ é um vetor fixo em $\mathbb{R}^p$ e definido de tal forma que, para cada n, $\boldsymbol{\theta}_n \in \Theta$. Mostre que cada uma das três estatísticas tem, sob $H_{1,n}$, distribuição assintótica qui-quadrado *não central*, com p graus de liberdade, sendo que o *parâmetro de não centralidade* é dado por
$$\boldsymbol{\delta}'\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\delta}.$$