MAE 5835 - Estatística Avançada II

1o semestre de 2014 - Lista de Exercícios 4

1. Prove o seguinte resultado (Método Delta Multidimensional):
   Seja $\{\boldsymbol{T}_n,\ n \geq 1\}$ uma sequência de vetores aleatórios de dimensão $p \times 1$. Admita que
   $$\sqrt{n}(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Gamma}), \quad n \to \infty,$$
   em que $\boldsymbol{\theta}_0$ é um ponto interior no espaço paramétrico $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^p$. Supondo que $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua em uma vizinhança de $\boldsymbol{\theta}_0$ tal que o vetor de derivadas
   $$\dot{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}} g(\boldsymbol{t})$$
   seja não nulo (elemento a elemento) em $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\theta}_0$ e definindo
   $$\delta^2 = [\dot{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)]^T \boldsymbol{\Gamma} [\dot{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)],$$
   então
   $$\sqrt{n}[g(\boldsymbol{T}_n) - g(\boldsymbol{\theta}_0)] \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_p(0, \delta^2),$$
   para $n \to +\infty$.

2. Suponha que $\{(X_n, Y_n)^T,\ n \geq 1\}$ seja uma sequência de vetores aleatórios bidimensionais, independentes e identicamente distribuídos, tal que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \sigma_{11}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_1) = \sigma_{22}$ e $\sigma_{12} = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, Y_1) = \rho\sigma_{11}\sigma_{22}$. Defina os estimadores
   $$S_{11}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad S_{22}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$$
   e
   $$S_{12}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}).$$
   Então, se
   $$r_n = \frac{S_{12}^{(n)}}{\sqrt{S_{11}^{(n)} S_{22}^{(n)}}},$$
   encontre a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(r_n - \rho)$. Explicite as suposições necessárias.

3. Prove o teorema de Slutsky para a razão de duas sequências de variáveis aleatórias, sendo o numerador uma sequência que converge em distribuição para uma v.a. X e o denominador uma sequência convergindo para uma constante $c \neq 0$, em probabilidade.

4. Considere uma sequência de vetores aleatórios de dimensão $p \times 1$, representada por $\{\boldsymbol{X}_n;\ n \geq 1\}$, tal que

$$\boldsymbol{Z}_n = \sqrt{n}\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad n \to \infty,$$

em que a matriz de variância-covariância $\boldsymbol{\Sigma}$ tem posto igual a $q \leq p$.

   (a) Se $\{\boldsymbol{A}_n;\ n \geq 1\}$ é uma sequência de matrizes positivas definidas ou positivas semidefinidas, **não estocásticas**, prove que

$$Q_n = \boldsymbol{Z}_n^T \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{Z}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2_q, \quad n \to \infty,$$

   se e somente se

$$\boldsymbol{A}_n \to \boldsymbol{A}, \quad n \to \infty,$$

   sendo $\boldsymbol{A}$ uma inversa generalizada de $\boldsymbol{\Sigma}$ (isto é, $\boldsymbol{\Sigma A \Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}$).[Este é o Teorema de Cochran].

   (b) Se $\{\boldsymbol{A}_n;\ n \geq 1\}$ é uma sequência de matrizes positivas definidas ou positivas semidefinidas, **aleatórias**, prove que se

$$\boldsymbol{A}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \boldsymbol{A}, \quad n \to \infty,$$

   com $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{A \Sigma A} = \boldsymbol{A}$, então

$$Q_n = \boldsymbol{Z}_n^T \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{Z}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2_q,$$

   para $n \to \infty$. [Sugestão: Use o Teorema de Courant e o Teorema de Cochran].