MAE 5835 - Estatística Avançada II
1o semestre de 2014 - Lista de Exercícios 3

1. Recorde que mostramos que para $X_1, \ldots, X_n$, v.a. independentes e identicamente distribuídas, (i) a estatística da razão de verosimilhanças para testar as hipóteses

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta = \theta_1 (\neq \theta_0),$$

forma uma sequência $\{\lambda_n,\ n \geq 1\}$ que, sob H_0 é uma sequência martingal. Mais ainda, mostramos que (ii) existe uma normalização conveniente de tal forma que, para $\theta \in \Theta$, é possível obter uma sequência transformada que tem a propriedade martingal e (iii) existe outra normalização que fornece uma sequência martingal para o log da razão de verossimilhanças. Mostre que vale (i)–(iii) mesmo que $X_1, \ldots, X_n$ sejam independentes mas *não identicamente distribuídas*.

2. Considere que X_{ni}, $i \geq 1$, são variáveis aleatórias independentes tais que $P(X_{ni} = 1) = 1 - P(X_{ni} = 0) = \pi_{ni}$.

   (a) Se as probabilidades π_{ni} são estritamente positivas, para todo $i \geq 1$, e se

   - $\sum_{i=1}^{n} \pi_{ni} = \pi_n \to \lambda$, para $n \to \infty$, com $0 < \lambda < \infty$, e
   - $\max_{1 \leq i \leq n} \pi_{ni}/\pi_n \to 0$,

   mostre que $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni}$ tem, assintoticamente, uma distribuição de Poisson com média igual a λ.

   (b) Mostre que conforme λ aumenta, $(T_n - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ converge em distribuição para uma distribuição Normal.

   `Sugestão: Use funções características`

3. Mostre as seguintes relações:

   (a) A condição de Liapunoff implica a condição UAN;

   (b) A condição de Liapunoff implica a condição de Lindeberg

4. Seja $\{X_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ uma seqüência de v.a. independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Seja

$$S_n = c_{n1}X_1 + \cdots + c_{nn}X_n,$$

com $\sum_{i=1}^n c_{ni} = 0$ e $\sum_{i=1}^n c_{ni}^2 = 1$, para todo n. Mostre que se

$$\max_{1\le i\le n} c_{ni}^2 \to 0$$

quando $n \to \infty$, então

$$\frac{S_n}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

5. Seja X_k, $k \geq 1$ variáveis aleatórias independentes com

$$P(X_k = -1) = P(X_k = 1) = \frac{1 - 2^{-k}}{2} \quad \text{para } k \geq 1$$

e

$$P(X_k = -2^k) = P(X_k = 2^k) = 2^{-k-1}, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Verifique se vale a condição de Lindeberg.